TRAITÉ

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DU CALCUL INTÉGRAL.

TRAITÉ

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DU CALCUL INTÉGRAL,

Silvestre François

PAR S. F. LACROIX.

SECONDE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

> Tantùm series juncturaque pollet.
>
> HORAT.

TOME PREMIER.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, N° 57.

1810.

PRÉFACE.

En reculant les bornes de l'Analyse, les grands Géomètres de notre siècle ont donné à sa marche une perfection qui devait influer nécessairement sur la manière de présenter les vérités connues avant eux. On remarque en effet dans l'histoire des Mathématiques certaines époques où, sans que la vérité des propositions particulières ait souffert aucune atteinte, leur enchaînement systématique a changé par les rapprochemens auxquels les nouvelles découvertes ont donné lieu : les principes sont devenus plus féconds, les détails moins nécessaires, et la généralité des Méthodes a permis encore d'embrasser la science en entier, malgré les pas immenses qu'elle avait faits. On était à l'une de ces époques, lorsque je publiai (en 1797) la première édition du Traité que je mets de nouveau sous les yeux du Public ; la réunion des nombreux matériaux, relatifs au Calcul différentiel et au Calcul intégral, épars dans les collections académiques, pouvait seule faire connaître toutes les richesses de cette branche importante de l'Analyse, et réduire à un petit nombre de méthodes générales, une foule de procédés particuliers qui tenaient à l'enfance de ces calculs; mais une simple compilation n'aurait pas atteint ce but. Les mêmes découvertes s'étant présentées à plusieurs Géomètres, sous des points de vue très-différens, il en est résulté plusieurs méthodes entre lesquelles il fallait faire un choix, ou qu'il fallait exposer dans un ordre qui mît en évidence les rapports par lesquels elles se lient les unes aux autres ; enfin, il n'était pas moins nécessaire de donner, pour ainsi dire, à toutes, une teinte uniforme, qui ne laissât point appercevoir de différence entre ce qu'on devait à un auteur et ce qu'on avait emprunté d'un autre, et répandît sur le tout un égal degré de précision et de clarté. Telle est la tâche que je me suis imposée ; j'ai senti toutes les difficultés que j'aurais à vaincre pour la remplir avec succès; mais l'importance de la matière et le desir d'être utile, m'ont soutenu dans cette pénible carrière, et surtout la persuasion qu'un essai dans ce genre, quelqu'éloigné qu'il pût être de la perfection, contribuerait néanmoins à l'avancement de la science. Avant de rendre compte du plan que j'ai suivi, je crois devoir remettre sous les yeux du lecteur l'origine et les progrès du Calcul différentiel et du Calcul intégral, afin qu'il puisse mieux apprécier les raisons qui ont déterminé l'ordre que j'ai adopté.

La découverte du Calcul différentiel et du Calcul intégral ne remonte qu'au 17e siècle, mais les questions par lesquelles on y a été conduit s'étaient présentées dès les premiers temps de la Géométrie. Lorsque les anciens Géomètres ont voulu comparer les figures curvilignes, soit entre elles, soit avec des figures rectilignes, ils ont été obligés de donner un tour nouveau à leurs démonstrations. La deuxième proposition du Livre XII des Élémens d'Euclide, offre le premier essai de ce genre, qui soit parvenu jusqu'à nous. Elle a pour objet, de prouver que les surfaces des cercles sont entre elles comme les quarrés des diamètres. Il y a ici un passage du fini à l'infini; car dans la proposition précédente, Euclide montre que ce rapport est celui des polygones semblables, inscrits dans deux cercles différens, et il me paraît évident que le Géomètre, quel qu'il soit, qui découvrit cette vérité, voyant qu'elle était indépendante du nombre de côtés du polygone, et qu'en même temps ces polygones différaient d'autant moins des cercles, qu'ils avaient plus de côtés, a dû nécessairement conclure de là, en vertu de la loi de continuité, que la propriété des premiers convenait aux seconds. On regarderait aujourd'hui comme suffisamment prouvée par ces raisonnemens, la proposition qui en est l'objet, et la plupart des livres élémentaires n'en donnent pas même d'aussi complets; mais les Anciens ont été plus difficiles que nous à cet égard : ils n'ont jamais voulu se permettre de confondre entre elles deux quantités qui avaient une différence, si petite qu'elle fût. Pour mettre donc hors d'atteinte la proposition dont ils avaient, pour ainsi dire, deviné l'existence par les considérations que je viens d'indiquer, ils ont cherché à prouver que le rapport des cercles entre eux ne pouvait être ni plus grand ni plus petit que celui des quarrés de leurs diamètres; et pour y parvenir, ils ont commencé par montrer qu'on pouvait toujours trouver un polygone inscrit, qui ne différât du polygone correspondant circonscrit, et à plus forte raison du cercle lui-même, que d'une quantité moindre qu'une grandeur donnée.

Archimède s'éleva, par des moyens à peu près semblables, à des propositions beaucoup plus difficiles, telles que les rapports des surfaces et des volumes du cylindre et de la sphère, la quadrature de la parabole et les propriétés des spirales : mais ne croyons pas qu'il les ait découvertes ainsi qu'il nous les a transmises. Ces vérités d'une espèce avec laquelle les esprits n'étaient pas encore familiarisés, ont dû rencontrer beaucoup de contradicteurs, et l'homme de génie qui les avait dérobées pour ainsi dire à l'obscurité qui les cachait, sentit que l'exposition des idées qui l'avaient dirigé dans ses recherches ne suffirait pas pour convaincre ces hommes, que l'ignorance, souvent jointe à l'envie, soulève contre tout ce qui leur est supérieur. Ceci n'est point une conjecture : Archimède, en adressant à son ami Dosithée, son Traité de la quadrature de la Parabole, répond d'avance, en s'autorisant de l'exemple des Géomètres qui l'ont précédé, à ceux qui voudraient élever des doutes sur ses démonstrations (*).

Lorsqu'après de longues ténèbres, le flambeau des sciences vint à se rallumer, que les écrits d'Euclide et d'Archimède furent traduits et commentés, on chercha à retrouver le fil qui avait pu les diriger dans leurs découvertes; mais on ne tarda point à s'appercevoir qu'ils s'étaient beaucoup plus occupés de convaincre que d'éclairer leurs contemporains : on fut donc obligé de quitter leurs traces, et de penser à se frayer des routes nouvelles. Telles furent sans doute les raisons qui portèrent Cavalleri à se départir de cette extrême rigueur, et le conduisirent à la *méthode des indivisibles*, par laquelle il regarda les lignes comme composées de points, les surfaces comme composées de lignes, et les corps comme composés de surfaces. Le soin qu'il eut de vérifier sa méthode, recommandable par la brièveté qu'elle apportait aux démonstrations, en comparant les résultats qu'elle donnait avec ceux que les Anciens avaient prouvés à leur manière, lui inspira le courage de s'aventurer pour ainsi dire dans un pays nouveau. Il fut attaqué sur ses principes, mais il se défendit, en montrant qu'ils pouvaient être traduits dans ceux d'Archimède. « Ces surfaces et ces lignes dont Cavalleri » examine les rapports, » dit Montucla, « ne sont autre chose que les » petits solides ou les triangles inscrits et circonscrits d'Archimède, » poussés à un si grand nombre, que leur différence avec la figure qu'ils » environnent, soit moindre que toute grandeur donnée; mais tandis » qu'Archimède, à chaque fois qu'il entreprend de démontrer les rap- » ports d'une figure curviligne avec une autre connue, emploie un long » circuit de paroles et un tour indirect de démonstrations; le Géomètre » s'élançant en quelque sorte dans l'infini, va saisir par l'esprit le dernier » terme de ces divisions et de ces soudivisions continuelles, qui doivent » enfin anéantir (**) la différence entre les figures rectilignes inscrites

(*) *Usi autem sunt eodem lemmate etiam Geometræ, qui antè nos floruerunt..... .... contigit autem, ut unicuique horum, quæ diximus, theorematum non minor quàm iis, quæ sine hoc lemmate demonstrata sunt, fides adhibita sit; pari fide nuper iis, quæ à nobis edita sunt conciliatâ.* (Archimed. oper. Oxoniæ, 1792, p. 18.)

(**) Ou plus exactement, *qui tendent à anéantir*......

» et circonscrites, et les figures curvilignes. Le mot d'*indivisible* est » impropre si l'on veut, mais il n'en résulte aucun danger pour la » Géométrie »; j'ajouterai, lorsqu'il est rappelé à sa juste valeur, et qu'on a fait voir qu'il ne doit être regardé que comme une expression abrégée.

Roberval courut en France la même carrière que Cavalleri s'était ouverte en Italie : en cherchant par la lecture des ouvrages d'Archimède, à se former une méthode pour résoudre les problèmes concernant les figures curvilignes, il trouva celle qu'il a laissée dans son Traité des indivisibles, et qui ne diffère de la méthode de Cavalleri, que dans les termes. Le desir de se ménager des triomphes sur ses rivaux, le porta à cacher ses découvertes, dont la publication du livre de Cavalleri vint lui ravir les avantages, et le punit justement d'avoir écouté le conseil d'un amour-propre mal-entendu.

Roberval trouva encore pour mener les tangentes aux courbes, une méthode fort ingénieuse à la vérité dans son principe; mais quoique plusieurs personnes aient voulu la mettre en parallèle avec celle de Descartes, elle lui est cependant inférieure de beaucoup; car dans le plus grand nombre de cas, elle ne fait que reculer la difficulté du problème. La méthode de Descartes au contraire offre pour toutes les courbes algébriques un procédé dont l'esprit est facile à saisir, et dont l'application conduit toujours au but desiré. Il me semble qu'elle ne fut point estimée tout ce qu'elle valait dans le temps où elle parut : sans doute les écrits des Anciens offrent des exemples de recherches qui demandent une bien plus grande force de tête, et qui par cette raison ont été plus admirées; mais ne devrait-on pas préférer à la difficulté vaincue, les méthodes fécondes qui diminuent le travail et rendent accessible à tous ce qui n'était que le partage d'un petit nombre d'esprits transcendans?

Les obligations que la Philosophie et les Mathématiques ont à Descartes, sont trop connues pour qu'on puisse rien ajouter à ce qui a été dit à cet égard; mais on a trop négligé peut-être de faire observer un point par lequel ce grand homme a un avantage marqué sur les Géomètres de son temps. Quelque soigneux qu'il fût de sa gloire, il paraissait encore plus fortement occupé de la propagation des sciences, et ce qui le prouve, c'est que ses ouvrages présentent toujours l'histoire de ses pensées, et mettent sur la voie ceux qui voudraient essayer de pousser plus loin les recherches qu'il a entamées. On peut dire qu'il était le seul qui écrivît alors avec cette netteté et cette simplicité que doit toujours avoir le style des ouvrages scientifiques. Il aurait pu cependant profiter des méthodes générales qu'il possédait, pour résoudre les problèmes les plus difficiles, et n'en publier que les résultats démontrés à la manière des Anciens; il ne s'en serait pas moins assuré un rang distingué parmi ceux qui cultivaient alors les Mathématiques; mais il aurait sûrement beaucoup moins de droits à la reconnaissance de la postérité.

Fermat était en possession avant Descartes, d'une méthode des tangentes; mais il ne la publia qu'après que Descartes eut fait connaître la sienne, et il y joignit une méthode *de Maximis et Minimis*. Ces méthodes sont plus simples que celles de Descartes; mais elles ne furent, pour ainsi dire, qu'indiquées par Fermat, qui, loin d'imiter la noble franchise de Descartes, ne laissa point appercevoir, du moins pour celle *de Maximis et Minimis*, quelle route avait pu l'y conduire, et de quelle manière on pouvait la démontrer. Descartes crut d'abord que ces deux méthodes étaient fausses : dans l'emploi qu'il avait voulu faire de celle des tangentes, il généralisait mal-à-propos les considérations particulières à l'exemple dont Fermat s'était servi, et il ne fut pas possible de le faire revenir sur cette règle, qu'il rectifia à sa manière. Il persista même à croire que ce n'était que d'après lui que Fermat en avait connu le défaut.

Par une foule de découvertes, dont plusieurs relatives aux nombres ont exercé les plus célèbres Analystes de ce siècle et du précédent, Fermat a donné les preuves d'un grand génie. On a dit qu'il eût remplacé Descartes, si Descartes n'eût point existé: oui, si on en juge par l'importance de ses travaux et par les difficultés qu'il a vaincues; mais je pense qu'il est permis de douter qu'il eût autant contribué à la propagation de la science, que le fit son rival par son caractère communicatif et la manière simple dont il présente le résultat de ses recherches.

Fermat avait sur Descartes, engagé continuellement dans une multitude de querelles que lui suscitait l'envie, et occupé d'une foule d'objets différens, l'avantage de pouvoir se livrer à l'étude de la Géométrie, sans autres distractions que celles que lui donnaient les devoirs de sa place. Cette continuité de méditations sur un seul objet, a dû nécessairement aider son génie à surmonter de plus grandes difficultés, et contribuer à la perfection des méthodes qu'il avait inventées; car on doit faire entrer la considération du temps dans l'évaluation du produit des puissances morales, comme dans celle des effets des forces physiques : Leibnitz et Newton nous offriront bientôt l'occasion de répéter cette remarque.

Huygens démontra le premier les deux règles de Fermat, Sluze en proposa ensuite une très-simple pour mener les tangentes, et qui n'est au fond que l'énoncé du calcul qu'exige celle de Fermat, dégagé de tout ce qu'il a d'inutile : enfin Barrow imagina son triangle caractéristique, qui est la même chose que le triangle différentiel, et atteignit ainsi le dernier degré de simplicité que pût recevoir la méthode des tangentes par rapport aux courbes algébriques.

Pour ne point interrompre l'histoire du problème des tangentes, j'ai laissé de côté les pas qui avaient été faits depuis Cavalleri, vers la solution générale de celui des quadratures. Grégoire de S. Vincent, Roberval et Pascal obtinrent dans cette matière des succès importans, dont l'énumération n'est point de mon sujet, parce qu'ils ne sont dûs qu'à l'application de la méthode des Anciens ou de celle des indivisibles : il faut pourtant en excepter la considération des polygones *à échelles*, de Grégoire de S. Vincent, ou de la suite des rectangles inscrits ou circonscrits à une même courbe, qui a pu donner l'idée de l'application du Calcul intégral aux quadratures.

C'est dans l'*Arihtmétique des infinis* de Wallis, qu'on voit les premières traces de l'application du calcul algébrique à la quadrature des espaces, application qui est fondée sur la méthode des indivisibles. Wallis considère les suites, et cherche à en exprimer la somme par leurs premiers et leurs derniers termes; il parvient ainsi à connaître cette somme, ou plutôt sa limite, dans le cas où le nombre des termes à sommer est infini, et où le dernier de ces termes ne l'est pas. Envisageant alors les surfaces comme formées de lignes dont les longueurs varient suivant une certaine loi, il trouve l'expression de ces surfaces, en sommant la suite des lignes dont elles sont composées. Cette méthode fait dépendre, par exemple, l'évaluation de l'aire du triangle de la sommation de la progression, par différences (ou arithmétique).

Wallis démontra par sa méthode la règle fondamentale de la quadrature des courbes dont l'ordonnée est proportionnelle à une puissance quelconque de l'abscisse; et il eut alors l'aire de toutes les courbes dans lesquelles l'ordonnée est exprimée par une suite de monômes. La méthode d'interpolation qu'il imagina encore pour quarrer certaines courbes dont l'équation se trouvait en quelque sorte comprise entre deux autres que sa première méthode pouvait atteindre, mérite surtout de fixer l'attention de ceux qui parcourrent ses ouvrages, parce qu'elle contient le germe des plus belles découvertes de Newton, et qu'elle forme encore aujourd'hui la partie la plus importante de la théorie des suites. Cette méthode conduisit Wallis à des expressions très-remarquables de l'aire du cercle.

Wallis doit être mis au rang des géomètres qui ont le plus influé sur les progrès de l'Analyse; indépendamment des découvertes qui lui sont propres, il a encore des droits sur la plus grande partie de celles que la considération des suites, dont il est l'inventeur, fit faire presqu'en même temps à la plupart des Géomètres de son temps.

Neil et Van-Heuraet donnèrent, dans l'une des paraboles cubiques, le premier exemple d'une courbe rectifiée; et le moyen dont Van-Heuraet fit usage, ramène le problème des rectifications à celui des quadratures. Brounker et Mercator poussèrent plus loin les découvertes de Wallis, et parvinrent aux premières suites connues pour la quadrature du cercle et de l'hyperbole : le premier découvrit, dans les fractions continues, une nouvelle espèce de suites infinies. Il faut remarquer que le principe fondamental de la rectification des courbes dont s'est servi Neil, et celui de la réduction des fractions composées en suites infinies, qui mit Mercator en possession de la quadrature de l'hyperbole, se trouvent dans les ouvrages de Wallis.

Tel était à peu près l'état connu de la science, lorsqu'en 1669 il s'établit entre Newton et Collins, par l'entremise de Barrow, un commerce de lettres. Ce dernier communiqua à Collins, au mois de juillet de cette année, l'écrit de Newton, qui a pour titre : *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas;* et Barrow trace lui-même, dans une de ses lettres, le caractère de la méthode de Newton, qu'il regarde comme une extension de celle de Mercator, extension qui est marquée au coin du génie, et ne laisse rien à desirer dans ce genre. Newton observe à la fin de l'écrit cité, mais sans en donner aucun exemple, qu'il est en état de mener des tangentes aux courbes mécaniques; et plus bas il ajoute : *Sed istà narrandi non est locus.*

Barrow, Collins et Oldembourg répandirent, par leur correspondance, les découvertes analytiques de Newton; ils en firent connaître l'objet à plusieurs Géomètres du continent, tels que Sluze et Borelli.

C'est en 1672 que Leibnitz paraît pour la première fois sur la scène. Il se trouvait alors à Londres, et communiqua à plusieurs membres de la Société royale, quelques recherches sur la théorie des différences des nombres, dans lesquelles on lui montra qu'il s'était rencontré avec Mouton, géomètre lyonnais : il quitta bientôt ce genre de travail pour s'instruire dans la doctrine des séries, qui fixait l'attention de tous les Géomètres. En 1674, il annonça à Oldembourg, avec qui il s'était lié pendant son voyage en Angleterre, qu'il possédait des théorèmes très-importans, relativement à la quadrature du cercle par les séries, et surtout qu'il avait des méthodes analytiques très-générales. Oldembourg répondit à ses lettres, qu'il croyait devoir le prévenir que Gregory et Newton avaient aussi trouvé des méthodes qui donnaient la quadrature des courbes, soit géométriques, soit mécaniques, et s'étendaient au cercle. Je passe sur toutes les lettres qui furent écrites relativement aux séries, parce qu'il n'y a aucun doute que les Géomètres anglais n'aient à cet égard l'avantage sur Leibnitz; mais il paraîtra à tous ceux qui auront quelque impartialité, que Leibnitz, prévenu par eux, ne leur doit que l'émulation qu'éveillent toujours dans les hommes de génie les travaux remarquables de leurs contemporains, et qu'il trouva de son côté, par des moyens qu'il s'était créés, les séries qu'on a tant revendiquées sur lui.

La première communication directe que Newton ait eue avec Leibnitz, se trouve dans la lettre qu'il adressa à Oldembourg, le 13 juin 1676. Les termes honorables dans lesquels il parle de Leibnitz au commencement de cette lettre, prouvent qu'il avait su l'apprécier. Newton, dans cet écrit, qu'il avait rédigé pour passer sous les yeux de Leibnitz, ne traite que des séries; et il en est de même de la réponse que Leibnitz fit à Newton par la voie d'Oldembourg.

J'arrive à la seconde lettre de Newton à Oldembourg : le commencement offre encore, de la part de Newton à Leibnitz, des témoignages de l'estime la plus vraie et la mieux méritée; on y trouve ensuite l'indication de la route qui conduisit Newton à son théorème pour l'élévation d'un binome à une puissance quelconque. C'est dans cette lettre qu'il décrit les propriétés de la méthode des fluxions, soit pour la recherche des tangentes, soit pour les quadratures; mais il la cache sous une anagramme de lettres transposées. Il faut bien observer, que tout le reste ne roule encore que sur les séries; que la description des avantages de la méthode de Newton n'offrait que l'énumération de ce que doivent naturellement desirer ceux, qui, connaissant les méthodes des tangentes et des quadratures publiées jusqu'alors, avaient remarqué les cas où elles devenaient insuffisantes, et qu'on ne pouvait tirer de là aucune notion positive.

Le 21 juin 1677, Leibnitz fit passer à Oldembourg, pour la communiquer à Newton, une lettre contenant les premiers essais d'une méthode qui s'étendait à tout ce que comprenait celle de Newton : c'était le Calcul différentiel. La mort d'Oldembourg, arrivée peu de temps après, mit fin à ce commerce épistolaire, et Leibnitz attendit jusqu'en 1684, pour faire jouir le public de sa découverte, qu'il inséra alors dans les Actes de Leipsig.

L'exposé fidèle que je viens de faire de la naissance du Calcul différentiel, d'après le *Commercium Epistolicum* imprimé par ordre de la Société royale de Londres, ne peut laisser aucun doute sur les droits incontestables de Leibnitz à la découverte de ce calcul; et comme il est le premier qui l'ait rendue publique, tandis que Newton, préférant son repos à sa gloire et à l'intérêt de ses contemporains, semblait avoir oublié sa Méthode, n'est-il pas aussi celui qu'on doit nommer le premier dans cette découverte?

Leibnitz recueillit sans contradiction jusqu'en 1699, les honneurs que méritait la beauté et la fécondité de son invention. Newton lui-même, en donnant dans son livre des *Principes*, qui parut en 1687, un essai de la méthode des fluxions, rendit à Leibnitz toute la justice qui lui était due. Les choses seraient restées dans cet état, sans une brusque incartade de Fatio de Duillier, qui le premier voulut jeter des doutes sur la propriété que Leibnitz avait au Calcul différentiel, et si les Journalistes de Leipsig eussent mis un peu plus de politesse dans l'extrait qu'ils firent d'un ouvrage de Newton; car il faut convenir qu'ils n'avaient dit que la vérité, et que si Keil, par un amour-propre national excessif, n'avait pas détourné le sens de leurs expressions, Newton n'aurait pu s'en plaindre. Mais le tort de ces Journalistes fut de n'avoir pas répété ce concert d'éloges, bien mérités, que les Anglais donnaient à leur illustre compatriote; et de là naquit une querelle qui fixa l'attention de l'Europe savante. Newton n'y prit d'abord par lui-même aucune part : Keil attaqua vivement Leibnitz, qui s'en plaignit à la Société royale de Londres avec beaucoup de modération; mais le premier porta hautement l'accusation de plagiat, et ses cris engagèrent la Société à nommer des commissaires pour examiner les papiers de Collins et d'Oldembourg, et reconnaître les indices que Leibnitz avait pu recevoir d'eux.

Les commissaires se contentèrent de prononcer sur la priorité que Newton avait dans la découverte de la Méthode des fluxions, qui est au fond la même que le Calcul différentiel. Mais s'ils ne déclarèrent pas Leibnitz plagiaire, comme le desirait Keil, celui-ci tâcha d'y suppléer lui-même, en accompagnant de notes et d'observations aussi partiales qu'injurieuses pour Leibnitz, le recueil des pièces qui avaient servi au jugement du procès, et que la Société fit imprimer sous le titre de *Commercium Epistolicum de analysi promotâ* (*).

(*) Il doit paraître étonnant de voir, dans la préface de la traduction française de la Méthode des fluxions, Buffon, qui n'était point encore connu, se rendre, on ne

Cette querelle, comme toutes les querelles littéraires, eut beaucoup moins pour objet l'intérêt de la vérité, que les passions et l'amour-propre de quelques hommes médiocres, dont l'existence aurait été absolument nulle, sans les dissentions qu'ils ont excitées; j'observerai cependant qu'il n'est pas vrai, comme l'a dit Fontenelle, que Newton ait gardé sur ce sujet une entière impassibilité : il descendit enfin dans l'arène; et les efforts que firent Chamberlayne et l'abbé de Conti pour réunir ces deux illustres rivaux, demeurèrent inutiles. Newton persista à refuser à Leibnitz, même après sa mort, la justice qu'il lui avait autrefois rendue; il affecta de confondre la Méthode de Leibnitz avec celle des tangentes donnée par Barrow, et se mit ainsi dans le cas de se voir appliquer ce dilemme qu'on proposait à Keil : « Ou la Méthode des fluxions, que vous dites être la même chose que » le Calcul différentiel, ne diffère point de celle de Barrow, ou cette der-» nière n'est pas le Calcul différentiel. » Enfin il fit supprimer, ou du moins laissa supprimer, dans la troisième édition de ses *Principes*, le Scholie qui contenait l'aveu des droits de Leibnitz. (Voyez la note de la page précéd.) (*)

---

sait pourquoi, l'écho de toutes les calomnies de Keil, et parler d'un homme tel que Leibnitz, avec une légéreté vraiment impardonnable. Pour donner un exemple de la mauvaise foi qui règne dans cet écrit, rempli d'ailleurs d'inexactitudes, je rapprocherai du texte du Scholie, placé par Newton dans la première édition de son livre des Principes, la traduction qu'en a donnée Buffon.

In litteris quæ mihi cum Geometrâ peritissimo G. G. Leibnitio annis ab hinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes, et similia peragendi, quæ in terminis surdis æquè ac in rationalibus procederet, et litteris transpositis hanc sententiam involventibus [Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versâ] *eamdem* CELAREM: *rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam* COMMUNICAVIT *à meâ vix abludentem præterquam in verborum et notarum formulis, et ideâ generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate*, Ph. nat. princ. mat. *Cantabrid.* 1713, vel *Amstel.* 1714, p. 226.

« J'ai autrefois COMMUNIQUÉ par lettres, au très-habile Géomètre M. Leibnitz, ma » Méthode; il m'a répondu qu'il avait une Méthode semblable, et qui ne diffère presque » point du tout de la mienne, etc. » *La Méthode des Fluxions*. Préface, page xxiv.

Cette traduction est en tout contraire au texte, qui dit formellement que Newton avait *caché* sa méthode et que Leibnitz *communiqua* la sienne.

(*) Suivant ce qu'a appris M. de Montucla (*Hist. des Math.* T. III, page 108), Newton supprima ce Scholie de sa main, sur les épreuves de la troisième édition de son livre, et joignit aussi de sa main des notes au *Commercium Epistolicum*.

Les circonstances donnèrent encore à Newton sur Leibnitz, plus d'avantage que Fermat n'en eut sur Descartes. Rien ne vint interrompre le fil de ses méditations, qu'il avait tournées vers la Géométrie dès sa plus grande jeunesse; le pays où il reçut le jour, était alors le berceau des plus brillantes découvertes; enfin il eut pour maître Barrow, qui s'était placé avec distinction parmi les inventeurs. Si de telles circonstances ne peuvent rien sans le génie, il faut du moins convenir qu'elles l'aident puissamment à se développer.

Le genre d'étude qu'avait d'abord embrassé Leibnitz, le peu de secours que l'Allemagne, sa patrie, pouvait lui offrir pour les Mathématiques, tout semblait l'éloigner de la culture d'une science à laquelle il doit maintenant la partie la plus solide de sa gloire; aussi n'est-ce qu'après son voyage en Angleterre, qu'on le voit sur la route des découvertes : c'est là qu'il apprit, par ce que les autres avaient fait, ce qui restait à faire. Lui-même raconte, dans plusieurs de ses lettres, avec autant d'ingénuité que de modestie, l'origine de ses progrès, les secours qu'il reçut d'Huygens; et cet illustre Géomètre, qui fut le véritable maître de Leibnitz, devint un de ses admirateurs.

Qu'on ne m'accuse point ici de vouloir régler les rangs parmi les hommes qui ont fait la gloire de leur siècle : Newton a laissé dans son ouvrage *des Principes*, un monument qui lui assure à jamais l'admiration de la postérité; mais l'éclat de ses titres commande la plus sévère équité envers son rival, qui, sans cesse emporté par une succession rapide d'objets divers, accablé d'une correspondance très-étendue, et n'ayant jamais eu le loisir d'exécuter un grand ouvrage, partagea néanmoins l'honneur d'une découverte qui a changé la face des Mathématiques, et sema dans un petit nombre de lettres et d'écrits, une foule de vues ingénieuses qui renfermaient le germe des plus belles théories.

La découverte du Calcul différentiel demeura quelque temps stérile; et Leibnitz, pour réveiller l'attention des Géomètres, leur proposa, en 1687, de déterminer la nature de la courbe que devrait parcourir un corps grave, pour descendre également en temps égaux. Huygens donna le premier la solution du problème, mais sans indiquer la méthode dont il avait fait usage; Jacques Bernoulli le résolut aussi par l'application du Calcul différentiel, et publia son analyse dans les Actes de Leipsig, en 1690.

Jean Bernoulli, frère puîné du précédent, et qui avait été son disciple, entra presqu'en même temps que lui dans la carrière, et lia avec Leibnitz, une correspondance qui dura jusqu'à la mort de ce dernier.

Il fit aussi connaître en France le Calcul différentiel, dont il donna des leçons au Marquis de l'Hôpital. Leibnitz et les Bernoulli résolurent un grand nombre de problèmes aussi neufs que difficiles, qu'ils proposèrent ensuite à tous les Géomètres ; ils reprirent aussi ceux de la chaînette et de la courbe de la plus vîte descente, qui avaient résisté à Galilée.

Jacques Bernoulli, sans cesse harcelé par son frère, dont il avait été jadis le maître, lui proposa, comme un défi, le problème des isopérimètres, problème d'un ordre supérieur à tous ceux dont on s'était occupé jusqu'alors. Il faut cependant convenir qu'avant lui, Newton en avait résolu un de ce genre, puisqu'il donna, dans son livre *des Principes*, publié en 1687, la construction du solide qui éprouve la moindre résistance d'un fluide dans lequel il se meut ; mais il a laissé ignorer la route qu'il avait suivie, et n'a montré nulle part qu'il eût une méthode générale pour résoudre ces sortes de problèmes, tandis que celle qu'inventa Jacques Bernoulli, offre un morceau d'Analyse précieux par son élégance, et beaucoup au-dessus de tout ce qui a été fait à cette époque.

Le Calcul différentiel recevait chaque jour de nouveaux accroissemens : on l'avait appliqué à la théorie des développées, l'une des découvertes les plus remarquables qui soient dues à Huygens ; mais il n'existait encore aucun ouvrage où l'on pût s'en instruire, lorsqu'en 1699, l'Hôpital, qui était du petit nombre des Géomètres qui avaient pris part aux progrès de ce calcul, donna son *Analyse des Infiniment Petits*. Ce livre a été long-temps le meilleur qu'on eût sur cette matière ; mais il laissait toujours à desirer un traité de Calcul intégral, dans lequel l'Hôpital ne voulut point s'engager, parce qu'il savait que Leibnitz préparait un grand ouvrage, qu'il devait publier sous le titre : *De Scientiâ infiniti*, et qu'il n'a point achevé. Le Calcul intégral présentait beaucoup plus de difficultés que le Calcul différentiel : la première méthode générale qu'on trouva dans ce calcul, fut celle de l'intégration des fractions rationnelles, que Jean Bernoulli donna en 1702 ; mais dès 1694 il avait indiqué le moyen d'intégrer les équations différentielles par la séparation des variables. En 1707, Gabriel Manfredi, géomètre italien, donna un traité entier sur les équations, dans lequel il se rencontra avec le géomètre de Bâle.

Il faut observer que pendant que le Calcul différentiel et le Calcul intégral faisaient de grands progrès entre les mains des Géomètres du continent, Newton semblait oublier ses découvertes : ce ne fut qu'en 1706 que parut son Traité de la quadrature des courbes ; et son Traité des fluxions ne vit le jour qu'en 1736, long-temps après sa mort.

Le génie mathématique se montra héréditaire dans la famille des Bernoulli; Nicolas et Daniel, fils de Jean, devinrent bientôt aussi habiles que leur père; ils eurent pour condisciples Hermann et Euler : ce dernier ne tarda point à faire prendre au Calcul intégral des accroissemens rapides. Par une telle succession de disciples célèbres, l'école de Leibnitz acquit la supériorité sur celle de Newton, dans laquelle on voit cependant Côtes, qui mourut fort jeune, reculer par la découverte de son théorème, les bornes de la méthode des quadratures; Moivre, que la France a droit de revendiquer, parvenir encore sur ce sujet à quelques résultats importans; Taylor, en développant la méthode des *Incrémens*, dont Newton avait jeté les bases dans celui de ses ouvrages qui a pour titre *Methodus differentialis*, donner, pour ainsi dire, par le théorème qui porte son nom, le complément du Calcul différentiel; enfin, Sterling enrichir considérablement la théorie des suites.

Les Géomètres du continent ne négligèrent point non plus l'emploi des Suites; mais ils n'allèrent pas jusqu'à en abuser, comme firent les Géomètres anglais du second ordre, qui les appliquèrent souvent à des problèmes dont on pouvait avoir la solution par des équations finies, ainsi que le leur fit voir Jean Bernoulli : il eut même à cet égard un reproche fondé à faire à Newton, qui parut méconnaître la vraie difficulté d'un problème proposé par Leibnitz aux Géomètres anglais, après qu'ils lui eurent contesté ses droits à la découverte du Calcul différentiel. Ce n'était point dans la recherche de l'équation différentielle de laquelle dépendait ce problème, mais dans son intégration générale, que consistait le mérite de la solution : Newton, possédant des méthodes pour résoudre par les séries, soit les équations algébriques, soit les équations contenant des fluxions, c'est-à-dire les équations différentielles, crut en avoir fait assez en indiquant la manière de trouver celle qui résultait du problème de Leibnitz; et c'est sur quoi Jean Bernoulli, profondément affecté de l'injustice des Anglais envers ce dernier, se récria beaucoup.

L'École de Newton proposa à son tour un problème à résoudre aux disciples de Leibnitz : le choix de la question donne lieu à des remarques qui semblent avoir échappé aux historiens des nouveaux calculs, et qui jettent cependant quelque lumière sur le point qu'ils ont eu à débattre. Quand on fait attention au soin que Newton avait mis dans la composition de son immortel ouvrage *des Principes*, pour le porter aussi en avant qu'il était possible de l'état de la science au moment où il l'écrivait, qu'il y a même inséré des résultats dont il n'a pas donné de démonstration, on doit être étonné de la manière incomplète dont il y traite le mouvement des projectiles dans les milieux résistant comme le quarré de la vitesse, cas le plus conforme à ce qui se passe dans la nature. Il n'ose attaquer la question directe; et pour la première fois, appelant à son secours l'analyse algébrique, il quitte la synthèse, qu'il regardait cependant comme la seule voie par laquelle il fût convenable de présenter une proposition nouvelle (*).

Lors donc qu'on voit Keil faire de cette question directe le sujet d'un défi qu'il porte aux Géomètres du continent, n'est-on pas en droit de conclure que non-seulement il la regardait comme un problème des plus difficiles, mais qu'en cela il était guidé par l'opinion qu'en avait conçue Newton lui-même : quelle apparence que le promoteur de la querelle qui divisait les deux Écoles, eût osé s'aventurer contre Bernoulli, sans prendre ses suretés ? Il est bien évident néanmoins que le problème n'est pas le plus difficile de ceux qui ont été proposés et résolus à la naissance du Calcul différentiel; mais pour le traiter avec succès, il fallait le ramener à une équation différentielle, car la méthode des séries n'y apporte pas la facilité qu'elle donne pour beaucoup d'autres, et c'est par cette raison que Newton n'en vint pas à bout. Quant à Keil, il ne pensait pas apparemment qu'une chose qui avait échappé à l'auteur du livre des *Principes*, fût possible; et il se trouva couvert de ridicule, lorsque J. Bernoulli le somma de justifier sa provocation, en produisant la solution du problème qu'il avait proposé.

On objecterait en vain que, sous le rapport de l'application à la pratique, la solution de Bernoulli est à peu près inutile; elle était trop remarquable du côté analytique et géométrique, pour que Newton eût négligé de s'en faire honneur, s'il avait pu y atteindre par sa méthode: son défaut de succès à cet égard et l'exposition de ses tentatives prouvent, ce me semble, que c'était uniquement par le développement en séries qu'il était arrivé aux nouveaux calculs, à peu près comme il l'indique lui-même dans la proposition X du livre II de ses *Principes*, et que cette voie ne lui donnait point un accès aussi facile à l'emploi des équations différentielles, que la considération immédiate des accroissemens en eux-mêmes, à laquelle s'était attaché Leibnitz. Ainsi, plus on rapproche toutes les circonstances des premiers progrès du Calcul différentiel, et plus elles me paraissent montrer jusqu'à l'évidence, que Leibnitz n'a pas, moins que Newton, travaillé sur ses propres idées.

(*) *Ut..... Theorema fiat concinnum et elegans*, ac lumen publicum sustinere valeat. Voy. *Isaaci Newtoni Opuscula. Lausanæ et Genevæ.* 1744, T. I, page 170.

Il envisagea les grandeurs comme variant par des différences successives ou par sauts, ce qui le conduisit à substituer des polygones aux courbes, et dès-lors toutes les questions qu'on pouvait se proposer sur elles, furent ramenées au calcul des triangles rectilignes; mais pour faire coïncider ensemble le polygone et la courbe, il supposa les différences infiniment petites. En vain quelques Géomètres médiocres de ce temps, pour se consoler de l'impuissance où ils étaient d'entendre et d'appliquer les nouveaux calculs, déclamaient sans cesse contre leur principe; la conformité des résultats avec ceux qui étaient connus antérieurement, et les démonstrations synthétiques qu'on pouvait donner des nouveaux, faisaient retomber sur les adversaires du Calcul différentiel, les coups qu'ils voulaient lui porter.

Leibnitz crut sans doute que ceux qui seraient en état de faire usage du Calcul différentiel, en saisiraient facilement l'esprit, en le rapprochant de la méthode des Anciens; car il négligea d'entrer dans aucun détail à cet égard, et son silence fut imité par les Bernoulli et par l'Hôpital; mais quand il fut attaqué sur ce sujet, il prouva par ses réponses, qu'il y avait mûrement réfléchi. Dans toutes les occasions, il compare sa méthode avec celle d'Archimède, et fait voir qu'elle n'en est en quelque sorte qu'un abrégé, plus approprié aux recherches, mais qu'au fond elle revient au même; car au lieu de supposer les différentielles infiniment petites dans le fait, il suffit seulement de concevoir qu'on puisse toujours les prendre assez petites, pour que l'erreur qui résultera des omissions faites dans le calcul, soit moindre qu'une grandeur donnée; et pour aider l'imagination de ses lecteurs, il apporte quelques exemples sensibles (*). Cette manière de raisonner, à laquelle il semble qu'on n'ait rien à reprocher, a été regardée de la part de Leibnitz, comme un aveu de l'insuffisance de ses principes, par Fontenelle, qui voyait s'écrouler ainsi tout l'édifice qu'il avait bâti sur les infinis. Les plaintes qu'il en porte dans la préface de sa Géométrie, et qui ont été répétées dans plusieurs ouvrages, offrent un exemple de la facilité avec laquelle les erreurs passent de livre en livre, et montrent combien peu de gens prennent soin de se former une opinion indépendante de celle des autres.

Newton supposa les lignes engendrées par le mouvement d'un point, et les surfaces par celui d'une ligne; et il appela fluxions les vitesses qui réglaient ces mouvemens. Ces notions, quoique très-rigoureuses, sont

(*) Voyez la note de la page 486 de ce volume et le tome III des OEuvres de Leibnitz, pages 369, 370 et 500.

étrangères à la Géométrie, et leur application peut être difficile. Il est bien vrai qu'en imaginant un point qui se meuve sur une ligne, pendant qu'elle est emportée parallèlement à elle-même, avec une vîtesse uniforme, on peut représenter une courbe quelconque; mais la vîtesse du point décrivant étant variable à chaque instant, on ne peut la déterminer qu'en recourant soit à la méthode des Anciens ou d'exhaustion, soit à celle des premières et dernières raisons, et c'est presque toujours de celle-ci que Newton s'est servi; ensorte que les fluxions n'étaient, à proprement parler pour lui, qu'un moyen de donner un objet sensible aux quantités sur lesquelles il opérait. Il entendait par la *méthode des premières et dernières raisons*, la recherche du rapport qu'ont entre elles, au premier ou au dernier instant de leur existence, des quantités qui naissent ou qui s'évanouissent ensemble, ou plutôt, comme il le dit aussi, celle de la limite dont ce rapport approche sans cesse; et il trouvait dans la première raison des espaces parcourus par l'ordonnée sur la ligne des abscisses et par le point décrivant sur l'ordonnée, espaces qu'il nommait *momens*, le rapport de la fluxion de l'abscisse à celle de l'ordonnée, d'où il tirait la direction de la tangente. Le calcul n'était que celui dont Barrow faisait usage pour sa méthode des tangentes, mais que Newton, par le moyen de sa formule du binome et de la réduction en séries, avait étendu aux expressions irrationnelles. Il me semble donc que l'avantage de la Méthode des fluxions sur le Calcul différentiel, du côté de la Métaphysique, ne consiste qu'en ce que les fluxions étant des quantités finies, leurs momens ne sont que des infiniment petits du premier ordre, et leurs fluxions sont encore finies : par ce moyen on évite les infiniment petits des ordres supérieurs.

D'Alembert et Euler ont cherché à donner au Calcul différentiel, une base qui leur parut plus solide que la subordination des infiniment petits; le premier se servit de la méthode des limites, et le second considéra les infiniment petits comme des zéros absolus, mais qui conservaient un rapport dérivé de celui qu'avaient entre elles les quantités évanouies qu'ils remplaçaient. On se demandera sans doute, ce qu'on peut entendre par le rapport des quantités qui ont cessé d'exister, et cette objection qu'on fait contre la Métaphysique d'Euler, s'applique également à celle de la Méthode des premières et dernières raisons; car il n'y a point de milieu entre être et ne pas être, et du moment où les accroissemens sont quelque chose, leur rapport n'est ni celui des fluxions, ni celui des limites. M. Carnot, dans ses *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal* (ou *différentiel*), où il discute avec beaucoup de soin les principes de ce calcul, observe que c'est en vertu de la loi de continuité, que les quantités évanouissantes gardent encore le rapport dont elles se sont approchées par degrés, avant de s'évanouir.

Cet écrit prouve que si on avait créé des mots lorsqu'il en était besoin, on aurait eu des idées plus claires. En appelant *équations imparfaites*, les équations différentielles, M. Carnot jette un grand jour sur leur théorie. En effet, lorsque l'on considère les différentielles qu'elles contiennent, comme représentant les accroissemens des variables, elles n'ont lieu que d'une manière approchée; mais leur degré d'exactitude est en quelque sorte indéfini, car il dépend de la petitesse qu'on suppose aux changemens des variables; et puisque rien ne limite cette petitesse, les équations différentielles peuvent donc être aussi près de la vérité qu'on le voudra : voilà les idées de Leibnitz traduites en Analyse. M. Carnot fait voir ensuite, comment les équations imparfaites deviennent rigoureuses à la fin du calcul, et à quel signe on reconnaît leur légitimité; ce signe est la disparition totale des quantités différentielles, dont pouvait provenir l'erreur, s'il y en avait. On ne doit pas juger le travail de M. Carnot, par le peu que j'en ai dit; et ce n'est pas seulement dans la manière d'envisager le Calcul différentiel qui lui est propre, que consiste le mérite de son Mémoire, mais encore dans la comparaison qu'il fait des divers points de vue sous lesquels on a présenté ce calcul.

Je ne dois pas oublier de rapporter ici que dès 1758, Landen proposa, pour se passer de la considération de l'infini et de celle du mouvement ou des fluxions, une Méthode qui revient au fond à celle des limites; mais le calcul s'appuie sur un théorème algébrique qui lui donne une forme particulière. La franchise avec laquelle Landen se dépouille des préjugés nationaux, imprime un caractère remarquable à son ouvrage; car il est peut-être le seul des Géomètres anglais qui soit convenu des inconvéniens de la Méthode des fluxions.

C'est l'application du Calcul différentiel à la Géométrie, qui lui a donné un caractère différent de celui de l'Algèbre ordinaire; car M. Lagrange a fait voir, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1772, qu'il pouvait être traité analytiquement, d'une manière indépendante des considérations de l'infini. L'expression des changemens qui arrivent dans une fonction, lorsqu'on augmente ou qu'on diminue une ou plusieurs des quantités dont elle dépend, peut toujours être réduite en série ordonnée suivant les puissances des différences de ces quantités; les coefficiens qui sont indépendans de ces différences, présentent de nouvelles fonctions dérivées de la proposée, d'après une loi régulière.

C'est dans la recherche de ces coefficiens et dans celle de leurs propriétés que consiste le Calcul différentiel : les fonctions d'une seule variable ne donnent qu'un coefficient dans chaque ordre; les fonctions de deux ou plusieurs variables, ayant une différence qu'on peut ordonner comme un polynome, suivant les produits homogènes des accroissemens, ont plusieurs coefficiens pour un même ordre. On peut chercher, ou chaque coefficient en particulier, ou les relations qu'ils ont entre eux, et avec la fonction dont ils dérivent : voilà le Calcul différentiel. Il sera aux différentielles ordinaires, s'il ne s'agit que d'une fonction d'une seule variable, et aux différentielles partielles, s'il est question d'une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

Le Calcul intégral a pour objet de remonter des coefficiens aux fonctions, c'est-à-dire de résoudre les questions inverses.

Il est étonnant que cette manière si simple de donner une origine analytique au Calcul différentiel, ait été si long-temps à trouver; il semble qu'elle aurait dû se présenter à Euler, qui le premier sépara ce Calcul de son application aux courbes, et qui, en exprimant par des lettres les rapports des différentielles, avait délivré des quantités infiniment petites, les équations qui en contenaient.

Newton même était déjà sur la voie de cette manière d'envisager le Calcul différentiel; car il a aussi considéré les ordonnées successives d'une même courbe, développées en séries, suivant les puissances des accroissemens de l'abscisse, et il a indiqué les principales propriétés de ces coefficiens relativement à l'application géométrique : il lui manquait seulement une manière de les dériver les uns des autres; et il paraît que c'est Taylor qui montra le premier leur formation successive par les fluxions, formation qui n'est autre chose que son Théorème.

Frappé des difficultés que présentait l'étude de l'Analyse et de la Géométrie transcendante, par l'intervalle qui séparait les ouvrages élémentaires les plus étendus, des Mémoires où se trouvaient consignées les nouvelles découvertes, et ayant senti combien la nécessité de recourir à des livres peu répandus ou à des collections académiques dont on est privé dès qu'on n'habite pas la Capitale, pouvait arrêter les jeunes gens, dès 1787, je rassemblais des matériaux pour former un Traité complet de Calcul différentiel et de Calcul intégral; et à la première lecture que je fis alors du Mémoire de M. Lagrange, je me proposai de prendre pour base de ce Traité, les idées lumineuses qu'il avait substituées à celles des infiniment petits. Je communiquai à quelques personnes les premières ébauches de mon travail; j'en écrivis à plusieurs Géomètres célèbres, pour qu'ils voulussent bien m'indiquer les sources où je pourrais puiser, et m'aider de leurs conseils; voici ce que M. Laplace me répondit en janvier 1792 : « Je vois avec beaucoup de » plaisir que vous travaillez à un grand ouvrage sur le Calcul intégral.... » Le rapprochement des Méthodes que vous comptez faire, sert à les » éclairer mutuellement, et ce qu'elles ont de commun renferme le plus » souvent leur vraie métaphysique; voilà pourquoi cette métaphysique » est presque toujours la dernière chose que l'on découvre. L'homme de » génie arrive comme par instinct aux résultats; ce n'est qu'en réflé- » chissant sur la route que lui et d'autres ont suivie, qu'il parvient à » généraliser les Méthodes, et à en découvrir la métaphysique. »

J'ai rapporté ce passage, plus encore pour les réflexions qu'il contient, que pour indiquer l'époque à laquelle j'avais déjà conçu le plan que j'ai suivi dans la première édition de mon Ouvrage, dont l'impression fut commencée en frimaire an 4 (novembre 1795), et suspendue par des raisons particulières, pendant quelques mois. Depuis cette époque, M. Lagrange est revenu sur ses premières idées, à l'occasion d'un Cours qu'il a fait à l'École Polytechnique, et j'ai suivi ses leçons avec tout l'intérêt qu'elles devaient inspirer; mais l'état où était mon ouvrage et la marche de l'impression ne m'ont permis alors de profiter que d'un petit nombre de ses remarques que j'ai eu soin de rapporter à leur Auteur.

Afin de rendre mon Ouvrage accessible à un plus grand nombre de lecteurs, je crus devoir préparer l'exposition des principes du Calcul différentiel par une Introduction, dans laquelle je m'occupai du développement des fonctions soit algébriques, soit logarithmiques ou circulaires; après avoir réduit les idées d'infini et d'infiniment petit à ce qu'elles ont de réel, c'est-à-dire à l'exclusion de toute limite, soit en grandeur, soit en petitesse, ce qui n'offre qu'une suite de négations, et ne saurait jamais constituer une notion positive (*). La méthode dont j'ai fait usage pour le développement des fonctions, ne s'appuie sur aucune

(*) Assez souvent on a substitué le mot *indéfini* au mot *infini*, croyant par là éluder les difficultés que faisait naître ce dernier; mais je ne vois en cela qu'une faute d'expression; car l'*indéfini* peut avoir des limites, mais on en fait abstraction pour le moment, tandis que l'infini est nécessairement ce dont on affirme que les limites ne peuvent être atteintes par quelque grandeur concevable que ce soit.

considération de ce genre; aucun terme n'y est négligé; toutes les équations de condition y sont vérifiées en quelque nombre qu'elles soient, par un calcul fondé sur les indices des quantités à déterminer, et très-propre, je crois, à faire sentir les avantages de la symétrie dans les calculs, et la puissance d'une notation quand elle est analogue aux idées qu'elle représente.

Les Élémens d'Algèbre laissaient à desirer beaucoup de choses sur la théorie des équations, lorsque la première édition de mon Ouvrage parut, et ne me proposant pas alors d'en rédiger de nouveaux, je dus faire entrer ces théories dans mon plan; mais craignant que l'étendue de l'Introduction, devenue par là très-considérable, ne parût retarder trop long-temps l'entrée dans le Calcul différentiel, sujet principal du Traité, je pris le parti d'insérer, dans le corps même de ce Traité, un chapitre contenant une *digression sur les équations*. Depuis, ayant publié mes *Élémens d'Algèbre* et leur *Complément*, et les matières qu'ils contiennent faisant partie de l'enseignement ordinaire, j'ai supprimé ce chapitre qui, à tous égards, nuisait à l'ordre; mais la résolution des équations à deux termes par les formules trigonométriques, la réduction des imaginaires à la forme $A+B\sqrt{-1}$, au moyen de ces formules, les considérations sur les logarithmes et les sinus imaginaires, ont passé dans l'Introduction, avec plusieurs articles nouveaux qui font de cette Introduction, si je ne me trompe, un Traité assez complet, de l'analyse intermédiaire entre les Élémens d'Algèbre proprement dits, et le Calcul différentiel.

Le premier chapitre est, dans cette édition comme dans la précédente, consacré à l'exposition des principes du Calcul différentiel. A l'exemple d'Euler, je donne d'un seul jet l'exposition purement analytique et complète des principes de ce Calcul, dans toute l'étendue qu'il doit avoir pour correspondre aux diverses branches du Calcul intégral. Dans un livre élémentaire, cette marche retarderait trop les applications, si nécessaires pour soutenir le courage d'un lecteur qui s'engage pour la première fois dans une carrière dont il n'apperçoit pas le but; mais un Traité aussi volumineux que celui-ci, ne peut guère être consulté que par des personnes auxquelles le sujet n'est pas tout-à-fait étranger, ou qui ont un goût décidé pour ce genre d'étude; et de tels lecteurs cherchent principalement à classer les matériaux de la science, pour en mieux saisir l'ensemble et la liaison, afin de se les rappeler plus aisément lorsqu'ils pourront en avoir besoin.

Aussi ai-je rassemblé dans ce même chapitre tout ce qui concerne la différentiation des fonctions d'une ou de plusieurs variables; celle d'un nombre quelconque d'équations, la notion des différentielles partielles et le changement de variables indépendantes, qui revient, dans les idées de Leibnitz, à rendre variable une différentielle que l'on regardait comme constante, *et vice versâ*. Cette manière d'envisager la transformation dont il s'agit, ne pouvait plus convenir lorsqu'on cessait de regarder les différentielles comme des différences; les considérations qui la remplacent se trouvaient déjà dans la première édition de mon Ouvrage, où les amenait nécessairement le plan que j'avais adopté. Quand ce plan fut mis en œuvre par son auteur, M. Lagrange, les mêmes idées dûrent se présenter à lui; et il y a en effet un passage analogue dans la *Théorie des Fonctions analytiques*; mais redevable d'ailleurs de tant de choses à cet illustre Géomètre, je ne le suis pas de celle-là, voilà pourquoi l'on ne trouve aucune citation dans cet endroit de mon Ouvrage. Je l'ai développé, et j'ai tâché de l'étendre et de l'éclaircir, comme beaucoup d'autres, dans l'édition actuelle; cela m'a été d'autant plus aisé, que par ses derniers écrits, M. Lagrange a non-seulement beaucoup enrichi la théorie du développement des fonctions, considérée comme base du Calcul différentiel, mais qu'il l'a rendue presque populaire, et a fixé sur elle l'attention de la plupart des Géomètres. J'ai pu aussi mettre à profit une démonstration du théorème de Taylor, due à M. Poisson, d'après laquelle on découvre la loi des exposans des termes de la série; mais malgré cette facilité, je n'ai pas cru devoir entrer en matière par l'énoncé de ce théorème; car quelqu'ingénieuses que soient les diverses démonstrations qu'on en a données jusqu'ici, toutes laissent entrevoir plus ou moins, qu'il est sujet à exception, et répandent de l'obscurité sur les premières notions, toujours un peu abstraites lors même qu'elles sont le mieux circonscrites. Ces propositions, si générales en apparence, ont plus d'éclat que d'utilité, puisqu'elles ne dispensent pas de l'examen des cas où elles sont en défaut; il vaut mieux ne montrer ces cas que successivement, à mesure qu'ils se présentent d'eux-mêmes, que de les faire prévoir d'avance et comme des accessoires, au moment où le lecteur n'embrasse qu'avec peine le petit nombre d'idées principales que vous lui présentez. Une semblable marche rend l'esprit difficultueux, et jette sur les fondemens de la théorie, des nuages qui ne se seraient pas formés, si l'on avait conservé la trace de l'induction par laquelle on est arrivé à l'énoncé général.

Voilà pourquoi j'ai continué à établir, par une énumération de cas particuliers, la forme générale du développement du second état que prend une fonction dont la variable a reçu un accroissement : c'est ainsi qu'Euler y est parvenu ; et par là j'ai pu exposer le mécanisme de la différentiation, avant de m'engager dans aucune discussion abstraite. La notation se trouvant alors bien connue, je m'en suis servi pour abréger la démonstration générale du théorème de Taylor. Dans cette démonstration, il se présente plus d'équations qu'il n'en faut pour déterminer les coefficiens de la série ; je n'ai cependant pas supprimé la vérification de ces équations surabondantes, que j'avais insérée dans ma première édition, quoique cette vérification devînt moins nécessaire lorsque la forme de la série était légitimée *à priori* ; mais n'exigeant presque point de calcul, elle conserve l'analogie entre la formule de Taylor et les développemens obtenus dans l'Introduction, et ne laisse rien à desirer sur une proposition qui est la base du Calcul différentiel.

Je n'ai pas cru non plus devoir terminer ce chapitre, sans donner une idée des diverses manières dont on a proposé d'amener le Calcul différentiel et de le lier à l'Algèbre. Dans la première édition, je m'étais borné à faire sortir des principes que j'avais suivis, les suppositions établies par Leibnitz, auxquelles il est si commode de revenir dans le plus grand nombre de recherches : ici, j'en ai fait le rapprochement avec la méthode de Landen dont j'ai parlé plus haut, et qui se lie bien avec la considération des limites. J'ai indiqué deux nouvelles théories qui ont été proposées depuis la première impression de mon Ouvrage ; mais sans m'établir juge de ces théories, j'ai insisté sur l'embarras que les nouvelles notations dont elles sont accompagnées, ne sauraient manquer de jeter dans l'analyse, et qu'il me semble d'autant plus à propos d'éviter, que la notion des différences ou des accroissemens que prennent les fonctions, se prête à tous les points de vue ; qu'elle repose sur les idées les plus simples, les plus naturelles, et qu'elle conduit à une notation qui demeure toujours juste et expressive, quand même on rejetterait les idées de l'infini dont elle est absolument indépendante : c'est du moins ce que je crois avoir prouvé dans l'endroit que je cite.

Je ne dois pas omettre de dire ici, comme un point d'histoire assez important, que l'idée de démontrer en toute rigueur, par la seule analyse, les principes et les méthodes du Calcul différentiel, a été mise d'abord a exécution par Condorcet, dans un ouvrage dont l'impression, commencée en 1786, a été interrompue par la révolution. Les vingt-quatre premières feuilles, qui sont entre les mains de plusieurs personnes, donnent une idée suffisante du plan de l'Auteur, puisqu'elles contiennent toute l'exposition des principes du Calcul différentiel. Cette exposition paraît d'abord un peu compliquée, par l'usage que l'Auteur y fait de la caractéristique affectée aux différences (finies), et par les détails où il entre sur la manière d'ordonner les développemens des différences des fonctions, suivant les accroissemens des variables, qu'il suppose successifs et inégaux. C'est en montrant que le premier terme, ou le premier rang de ce développement, selon qu'il s'agit des fonctions d'une ou de plusieurs variables, sert à former les termes ou les rangs suivans, que Condorcet parvient au Calcul différentiel. Il fait dériver les équations différentielles, des équations qui ont lieu entre les accroissemens complets, en prouvant que le développement de celles-ci se vérifie terme par terme ou rang par rang, quelle que soit la valeur de l'accroissement de la variable indépendante, qui doit rester indéterminé. Il déduit de ces considérations très-ingénieuses, les théorèmes sur l'analogie des puissances avec les différences, simplement énoncés par M. Lagrange, et qui n'avaient encore été démontrées que par M. Laplace, mais en suivant une voie très-différente. Enfin, pour obtenir les différentielles des fonctions logarithmiques et circulaires, il forme le développement de ces fonctions par des procédés dégagés des considérations de l'infini, procédés fort répandus aujourd'hui, mais dont on n'avait alors aucun exemple (*).

(*) On reprochait avec assez de raison à Condorcet, de ne s'être livré qu'à des apperçus dans son premier Traité de Calcul intégral, imprimé en 1765; et c'est en grande partie pour cesser de mériter ce reproche, qu'il a composé l'ouvrage dont j'ai parlé ci-dessus. On dit que le manuscrit a été quelque temps égaré, mais qu'ensuite il a été retrouvé, et imprimé en entier aux frais d'un libraire de Hambourg, qui l'ensevelit depuis plus de six ans dans son magasin, avec une édition complète des œuvres du même auteur. Pourquoi ne le met-on pas au jour? c'est ce que j'ignore; car la publication de ce traité n'importait pas moins à la mémoire de Condorcet qu'à l'avancement de la science. Pour apprécier avec équité ses travaux connus dans ce genre, il faut plutôt y voir ce qu'il était capable de faire, que ce qu'il a fait. A l'époque où ils ont paru, ses premiers essais annonçaient un Géomètre très-distingué, dont la science devait attendre beaucoup de progrès; et quoiqu'entraîné par le talent qu'il avait pour écrire sur les matières philosophiques, ou plutôt par sa philantropie qui lui montrait dans la propagation générale des lumières, un moyen bien plus efficace de concourir à l'avancement de l'esprit humain que le succès de quelques recherches abstraites; cependant, à diverses reprises il s'est occupé des points les plus épineux de l'Analyse transcendante. S'il ne donna guère que des vues sur ces matières, ces vues sont souvent profondes : sans doute en les faisant passer au creuset de l'application, il aurait pu les étendre encore, les perfectionner, les rectifier quelquefois; mais, tels qu'ils sont, les Mémoires de Condorcet le montrent toujours à la hauteur des découvertes les plus récentes, des théories les plus diffi-

L'attention particulière que l'on a donnée depuis quelque temps aux principes sur lesquels doivent reposer le Calcul différentiel et le Calcul intégral, a, comme je viens de le dire, introduit un assez grand nombre de considérations nouvelles; et l'on peut maintenant demander laquelle de ces considérations doit être préférée aux autres dans l'enseignement. La réponse à cette question n'est pas sans difficulté dans l'état actuel de la science, puisqu'une route dont on ne fait qu'appercevoir l'entrée, peut conduire à des découvertes importantes, et que chacun des points de vue sous lequel on a envisagé le passage de l'Algèbre au Calcul différentiel, donne à ce calcul des formes qui, pour le moins, offrent des facilités particulières dans la solution de certains problèmes; cependant lorsqu'on veut concilier la rapidité de l'exposition avec l'exactitude dans le langage, la clarté dans les principes, et marcher dans une direction telle, que l'on puisse les rapprocher sans peine, soit de la métaphysique de Leibnitz, soit de la théorie du développement des fonctions proposée par M. Lagrange, je pense qu'il convient d'employer la méthode des limites. Cette opinion est appuyée sur les réflexions suivantes que j'ai déjà consignées dans plusieurs ouvrages.

---

ciles. Parvenir à ce point, et s'y maintenir, en suivant la carrière à laquelle il paraissait s'être entièrement voué, c'est montrer à-la-fois une grande facilité et une grande pénétration. L'emploi qu'il fit de ces heureuses qualités pour réunir la culture des sciences à celle des lettres, et répandre sur les unes le charme des autres, justifie bien la considération et le crédit qu'il s'était acquis; et cependant avec quelle facilité il savait oublier tous ses avantages et descendre aux ménagemens les plus délicats, vis-à-vis de ceux mêmes qui ne faisaient qu'entrer dans la carrière où il était aux premiers rangs; il ne cherchait point à faire prévaloir ses opinions auprès des personnes que la supériorité de ses talens et l'influence que son estime pouvait avoir sur leur sort, rendaient ses inférieurs ou ses obligés. En accueillant les jeunes gens, il ne les protégeait pas, il les servait avec zèle; et par un ton simple et modeste, par une civilité vraiment affectueuse, par l'agrément et l'instruction qu'il répandait dans son commerce familier, il leur inspirait à-la-fois une reconnaissance aussi douce que profonde, et un attachement aussi durable que respectueux. Ses derniers momens, employés à tracer l'*Esquisse des progrès de l'esprit humain*, prouvent l'inaltérable fermeté avec laquelle il avait embrassé ses principes, et que sa conviction ne tenait pas à des intérêts du jour. S'il eût pu échapper autrement que par une mort volontaire, à la proscription dans laquelle il était enveloppé, il n'est pas douteux qu'il n'eût rassemblé et mûri ses travaux sur le calcul des probabilités, qu'il n'a cessé de rappeler aux déterminations qui intéressent le plus l'ordre social; et il en aurait déduit de très-beaux résultats. Les questions qu'il a agitées sur ce sujet marquent toutes par leur nouveauté, par leur importance; et le plan qu'il a donné d'un *Traité de Mathématique sociale* (*Voy.* le *Journal de l'Instruction sociale*, n° IV, ou les *Œuvres de Condorcet*, T. XXI), offre un cadre qu'il serait bien utile de remplir.

La propriété commune à toutes les fonctions, d'admettre une limite, dans le rapport de leurs accroissemens à ceux de la variable dont elles dépendent, limite différente pour chaque fonction, mais constamment la même pour une même fonction et toujours indépendante des valeurs absolues des accroissemens, est un *fait analytique* bien constaté. On le retrouve sous quelque point de vue que l'on envisage les variations d'une fonction, et la science du Calcul n'en offre pas qui soit plus remarquable en lui-même, puisque cette limite caractérise d'une manière qui lui est propre, la *marche* de la fonction dans les divers états par lesquels elle peut passer; car plus les accroissemens de la variable indépendante sont petits, ou plus les valeurs successives de la fonction sont resserrées, plus enfin cette fonction approche d'être soumise à la loi de continuité dans ses changemens, plus leur rapport à ceux de la variable indépendante, approche d'être égal à la limite assignée par le calcul. Le passage à cette limite est ici l'expression même de la loi de continuité, c'est-à-dire de la loi qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après laquelle les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle. En effet, la manière d'envisager les grandeurs dans le calcul, n'admet pas immédiatement cette loi; car dès que l'on considère deux valeurs distinctes de la même quantité, il y a nécessairement un intervalle entre elles; mais plus il est petit, plus on se rapproche de la loi dont il s'agit, à laquelle la limite seule convient parfaitement. La Géométrie confirme ces conceptions, puisque toute fonction peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe dont cette variable est l'abscisse, et que l'on ne saurait appliquer le calcul à la marche de cette courbe, par quelque théorie que ce soit, sans y considérer au moins deux points distincts. Il faut ensuite que les résultats qu'on en tire puissent être vrais, quelque rapprochés que soient ces points, ou d'autant plus vrais, qu'ils seront plus près de coïncider. N'est-ce pas toujours en revenir, pour le fonds, à la coïncidence des points, qui, par le fait analytique déjà cité, n'anéantit pas les rapports que l'on considère? Si l'on assignait un terme quelconque au rapprochement de ces points, on n'aurait que des polygones, et non pas des courbes. Quand, par exemple, deux points étant pris sur une courbe, on conçoit que l'un de ces points s'approche sans cesse de l'autre qui demeure fixe, peut-on nier que la *sousécante* s'approche continuellement de la *soutangente*, et de telle manière, que la différence entre ces deux grandeurs peut être rendue aussi petite que l'on veut? La seconde, qui ne varie pas avec la distance supposée entre les points, est évidemment la *limite* de la première, si toutefois l'on n'insère pas dans la définition de ce mot, une condition inutile (*Voy.* les nos 10 et 11 de l'*Introduction*).

La difficulté que présentent les *mouvemens variés*, est la même que celle qui a lieu à l'égard des courbes; car, excepté pour le mouvement uniforme, qui est dans cette partie des mathématiques, ce que la ligne droite est dans la Géométrie, on ne peut pas plus introduire dans le calcul la continuité des changemens de vîtesses que celle des lignes. Il faut toujours partager ces mouvemens en plusieurs temps, et descendre soit par voie d'exclusion, soit autrement, à des portions de plus en plus petites; ensorte que c'est toujours dans un dernier terme purement intellectuel, que résident les déterminations caractéristiques des grandeurs cherchées.

Comme toutes les autres, la méthode des limites aurait aussi ses longueurs, si l'on s'attachait plus aux détails qu'à l'esprit de la chose; et beaucoup d'auteurs ne s'en sont servis que pour arriver à quelques résultats simples et marquans, dont la conformité avec ceux que donne le Calcul différentiel, pût justifier *à posteriori*, les procédés de celui-ci, tandis qu'il aurait fallu conclure immédiatement ses principes de ceux mêmes de la méthode des limites : c'est ce que j'ai tâché de faire, en conciliant la brièveté avec l'exactitude, dans mon *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. J'ai supprimé ici des détails qui appartiennent exclusivement au plan de cet Ouvrage, je n'ai conservé que ce qui était nécessaire pour ramener à leur véritable sens les expressions où l'on suppose les grandeurs infinies ou infiniment petites, montrer ce qu'on doit entendre par les divers ordres de ces quantités, et comment ils ont en effet la subordination qu'on leur suppose. Cette subordination, dont la connaissance est on ne peut pas plus utile dans les applications géométriques, se manifeste alors avec la plus grande netteté, et indépendamment de toute construction, par l'emploi du théorème de Taylor, comme on le verra dans l'ouvrage que je viens de citer, et dans celui-ci : néanmoins ce théorème, regardé avec raison par Condorcet, comme la base naturelle du Calcul différentiel, était demeuré long-temps oublié dans l'ouvrage de son auteur. Euler l'avait employé dans ses *Institutions de Calcul différentiel;* mais ce n'est que de nos jours qu'il est passé dans l'enseignement élémentaire, et son introduction, qui est également le résultat de toutes les méthodes nouvelles, doit être regardée comme formant époque dans les progrès de l'analyse.

L'application analytique la plus féconde et la plus importante du Calcul différentiel, est le développement des fonctions; j'en ai fait le sujet du second chapitre de mon Ouvrage. Elle se lie immédiatement au théorème de Taylor, qui n'est lui-même que la formule générale du développement des fonctions de quantités binomes; mais ce n'est pas ainsi qu'elle fut présentée d'abord par Maclaurin : il parvint au théorème qui porte aujourd'hui son nom, par un usage des différentiations successives qui dut paraître très-adroit et très-simple, et qui cependant est demeuré presqu'inconnu jusqu'en 1777, que M. Laplace s'en est servi dans un très-beau Mémoire sur le développement des fonctions en séries (*). Euler fit remarquer dans ses *Institutions de Calcul différentiel*, le parti qu'on pouvait tirer de la différentiation des équations, pour en éliminer soit des puissances, soit des fonctions transcendantes, et se procurer ainsi de nouvelles équations, au moyen desquelles on exprime les uns par les autres, avec la plus grande facilité, les coefficiens du développement cherché : ce procédé n'est, à proprement parler, que l'application du Calcul différentiel à la *Méthode des coefficiens indéterminés*, imaginée par Descartes, et si féconde en beaux résultats. La résolution des équations littérales et celle de quelques équations transcendantes, ont fait sentir le besoin de formules pour développer la valeur d'une fonction engagée avec sa variable, dans une équation soit algébrique, soit transcendante. Dans ces recherches, une formule, remarquée en premier lieu par Lambert, s'est aussi présentée à M. Lagrange, qui l'a généralisée en une série très-élégante, nommée aujourd'hui le *Théorème* de Lagrange. Enfin M. Laplace a démontré ce théorème, qui n'était encore appuyé que sur une sorte d'induction, et en a augmenté l'étendue dans le Mémoire que j'ai déjà cité.

Tels étaient les matériaux les plus importans parvenus à ma connaissance, lorsque je travaillai à la première édition de mon Ouvrage; ils forment encore la base du chapitre que j'analyse. J'ai tâché de les présenter dans l'ordre qui convient à l'état actuel de la science, en offrant au lecteur les méthodes les plus simples, liées de la manière la plus directe : voilà pourquoi j'ai commencé par l'emploi du théorème de Taylor; de là je suis passé à l'usage des équations différentielles à deux variables; et le procédé de Maclaurin se trouve, dans mon Ouvrage comme dans

---

(*) C'est dans le second livre du *Traité des Fluxions* de Maclaurin, qu'a paru ce théorème. Le premier livre, consacré à la démonstration géométrique des principes et des résultats du Calcul des fluxions, est digne de l'attention de ceux qui aiment la méthode des Anciens; mais le second livre, qui renferme la partie analytique, est très-remarquable pour le temps de sa publication : il est bien supérieur aux traités qu'on avait alors sur le même sujet.

le Mémoire de M. Laplace, précéder l'usage heureux que cet illustre géomètre a fait des équations différentielles partielles, pour développer les fonctions en séries; et le théorème de Taylor vient ici se présenter de nouveau. Je n'entrerai pas dans le détail des questions résolues par ces formules; je ne citerai que la recherche des divers développemens des sinus et des cosinus d'arcs multiples en puissances de ces mêmes fonctions, *et vice versâ*. Ces développemens, obtenus d'abord par induction, présentaient, dans certains cas, des anomalies singulières, qui ont attiré l'attention d'Euler, celle de plusieurs de ses disciples, et que M Lagrange a aussi complètement expliquées dans ses *Leçons sur les fonctions analytiques*. Ce que j'en ai dit ici, joint à ce qui est contenu dans l'Introduction, semble ne rien laisser à desirer sur ce sujet.

La Méthode du retour des suites, due à Newton, et qui a rendu de si grands services dans les premiers temps de l'invention des nouveaux calculs, perdait de son importance, à mesure que les combinaisons analytiques s'étendant et se multipliant, faisaient sentir les avantages de la symétrie des calculs et de la connaissance de la loi qui enchaîne tous les termes d'un même développement. Celle qui règne dans les formules du retour des suites, est masquée par des réductions, et ne se montre qu'après qu'on a mis en évidence celle des puissances du polynome ordonné par rapport à une variable, ainsi que je l'ai indiqué dans mon Introduction. Le théorème de Lagrange donne bien une forme symétrique aux formules du retour des suites; mais les puissances du polynome indéfini s'y retrouvent, et pour en former les coefficiens, on n'avait que les règles données par Moivre, ou les relations successives obtenues par Euler, au moyen de la différentiation. Le premier de ces procédés n'est fondé que sur l'induction; le second ne mène qu'à déterminer les coefficiens les uns par les autres, ensorte que pour parvenir à celui d'un terme, il faut passer par tous ceux qui le précèdent. Tels sont les motifs qui ont donné naissance à l'*Analyse combinatoire*, très-cultivée en Allemagne, déduite de quelques vues que Leibnitz a proposées, sur l'emploi des nombres ordinaux à la place des lettres pour indiquer les coefficiens des inconnues ou des variables, et au moyen de laquelle on forme, par des opérations régulières, les coefficiens des termes du développement des puissances d'un polynome (*). Sans doute, dans ces recherches,

(*) Ce fragment de Leibnitz est très-curieux; il se trouve dans les *Acta Eruditorum*, année 1700, page 206, et dans les *Œuvres de Leibnitz*, T. III, page 365. La force des choses a conduit plusieurs géomètres français à se servir des nombres, au qui paraissent avoir été commencées par M. Hindenburg, et qui ont été suivies avec constance par des hommes de mérite, il y a des procédés ingénieux et utiles; mais on ne saurait se dissimuler qu'ils ne sont encore par rapport à l'analyse, que ce qu'étaient le triangle arithmétique de Pascal, pour former les puissances du binome, et les tableaux employés par Viète et par l'Hôpital, pour continuer les formules relatives à la division des arcs de cercle.

Ayant remarqué que le théorème de Taylor était, comme je l'ai déjà dit, la formule générale du développement des fonctions de quantités binomes, et que ses termes se déduisaient successivement l'un de l'autre par un procédé uniforme, Arbogast imagina de modifier ce procédé, de manière à l'étendre aux développemens des fonctions de polynomes; et de là naquit une nouvelle espèce de différentiation dont l'objet est de déduire, les uns des autres, les coefficiens des puissances de la variable suivant laquelle est ordonné un polynome quelconque, ou même de calculer l'un quelconque de ces coefficiens, en dérivant de son premier terme tous ceux dont il doit être composé. J'observerai en passant, que le nom de *calcul des dérivations* par lequel il désigne sa méthode, est trop général pour en donner une idée; car toute quantité qui tire son origine d'une autre, de quelque manière que ce soit, en est une dérivée; et quoique le procédé d'Arbogast renferme celui de la différentiation, il n'offre encore qu'un cas particulier du nombre infini de lois d'après lesquelles on peut enchaîner les unes aux autres, des quantités ou des fonctions. Je crois qu'il est permis d'en dire autant de la dénomination de *fonctions dérivées*, appliquée aux *coefficiens différentiels*, que cette dernière expression caractérise seule d'une manière spéciale. Quoi qu'il en soit des termes, il faut convenir que le calcul des dérivations atteint le but que l'auteur s'est proposé, et qu'il conduit à des résultats fort généraux et élégamment exprimés; mais les premiers Géomètres de notre temps n'ont vu, dans ce calcul, qu'un artifice particulier de différentiation, appliqué à la formation des différentielles des fonctions de quantités qui sont elles-mêmes fonctions d'autres quantités, et ainsi de suite;

---

moins comme *indices;* mais aucun n'en a fait un usage aussi étendu et aussi ingénieux que Vandermonde. Il faut voir comment il les emploie pour combiner les fonctions des racines des équations algébriques, comment il exprime, par leur moyen, les conditions d'une tresse, d'un nœud ou d'un réseau, et il ouvre un nouvel accès à la solution des problèmes de la *Géométrie de situation*, enfin, comment il abrège les formules d'élimination, et en facilite la combinaison. (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1771, pages 370, 566, et année 1772, 2e partie, page 516.

et ils ont pensé qu'en suivant cette marche on pouvait parvenir aux mêmes résultats, sans employer ce grand nombre de notations nouvelles et de considérations particulières qui rendent l'ouvrage d'Arbogast difficile à lire. M. Paoli a composé dans cette vue un Mémoire dont j'ai donné la traduction dans mon Ouvrage, et dont l'objet est, dit-il, « de montrer » comment, sans nous charger l'esprit de principes nouveaux et de nou- » velles manières d'envisager l'état varié des quantités, nous trouvions » dans le Calcul différentiel les secours nécessaires pour la solution de » tous les problèmes relatifs au développement des fonctions en série (*). » Cependant, le calcul des dérivations a peut-être été jugé un peu trop défavorablement; car M. Français, géomètre distingué, qui s'est rendu familier ce calcul, à la naissance duquel il a pour ainsi dire assisté, en a tiré un très-grand parti dans un Mémoire inédit sur le mouvement des projectiles soumis à la résistance de l'air. Le nombre de séries que renferme cet écrit, et l'étendue de leur développement, sembleraient excéder les forces d'un calculateur, s'il fallait les obtenir par les procédés ordinaires, qui d'ailleurs n'en laisseraient pas appercevoir la loi.

Un point remarquable de la formation de tous les développemens; c'est que la série de Taylor seule suffit pour dégager ce qui tient à la nature de la fonction. Qu'elle soit irrationnelle ou transcendante, cette circonstance ne porte que sur le premier terme de la quantité dont elle dépend, et les autres n'entrent plus que dans des puissances entières et positives de polynomes. M. Kramp, saisissant cette observation faite par Arbogast, a imaginé une méthode qui semble la réunion des premiers principes du calcul des dérivations, avec les procédés fondamentaux de l'analyse combinatoire, et dont il a déduit plusieurs formules nouvelles et remarquables, qui sont insérées dans son *Arithmétique universelle*. Avant que cet ouvrage et celui d'Arbogast aient paru, M. Burmann avait donné aussi quelques formules générales pour développer les fonctions en séries; et dès 1779, M. Laplace avait présenté aux Géomètres son *Calcul des fonctions génératrices*, qui remplit ce but d'une manière très-élégante, et qui se lie avec plusieurs branches de l'analyse, à propos desquelles nous en exposerons les principes dans le troisième volume de cet

(*) L'unico ogetto propostomi in questa Memoria è stato quello di accenare, come senza caricarci la mente di nuovi principj e nuovi modi di considerare lo stato variato delle quantità, troviamo nel Calcolo differenziale i sussidi necessarj alla soluzione di tutti i problemi relativi allo sviluppo delle funzioni in serie. (*Mém. de la Société talienne*, T. XIII, page 31).

Ouvrage, en y ajoutant l'extension que l'auteur lui a donnée depuis : nous remettons aussi à ce volume ce qui regarde la *séparation des échelles*, dénomination imaginée par Arbogast, pour indiquer une sorte de calcul que l'on pourrait faire sur les caractéristiques des différentielles, des différences et des intégrales, en partant de l'analogie qui lie les développemens de ces fonctions à ceux des puissances, analogie que je fais remarquer dès le premier chapitre de mon Ouvrage.

En voyant un si grand nombre de Géomètres, surtout en Allemagne, réunir tous leurs efforts pour créer de nouvelles méthodes propres à développer les *fonctions polynomiales*, on est naturellement porté à rechercher quelles espérances on peut concevoir de leurs travaux pour les progrès de la science; mais le grand nombre de découvertes inattendues doit rendre circonspect celui qui se livre à ce genre de conjectures. Le Calcul différentiel, par exemple, semblait dans le principe n'avoir pour objet que de mener des tangentes aux courbes dont l'équation était irrationnelle; et sans la détermination des lois du mouvement, il demeurait restreint à la seule Géométrie. Cependant, en considérant avec attention l'état actuel de la science, on ne peut s'empêcher de remarquer qu'elle est véritablement surchargée par des procédés, très-ingénieux sans doute, mais dont la puissance, renfermée dans des limites étroites et à peu près pareilles, ne dédommage pas celui qui les étudie des efforts qu'ils lui coûtent, et dont il ne pourrait être payé que par une abondante moisson de conséquences, et surtout d'applications nouvelles; c'est du moins ainsi, ce me semble, qu'on doit en juger, lorsque, ne cédant pas à un goût particulier pour les spéculations des Mathématiques pures, on ne voit dans ces sciences que ce qu'elles sont aux yeux du philosophe, un instrument sûr et fécond pour combiner les lois des phénomènes, ou les déduire des observations. Le luxe de l'analyse, si on peut parler ainsi, est devenu presque effrayant; et plus il augmente, plus il laisse voir sa pauvreté réelle dans tout ce qui tient aux méthodes inverses, les seules dont la Physique puisse à présent retirer des avantages. Les problèmes sont mis en équation; mais comment traiter ces équations avec toutes les circonstances qu'elles renferment? Comment se dégager de ces hypothèses qui rendent illusoires tant de solutions où le calcul est étalé avec profusion? Comment rendre praticables et sûres ces approximations fondées sur des séries qui se ramifient de plus en plus, à mesure qu'on les pousse plus loin, ou cet enchaînement de corrections successives qui réagissent les unes sur les autres, et constituent des méthodes dont le succès ne tient qu'à des rapports particuliers de grandeurs données par les observations, et qui semblent déterminées ainsi par le hasard. Voilà ce qu'on ne peut s'empêcher de voir, quand on se forme le tableau de l'ensemble des méthodes analytiques; et tout porte à croire que les difficultés qui les arrêtent ne peuvent être vaincues qu'à l'aide d'un calcul nouveau, fondé principalement sur les fonctions qu'on appelle aujourd'hui transcendantes, et qu'on exprime quelquefois si heureusement par des *intégrales définies*. Ces derniers mots m'avertissent que je dois terminer la digression dans laquelle je suis entré, et reprendre l'analyse de l'Ouvrage que je présente au Public.

Le troisième chapitre a maintenant pour objet l'examen des valeurs particulières que prennent dans certains cas les coefficiens différentiels; et en séparant cette matière du second chapitre où elle était comprise dans la première édition, je me suis rapproché du plan qu'Euler a suivi. Un chapitre des *Institutions de Calcul différentiel* est consacré au même sujet; mais la place qu'il occupe montre assez que l'auteur pensait qu'on devait écarter ces exceptions des commencemens sur lesquels, ainsi que je l'ai déjà dit, elles peuvent jeter une obscurité dangereuse. C'est par des cas de cette espèce, que Rolle et quelques autres ont attaqué le Calcul différentiel à sa naissance. Saurin leur répondit avec beaucoup de succès, dans plusieurs Mémoires insérés parmi ceux de l'Académie; mais il s'agissait principalement dans ces disputes, de l'application du Calcul différentiel aux courbes. Euler est le premier, à ce que je crois, qui ait envisagé le sujet du côté purement analytique; et les explications que M. Lagrange en a données depuis, les ont dépouillées de la forme paradoxale qu'elles avaient au premier coup-d'œil. Loin de paraître aujourd'hui un défaut dans le Calcul différentiel, on reconnaît qu'elles sont un développement nécessaire des lois de la génération des fonctions, sans lequel il y aurait contradiction dans ces lois; et c'est ce qui arrive toujours aux paradoxes analytiques, quand on est parvenu à leur véritable origine; mais pour y arriver, il faut considérer un grand ensemble, et saisir le fil qui lie entre elles les diverses parties de ce tout. Ce n'est donc que lorsque la science est avancée, que l'on peut atteindre à ces éclaircissemens; par cette raison on ne doit les présenter aux lecteurs que lorsqu'ils ont acquis déjà une assez grande instruction; et qu'on ne dise pas qu'en retardant ces notions, on pèche contre la rigueur de la méthode. Il ne faut pas outrer cette rigueur: ce n'est jamais dans leurs premières études que les géomètres les plus célèbres se sont livrés à ces discussions épineuses; un sentiment très-fin, et la grande masse de résultats qui s'appuient les uns sur les autres, ne laissent pas lieu aux esprits bien faits, de douter de la vérité de ce qu'ils apprennent. Telle est sans doute la cause pour laquelle les Bernoulli ne nous ont rien laissé sur la métaphysique du Calcul différentiel qu'ils ont enrichi de tant de découvertes.

J'ai cru devoir placer dans ce chapitre la théorie des maximums et des minimums (*), parce que non-seulement ils répondent à des valeurs particulières des coefficiens différentiels, mais parce qu'en cherchant à les déterminer, on tombe très-souvent sur ces valeurs singulières dont il faut connaître le sens. Depuis l'emploi fréquent du théorème de Taylor, presque partout on a fondé la recherche des maximums et des minimums sur ce théorème, à l'exemple de Maclaurin. Cette marche, très-lumineuse sans doute, ne mène cependant qu'à un résultat incomplet; car lorsqu'on envisage les fonctions d'une manière purement analytique, il y a de véritables maximums ou minimums qui correspondent à des valeurs infinies du coefficient différentiel du premier ordre, puisque dans ces circonstances l'accroissement de ces fonctions se change en décroissement, ou *vice versâ*; et le caractère qui les distingue des maximums ou minimums correspondans à des valeurs nulles du coefficient différentiel, est purement géométrique, puisqu'il repose sur la forme que prend la courbe dont la fonction proposée représente l'ordonnée. Cette observation m'a engagé à les comprendre dans la théorie que j'ai donnée; et je pense que par là elle est devenue non-seulement plus complète, mais plus claire.

C'est dans cette circonstance qu'on fait pour la première fois usage du principe de la convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une quantité prête à s'évanouir, et d'après lequel un terme de ces séries peut être rendu plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent. Ce principe, qu'on peut justifier en peu de mots d'une manière satisfaisante (voy. la note, page 362), était généralement admis depuis long-temps par les analystes et par Maclaurin lui-même, quelque partisan qu'il fût de la rigueur géométrique; mais lorsque M. Lagrange s'en est servi dans sa *Théorie des Fonctions*, il en a donné une démonstration qui repose sur la sommation de la série de Taylor. D'Alembert, dans ses *Recherches sur différens points importans du Système du Monde* (T. II, page 52), était parvenu à cette série par une voie qui ne la développe que successivement; mais l'expression du reste est engagée sous des signes d'intégration qui se compliquent de plus en plus, et ne permettent pas de l'employer ici; c'est pourquoi M. Lagrange

(*) Voy. les motifs de cette dénomination dans la note page 360.

a cherché à mettre ce reste sous une autre forme. Dans le cours qu'il fit à l'École Polytechnique, en l'an IV (1795), où ses auditeurs ont eu la satisfaction de voir pour ainsi dire naître ses idées et de suivre pied à pied le fil de ses méditations sur ce sujet, il avait remarqué que les limites d'une portion quelconque de la série s'obtiennent avec la plus grande facilité, quand tous ses termes sont positifs. Leur expression, dans ce cas, convient aussi à tous les autres; mais pour s'en assurer, M. Lagrange a été forcé de recourir à des considérations qui tiennent au Calcul intégral; et quoiqu'il les ait beaucoup simplifiées dans ses *Leçons sur le Calcul des fonctions*, je n'ai pu les employer encore sous cette forme, d'après la loi que je m'étais imposée de renvoyer au second volume tout ce qui tient au Calcul intégral. J'ai donc présenté ces considérations dans un ordre inverse, en indiquant les premiers pas faits par M. Lagrange, pour parvenir au but qu'il s'était proposé, et dont la connaissance répand, ce me semble, beaucoup de lumières sur ce sujet. Si l'on ne peut s'empêcher de convenir que la possibilité de comprendre ainsi la série de Taylor, à partir d'un terme quelconque, entre deux limites qu'on peut resserrer autant qu'on veut, est bien propre à fixer les idées dans plusieurs applications du Calcul différentiel, on ne saurait cependant se dissimuler qu'au fond elle n'est pas plus évidente que le principe de la convergence des séries que j'ai rappelé plus haut; car il faut nécessairement s'appuyer sur ce principe, pour montrer que le signe d'une fonction quelconque dépend de la somme des valeurs que prend le premier terme de la série qui exprime son accroissement, ou, ce qui est la même chose, des valeurs de sa différentielle, puisque cela suppose que l'on reconnaisse qu'un terme multiplié par la première puissance d'une quantité susceptible de diminuer continuellement, jusqu'à s'évanouir, peut surpasser la somme de tous les termes qui sont multipliés par des puissances plus élevées de la même quantité; or cette dernière remarque suffit pour fonder les applications géométriques de la série de Taylor, dans lesquelles il ne s'agit que de la possibilité intellectuelle de rendre un terme supérieur à la somme de tous ceux qui le suivent.

Ces applications sont le sujet du quatrième chapitre de mon Ouvrage; elles sont encore précédées, comme dans la première édition, d'une théorie algébrique des courbes, mais dont j'ai supprimé à peu près toute la partie élémentaire qui se trouve dans mon *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie*. Ces méthodes algébriques, reposant sur des idées qui sont au fond les mêmes que celles qui servent de base à l'application du Calcul différentiel, de quelque manière qu'on le présente, préparent très-naturellement à cette application. Je l'ai traitée sous deux points de vue : l'un, qui n'emprunte explicitement aucune notion de l'infini, est dû à M. Lagrange; Arbogast y était aussi parvenu de son côté, en suivant les traces de Newton et de Maclaurin, qui, comme on l'a vu plus haut, considéraient le développement en série du second état de l'ordonnée.

En rendant justice à l'évidence de cette marche, j'ai cru ne pas devoir négliger la considération des infiniment petits, qui abrège et facilite considérablement la mise en équation des problèmes de géométrie et de mécanique; et le rapprochement que j'ai fait des deux méthodes, prouvera, je pense, aux lecteurs attentifs, qu'elles ne diffèrent que dans les expressions. La subordination des différentielles des divers ordres sur laquelle repose tout l'édifice des infiniment petits, et qui paraît au premier coup-d'œil si difficile à admettre, s'explique avec la plus grande clarté, par les développemens que fournit la série de Taylor, soit pour les différences successives d'une fonction quelconque, soit pour celles des lignes qui représentent ces différences dans les courbes. Si je ne me trompe, la manière dont j'ai présenté cette théorie sous le point de vue analytique dans le premier chapitre, et sous le point de vue géométrique dans celui-ci, ne doit laisser aucun nuage dans l'esprit; car tout se réduit à concevoir que le rapport de deux séries ascendantes ordonnées par rapport à la même grandeur, s'évanouit lorsque celle qui est au numérateur, commence par une puissance plus élevée de la variable que celle qui est au dénominateur.

Ceci ramène naturellement à la théorie des limites, qui me paraît toujours celle qui concilie le mieux la brièveté avec l'exactitude du raisonnement; qui, tenant pour ainsi dire le milieu entre les considérations les plus éloignées, met à portée de les saisir toutes et de les rapprocher entre elles. Si j'ai retranché ici à peu près tout ce qui concernait cette théorie, c'est parce que j'en ai fait la base de mon *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral;* mais j'ai laissé subsister, comme l'indication d'un fait remarquable, la détermination des courbes osculatrices, par la coïncidence des points d'intersection de toutes celles de même espèce qui rencontrent la proposée. L'usage que j'ai fait du théorème de Taylor dans cette circonstance, dispensant de toute construction géométrique, distingue ce procédé de plusieurs autres qui ont eu le même objet, et qui étaient appuyés sur la même considération. A tout on peut objecter sans doute, que lorsque les divers points d'intersection sont réunis en un seul, l'œil n'apperçoit plus de différence dans les contacts considérés isolément; mais en convenant de la vérité de l'observation, je ne crois pas qu'on puisse écarter cette théorie d'un ouvrage de la nature du mien, dans lequel il est à propos de montrer partout les traces de la loi de continuité, et d'indiquer toutes les notions métaphysiques de quelque importance.

L'existence des points singuliers des courbes se lie aux changemens de forme que subit dans certains cas le développement de la différence des ordonnées; et la détermination de ces points a toujours été incomplète et fautive, tant qu'on a voulu la fonder sur des règles particulières à chaque espèce de points. Maclaurin a ouvert une meilleure route, en introduisant dans cette recherche, comme dans celle des maximums et des minimums, la considération de deux ordonnées entre lesquelles soit comprise celle du point singulier; mais il n'a pas complété l'énumération des cas qui peuvent se présenter. J'ai suivi sa marche dans la première édition de mon Ouvrage; et en l'examinant avec attention, j'ai, le premier, à ce que je crois, réduit la question à ses véritables termes, dans mon Traité élémentaire, par une règle générale et simple, qu'on trouvera également dans celui-ci, accompagnée de quelques explications qui font bien voir que les points singuliers, n'étant que le passage d'une forme à une autre, ne sont pas indiqués par un caractère spécial, et ne peuvent être distingués sûrement que par la discussion des parties de courbe qu'ils séparent.

Descartes avait indiqué dans sa *Géométrie*, le moyen d'appliquer l'analyse aux surfaces et aux courbes considérées dans l'espace; et, d'après ses idées, plusieurs problèmes importans soit sur les courbes à double courbure, soit sur les surfaces courbes, avaient été résolus par Clairaut, Hermann, Jean Bernoulli et Euler: ce dernier avait même reconnu les deux courbures principales des surfaces courbes, et l'expression analytique du caractère qui distingue les surfaces développables de celles qui ne le sont pas; mais toutes ces belles découvertes n'étant pas présentées par une analyse uniforme, n'offraient pas encore un ensemble satisfaisant. M. Monge, en y introduisant la symétrie et l'élégance, qu'il a poussées si loin dans tous ses calculs, a changé la face de cette branche des Mathématiques, qu'il a d'ailleurs considérablement enrichie par ses propres découvertes. De son côté, M. Lagrange, par son Mémoire sur la Théorie des Pyramides (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773), qui est un chef-d'œuvre dans ce genre, faisait sentir qu'on pouvait découvrir les propriétés de l'étendue, par des calculs analytiques, fondés seulement sur les données de la question, sans faire aucune construction préparatoire, ni même s'aider d'aucune figure. La *Mécanique analytique* offre également beaucoup de détails qui tiennent à cette manière d'envisager la Géométrie, que l'on pourrait appeler aussi *Géométrie analytique*, et d'après laquelle on considère, au lieu des points et des triangles qui les déterminent, les lignes dont ils sont les intersections, et au lieu des lignes, les plans ou les surfaces qui les contiennent simultanément. Aucun ouvrage élémentaire n'avait été publié sur ce sujet avant la première édition de ce Traité; je fus obligé d'insérer dans le chapitre IV, les principales déterminations de la ligne droite suivant des conditions données, pour servir d'introduction au chap. V, où je présentais les découvertes de M. Monge, rapprochées des travaux d'Euler et des autres Géomètres. Depuis, ces préliminaires ayant servi de base à mon Traité d'application de l'Algèbre à la Géométrie, et ayant passé ensuite dans beaucoup d'autres ouvrages, je les ai supprimés dans cette nouvelle édition; mais j'ai donné plus de développement à la partie qui embrasse les trois dimensions de l'espace, et qui forme toujours le V^me chapitre. J'ai tâché de le rendre encore plus indépendant des considérations géométriques, en m'appuyant sur des notions du plan et de la ligne droite, proposées par M. Fourrier, dans une des séances de l'École normale, et au moyen desquelles toute la Géométrie ne reposerait que sur la considération de la propriété fondamentale du triangle rectangle. On pourrait encore remonter plus haut, car M. Legendre a donné, dans les notes de ses *Élémens de Géométrie*, un moyen de tirer immédiatement la théorie des triangles semblables, des conséquences de la superposition, et M. Corancez, dans un Mémoire fondé sur des principes analogues, est parvenu aux théorèmes les plus importans de la Géométrie élémentaire. Ces recherches pourraient ne paraître que curieuses; mais il est incontestable que la Mécanique a retiré les plus grands avantages de l'analyse appliquée à la Géométrie dans l'espace: aussi ai-je cru devoir insérer dans mon Ouvrage tout ce qui pouvait préparer à l'intelligence des formules générales relatives et à l'équilibre et au mouvement des corps, et c'est pour cela que j'ai introduit explicitement les angles dans les équations du plan et de la ligne droite, que j'ai déterminé la position du plan que M. Laplace a fait connaître sous la dénomination de *plan invariable*, et que je me suis beaucoup étendu sur la transformation des coordonnées dans l'espace. On remarquera peut-être le moyen par lequel je passe des formules données par M. Monge (page 536), et si faciles à obtenir par un principe fécond dû à M. Carnot, à celles d'Euler, qui jouent un rôle si important dans la théorie du mouvement de rotation des corps solides.

J'ai éclairci et développé l'énumération des surfaces du second degré, l'élimination des fonctions arbitraires, dans les équations qui expriment les principales générations des surfaces; et après avoir exposé la théorie des développées des courbes à double courbure donnée par M. Monge, j'ai cru devoir indiquer quelques moyens d'exprimer analytiquement les transformations que subit une courbe qu'on enveloppe sur une surface, ou qu'on aplanit en développant cette surface. Ces recherches, que j'avais présentées à l'Académie des Sciences en 1790, se lient avec celles de feu M. Lancret, et peuvent concourir à compléter l'édifice de la Géométrie analytique dont M. Malus a fait une heureuse application à l'optique considérée dans toute sa généralité.

Lorsque les principes du Calcul différentiel sont bien établis, le Calcul intégral, qui en est l'inverse, n'offre plus qu'une collection de procédés analytiques, qu'il faut ordonner de manière à faire ressortir le petit nombre de rapports qui existent entre eux, car ils sont très-souvent isolés. Comme je l'ai dit plus haut, il a été cultivé dès la naissance du Calcul différentiel; mais ses méthodes sont restées long-temps éparses dans les Journaux scientifiques et dans les Mémoires des Académies. Le premier traité complet pour le temps où il a paru, et dans lequel on put appercevoir l'étendue de cette branche des nouveaux calculs, est celui que M. Bougainville publia en 1756, pour servir de suite à l'*Analyse des infiniment petits* de l'Hôpital. On y trouve, outre ce qui a été découvert par les Bernoulli et par quelques géomètres italiens qui se sont occupés spécialement du Calcul intégral, l'extrait des beaux Mémoires que d'Alembert a donné dans les années 1746, 47 et 48 des *Mém. de l'Acad. de Berlin*, et qui font époque dans cette branche des mathématiques. Peu d'années après, Euler commença la publication de son Traité de Calcul intégral, faisant suite à ses *Institutions de Calcul différentiel*, à son *Introduction* à l'*analyse des infinis*, et formant avec ces importans traités, le plus beau cours d'analyse qui eût encore paru.

Cependant en 1768, époque où le dernier des sept volumes dont ce cours est composé fut mis au jour, l'ouvrage avait cessé d'être complet; on n'y trouvait rien sur les équations aux différences, et il y manquait d'ailleurs l'application du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes : on doit juger par là de ce qu'il fallait y ajouter pour faire connaître l'état de la Science en 1798, où a paru le second volume de mon Ouvrage, comprenant le Calcul intégral proprement dit.

Dans ce volume, je me suis à peu près conformé au plan suivi par Euler, qui classe les méthodes d'après la forme des fonctions auxquelles elles s'appliquent. Lorsqu'il s'agit de remonter d'un coefficient différentiel à la fonction dont il dérive, ce coefficient peut être donné explicitement par la variable indépendante, ou bien, lié avec cette fonction par une équation différentielle; le premier cas, que l'on appelle aussi la *méthode des quadratures*, parce qu'on y ramène la recherche de l'aire d'une courbe, occupe le premier chapitre, dans lequel je passe des fonctions rationnelles entières aux fonctions fractionnaires et aux fonctions irrationnelles. La nécessité de recourir dans le plus grand nombre de cas aux moyens approximatifs, mène à l'intégration par les séries; mais celle qui s'opère par le développement de la différentielle, donne rarement une formule convergente, ce qui est cependant indispensable toutes les fois qu'il s'agit d'applications numériques; aussi renvoyait-on alors à ce qu'on appelait la *quadrature mécanique* des courbes. Ce moyen consistait sans doute, dans les premiers temps, à tracer la courbe qui a pour ordonnée le coefficient différentiel, et à déterminer son aire par une approximation graphique. C'est du moins ainsi qu'on peut expliquer comment les premiers géomètres qui se sont occupés du Calcul intégral, regardaient comme résolu, un problème réduit à la quadrature d'une courbe; mais bientôt on a construit des formules pour déduire des valeurs d'un certain nombre d'ordonnées, cette quadrature mécanique : celles d'Euler se présentent naturellement ici, et les autres seront indiquées dans cette nouvelle édition, lorsqu'il sera question des principes sur lesquels elles reposent. On doit mettre aussi au rang des acquisitions les plus remarquables du Calcul intégral, dans la partie des méthodes d'approximation, ce que M. Lagrange a fait, en 1784, sur la différentielle qui contient un radical quarré affectant un polynome du quatrième degré.

En parlant dans le second chapitre, des applications du Calcul différentiel à la quadrature et à la rectification des courbes, j'ai déduit du procédé que je viens de citer, les théorèmes concernant la transformation des arcs d'ellipse, auxquels M. Legendre est parvenu en 1786. La quadrature et la cubature des surfaces courbes quelconques, amenant les problèmes où l'on s'est proposé de trouver, sur les surfaces, soit des lignes rectifiables algébriquement, soit des espaces quarrables, conduisait naturellement à parler de l'espèce de *Calcul intégral indéterminé*, où il s'agit d'assigner la forme que doit avoir la fonction différentielle pour que l'intégrale soit d'une nature donnée. On n'a encore résolu dans ce genre, qui comprend la fameuse énigme de Florence proposée par Viviani, que des problêmes curieux; mais cette recherche, qu'Euler a le premier tenté de réduire en méthode régulière, était trop remarquable pour la passer sous silence, et j'en ai indiqué les bases dès ma première édition.

Le troisième chapitre est consacré aux équations différentielles à deux variables, c'est-à-dire à la détermination des fonctions d'une seule variable, au moyen d'une relation donnée entre cette variable, la fonction qui en dépend et ses coefficiens différentiels. Cette branche de l'analyse renferme un grand nombre de procédés, mais qui malheureusement n'ont guère de succès que dans des cas très-particuliers, et à peu près les mêmes pour tous. C'est ainsi qu'on ne vient guère à bout de déterminer le facteur propre à rendre une équation différentielle intégrable, que dans le cas où l'on sait séparer les variables; et cette dernière méthode, qui remonte à l'origine du Calcul intégral, est encore une des plus fécondes; mais son application ne présente qu'un petit nombre de résultats tant soit peu généraux: les autres sont l'effet de substitutions heureuses, que le tact qui s'acquiert par une longue pratique suggère à des analystes exercés, et dont on ne saurait rendre raison *à priori*. Je donne plusieurs exemples de ces cas; mais comme ils offrent peu d'intérêt quand ils ne se rapportent à aucune question physique, je passe aux équations où les coefficiens différentiels et la fonction ne montent qu'au premier degré, et que j'appelle pour cette raison, *équations du premier degré*, la dénomination de *linéaires* qu'on leur a donnée étant très-impropre, puisqu'elles n'appartiennent point à une ligne droite. Ce que l'on sait sur ces équations, compose la seule théorie que l'on ait dans cette branche du Calcul intégral, et sert de base à toutes les méthodes d'approximation employées dans les recherches physico-mathématiques. C'est à M. Lagrange qu'on est redevable des deux propositions générales que comprend cette théorie, comme aussi de celles qui expriment la liaison qui existe entre une intégrale et les solutions particulières d'une équation différentielle, et qui tiennent à la manière d'étendre une équation à des cas qu'elle ne comprend pas explicitement, en faisant varier les constantes qu'elle renferme; procédé dont M. Lagrange vient de faire les plus belles applications aux problèmes de la mécanique, concernant le mouvement des corps célestes.

Quant à la détermination des solutions particulières, par la seule connaissance de l'équation différentielle, de nouvelles recherches ont montré que le procédé le plus sûr était celui qu'avait donné Euler dans son Calcul intégral, que M. Laplace a ensuite étendu et perfectionné, et dont M. Poisson s'est servi pour compléter cette détermination par rapport à toutes les espèces d'équations différentielles. Voilà l'exposé rapide des matériaux que j'ai dû employer dans le chapitre que j'ai en vue dans ce moment; plusieurs n'étaient pas encore publiés lors de la première édition. A ces matériaux il faut joindre quelques questions géométriques, résolues pour indiquer l'usage des équations différentielles dans la détermination des courbes d'après leurs propriétés. En passant en revue les méthodes, dans une partie de l'analyse qui laisse tant à desirer, il était naturel de présenter quelques vues sur les moyens de la perfectionner; et c'est à quoi m'a conduit l'examen de l'intégration de ces équations formées de deux différentielles semblables, dont aucune n'est séparément intégrable. Elles n'ont été remarquées, d'abord par Fagnano, qu'à l'égard des arcs elliptiques; mais elles ont lieu par rapport aux logarithmes et aux arcs de cercle, et pourraient bien donner naissance à une théorie très-féconde, ainsi que je l'ai indiqué dans un article contenant quelques réflexions sur les transcendantes en général.

J'ai, dans ce chapitre et dans le précédent, choisi mes exemples parmi les plus remarquables de ceux qu'on trouve dans le Traité de Calcul intégral d'Euler; et je crois n'avoir laissé de côté que ce que tous les bons esprits s'accordent à regarder comme des longueurs. Je passe ensuite aux fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables: ce chapitre, qui est le quatrième, commence par l'intégration des différentielles totales comprenant un nombre quelconque de variables, et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, dont je donne à cette occasion la théorie générale. Dans la première édition, cette théorie venait à la suite de l'exposition des principes du Calcul différentiel, et en cela, j'avais suivi l'exemple d'Euler; mais le développement qu'elle exige aujourd'hui, ne permet plus qu'on la place aussi loin de ses applications.

La considération immédiate des équations différentielles totales contenant plus de deux variables, se présente bien plus rarement que celle des équations différentielles partielles. C'est Euler qui le premier a intégré une de celles-ci, en résolvant un problème de géométrie pure; mais d'Alembert, en les introduisant dans la théorie du mouvement des fluides, a le mérite d'en avoir fait sentir toute l'importance. Il en a intégré plusieurs par des méthodes fort ingénieuses; mais sa manière de les présenter sous la forme de différentielles à rendre exactes, jetait beaucoup de complication sur le sujet; tandis qu'Euler, en écrivant l'équation même à laquelle cette condition donne lieu, en indiquait le véritable sens, qui est d'offrir une relation entre les variables primitives et un certain nombre de coefficiens différentiels, relation qui est en général insuffisante pour déterminer entièrement la fonction cherchée, puisque cette fonction a, dès le premier ordre, plus d'un coefficient différentiel: et il faut dire ici que la définition du Calcul différentiel donnée par M. Lagrange, dans son Mémoire de 1772, déjà cité, rend bien évidente la liaison de ces équations, ou du *Calcul différentiel partiel* dont elles sont l'objet, avec le Calcul des différentielles totales, le seul dont on s'était d'abord occupé. Quoique les bases du premier de ces calculs puissent être considérées comme implicitement comprises dans le second, son usage dans les recherches physico-mathématiques est tel, qu'on l'a regardé avec raison comme formant une découverte digne d'occuper dans l'Histoire littéraire du 18e siècle, le rang que tient la découverte de Leibnitz dans celle du 17e. Les méthodes que l'on emploie aujourd'hui dans ce calcul, sont dues principalement aux travaux d'Euler, à ceux de M. Lagrange, sur les équations différentielles du premier ordre, combinés fort heureusement par Charpit, géomètre mort à la fleur de l'âge, au beau Mémoire de M. Laplace, sur les équations du premier degré (ou linéaires), et aux recherches de M. Monge qui, considérant ce calcul par rapport à la génération des surfaces courbes, l'a pour ainsi dire inventé de nouveau, ou du moins ne doit qu'à lui seul tout ce qu'il en a publié dans ses divers Mémoires. En cherchant à retrouver par des considérations purement analytiques, l'intégrale de l'équation de la surface dont l'aire est un *minimum*, donnée pour la première fois par M. Monge, M. Legendre a aussi ajouté quelque chose à ce qu'on savait sur les équations différentielles partielles du second ordre.

Malgré les recherches de ces géomètres célèbres, le Calcul intégral aux différentielles partielles est encore bien peu avancé, puisque, passé le premier ordre, on ne sait pas même le nombre et la nature des arbitraires que doit contenir l'intégrale d'une équation, pour être générale. J'ai fait voir dans la première édition de mon Ouvrage, la fausseté de l'analogie qu'on avait voulu établir entre les fonctions arbitraires et les constantes qui complètent les intégrales des équations différentielles totales, et s'éliminent une à une à chaque différentiation. Depuis, plusieurs Géomètres ont repris ces considérations; mais je ne crois pas qu'on sache encore rien de positif à ce sujet: tout ce qui semble prouvé, c'est que la division des équations différentielles partielles en ordres, ne paraît pas conforme à leur nature; car la difficulté de les intégrer et l'étendue des équations primitives dont elles dérivent, ne correspondent pas avec cette division. Pareille chose peut s'observer par rapport aux équations différentielles à deux variables, si l'on fait attention aux équations du premier degré à coefficiens constans, qui s'intègrent de la même manière dans tous les ordres ; on a vu aussi que la classification par le degré dans un même ordre, n'était pas plus en rapport avec les difficultés de l'intégration, et cette circonstance a lieu aussi dans les équations différentielles à deux variables, comme le montre l'équation $y - x\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui s'intègre toujours par le même procédé, quelle que soit la forme de la fonction désignée par f. On pourrait faire de semblables remarques pour les équations algébriques mêmes, par rapport à la correspondance entre la forme des racines et le degré des équations auxquelles elles appartiennent. Établir dans toutes ces espèces de fonctions une classification meilleure, et qui mette en évidence les transcendantes fondamentales ou indépendantes, c'est peut-être le plus grand pas à faire maintenant dans l'analyse.

En exposant ce que l'on doit à M. Monge, sur le Calcul intégral aux différentielles partielles, je ne pouvais pas omettre l'interprétation lumineuse qu'il a donnée des équations différentielles à trois variables qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, et qui représentent des courbes assemblées en famille par des propriétés qui ne permettent pas qu'elles soient toutes sur la même surface. Considérées sous le point de vue analytique, les intégrales que M. Monge a données de ces équations différentielles, viennent se rattacher au Calcul intégral indéterminé, dont j'ai parlé dans le deuxième chapitre, puisqu'on peut très-souvent choisir dans l'ensemble de ces intégrales celles qui sont algébriques ; et pour en rendre l'existence indépendante des considérations géométriques qui les avaient fait connaître à M. Monge, j'ai montré leur liaison avec la théorie des solutions particulières due à M. Lagrange.

Le *Calcul des variations*, fruit des premiers travaux de M. Lagrange, et qu'Euler s'empressa d'étudier, de commenter, et de substituer au bel ouvrage où il avait résolu le problème des *isopérimètres* (*), est l'objet du cinquième chapitre, le dernier de ce volume. Outre son usage pour déterminer les courbes ou les surfaces qui, relativement à leurs aires, leurs arcs, leurs volumes, etc. jouissent de *maximums* ou de *minimums*, ce calcul est devenu indispensable dans la Mécanique, depuis que M. Lagrange l'a appliqué au développement des conséquences du principe des *vitesses virtuelles ;* mais pour ne pas lui ôter de sa simplicité et de son élégance dans ces nouvelles recherches, il fallait lui conserver la forme sous laquelle son inventeur l'a présenté d'abord, et qui est sem-

(*) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.*

blable à celle que la métaphysique de Leibnitz donne à la différentiation : c'était aussi la marche que j'avais suivie dans la première édition de mon Ouvrage. Cependant il était à desirer qu'on pût, sans lui rien faire perdre de ses avantages, lier le calcul des variations avec le développement des accroissemens des fonctions ; et M. Lagrange y est parvenu dans la seconde édition in-8° de ses *Leçons sur le Calcul des fonctions*, en se rapprochant de la manière dont Euler avait déduit du Calcul différentiel partiel celui des variations. Cet illustre analyste, ayant l'habitude d'éliminer les différentielles, en indiquant les coefficiens différentiels de la fonction, desirait pouvoir faire la même chose par rapport à la variation de l'ordonnée, sans pourtant se priver des termes que la variation de l'abscisse introduit dans les équations délivrées du signe $\int$, au moyen desquelles la méthode des variations donne la solution complète de tous les problèmes qui s'y rapportent : on voit même, par ses différens Mémoires sur cette matière, qu'il eut toujours quelque peine à concevoir l'existence de ces équations. Au reste, M. Poisson a montré qu'elles sont implicitement comprises dans la partie de la variation affectée du signe $\int$, lorsqu'on introduit dans cette partie les constantes arbitraires que comportent les intégrales des équations différentielles de la courbe cherchée. J'ai profité de toutes ces recherches pour perfectionner ce chapitre dans l'édition présente.

Le développement des fonctions en séries conduit au Calcul différentiel ; le Calcul intégral fait connaître de nouvelles fonctions qu'on ne peut exprimer que par des suites, et la considération de ces dernières fait naître le *Calcul aux différences finies*, que j'appelle simplement *Calcul aux différences*. Telles sont les raisons qui m'ont porté à le séparer du Calcul différentiel, qu'il comprend cependant implicitement comme cas particulier. Cet ordre présente, selon moi, un avantage assez important ; c'est celui de réunir, dans un seul corps de doctrine toute la théorie des suites, morcelée dans la plupart des livres qui en traitent, ce qui n'a point été fait depuis Jacques Bernoulli et Stirling, quoique la matière se soit prodigieusement accrue par les travaux d'Euler, de MM. Lagrange et Laplace. Le Calcul aux différences forme donc le premier chapitre du troisième volume de cet Ouvrage, volume qui porte le titre particulier de *Traité des différences et des séries*. Dans l'exposition de la partie directe de ce calcul, je rapporte plusieurs formules élégantes que M. Prony a données dans son *Traité de la Méthode des différences*, ainsi que diverses méthodes d'interpolation, et leur application à la quadrature des courbes. Dans le Calcul inverse des différences se présentent les produits des facteurs équi-différens, que Vandermonde a désignés par une notation qui met en évidence les analogies curieuses et très-utiles que ces produits ont avec les puissances. Ses vues sur ce sujet, qui peuvent, à ce que je crois, mener beaucoup plus loin, comme plusieurs autres qui rendent très-remarquables le petit nombre de Mémoires qu'il a donnés, après être restées long-temps dans l'oubli, se sont présentées à M. Kramp, à l'occasion de ses recherches sur les réfractions astronomiques. Ce géomètre désigne les produits de facteurs équi-différens, sous le nom de *facultés numériques*; Arbogast, qui les ramène à ses *dérivations*, les appelle *factorielles*; et M. Multedo, qui a repris ces considérations dans la forme proposée par Vandermonde, ce qui en fait une sorte de Calcul particulier, donne à ces mêmes produits le nom de *quantités hyper-géométriques*.

Les formules qui expriment l'analogie des puissances avec les différences et avec les intégrales, mènent très-simplement aux séries qui donnent l'intégrale aux différences d'une fonction quelconque. J'ai fait usage de la première démonstration que M. Laplace a donnée de ces formules, et j'ai tiré d'un beau Mémoire du même géomètre, l'expression du terme général des nombres de Bernoulli, qui jouent un si grand rôle dans la sommation des suites. Le soin que j'ai pris de rapprocher, autant qu'il était possible, les diverses méthodes qui avaient le même objet, multiplie trop les détails dans cette partie, pour que j'en puisse donner l'analyse.

Parmi plusieurs digressions qu'amène la grande variété de sujets qu'embrasse le Calcul aux différences, se présente la détermination du nombre des termes des polynomes, et l'emploi que Bézout en a fait pour donner la première démonstration que l'on ait eue du plus haut degré auquel peut s'élever l'équation finale résultante de l'élimination d'un nombre quelconque d'inconnues entre des équations algébriques. La détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales aux équations différentielles partielles, l'examen de la nature de celles qui complètent les intégrales des équations aux différences, les diverses sortes d'intégrales qu'admettent ces dernières, ainsi que leurs solutions particulières, sont des sujets que j'ai traités dans cette édition plus exactement que dans la première, en m'aidant des travaux de MM. Biot et Poisson.

En regardant les valeurs successives d'une fonction, comme les divers coefficiens des puissances d'une variable dans le développement d'une autre fonction de cette variable, ce qui rentre tout-à-fait dans l'origine que j'ai assignée ci-dessus au Calcul aux différences, on retrouve, par des procédés simples, uniformes et élégans, la plupart des formules obtenues par ce calcul, et d'autres encore plus générales : c'est en cela que consiste le *Calcul des fonctions génératrices*, donné pour la première fois en 1779, par M. Laplace, et qu'il a enrichi de nouveaux résultats non moins remarquables que les premiers. S'il fallait à présent faire un choix entre les méthodes propres au développement et à la transformation des suites, le Calcul des fonctions génératrices pourrait mériter la préférence sur la plupart des moyens connus; mais dans l'état actuel de la science, où elle est circonscrite de tous côtés par des limites qu'on cherche à franchir, on ne sait sur quoi doivent s'appuyer les considérations qui leveront les difficultés où l'on est maintenant arrêté; et d'ailleurs les principes du Calcul des différences sont si naturels, si directs, qu'on ne peut pas les omettre : voilà pourquoi j'ai exposé les méthodes de M. Laplace, dans un chapitre à part, le second, que l'on peut regarder en grande partie comme un abrégé du premier.

Arrêtés à tout moment par les difficultés dont j'ai parlé ci-dessus, les Géomètres ont varié leurs méthodes autant qu'il était possible ; après avoir employé les suites pour suppléer aux imperfections du Calcul intégral, ils ont appliqué le Calcul intégral à la théorie des suites et à leur sommation. Euler a fait sur ce sujet de nombreuses recherches qui ne pouvaient pas trouver place dans un traité de Calcul intégral, non-seulement sans lui donner trop d'étendue, mais encore sans y causer une espèce de désordre, par le mélange continuel de procédés trop différens de ceux de l'intégration proprement dite, tels que des interpolations, des déterminations d'intégrales pour des valeurs particulières de la variable, c'est-à-dire, des *intégrales définies*. Toutes ces méthodes, que l'on pourrait appeler *anomales*, du moins pour le présent, m'ont paru bien placées après un Traité des suites, et avec d'autant plus de raison, que la plupart peuvent être envisagées, pour ainsi dire, comme des pierres d'attente destinées à se lier avec un nouvel édifice dont la construction s'annonce chaque jour : de ce nombre est surement l'emploi des intégrales définies pour exprimer les fonctions données par des équations différentielles. Euler en a offert le premier exemple sur l'équation de Riccati; M. Laplace a, par ce moyen, intégré un cas fort singulier des équations différentielles partielles du second ordre; et M. Poisson en a pareillement usé dans un Mémoire sur le son. M. Parseval a aussi intégré de cette manière une équation très-générale du mouvement des fluides et celle de la propagation du son, en supposant à l'air trois dimensions; mais la forme des résultats auxquels il est parvenu semble se refuser à toute application spéciale. Avant d'exposer ces méthodes, j'ai donné un extrait des principaux résultats obtenus par Euler sur les intégrales définies. Ce sujet, auquel il s'était particulièrement attaché, a fourni la matière d'un supplément posthume à son Traité de Calcul intégral, et M. Legendre s'en est occupé dans deux Mémoires. J'y ai rattaché ce que l'on sait de plus important sur les séries de produits; et après avoir déduit du Calcul intégral les expressions de sinus et de cosinus en produits dont le nombre des facteurs est infini, je les ai tirées de la considération des limites, que M. l'Huillier a substituée à celle de l'infini par laquelle Euler y était parvenu: enfin dans ce même chapitre, les produits de facteurs équidifférens se sont présentés comme valeurs d'intégrales définies.

Dès les premiers temps de l'invention du Calcul différentiel, on se proposa de déterminer des courbes par des conditions qui se rapportaient en même temps à plusieurs points placés à des distances finies: tel est le problème des *trajectoires réciproques*, où l'on considère deux courbes pareilles, dont l'une, se mouvant parallèlement à elle-même sur l'axe des abscisses, coupe toujours la première sous le même angle. Euler, qu'il faut nommer dans presque toutes les recherches mathématiques, résolut d'autres questions du même genre, soit par des artifices analytiques très-ingénieux, soit en les ramenant, par le moyen de la série de Taylor, à des équations différentielles d'un ordre indéfini. Mais depuis on a reconnu que ces problèmes se rapportaient à un nouveau genre d'équations que Condorcet et M. Laplace avaient considérées sous le nom d'*équations aux différences mêlées* (finies et infiniment petites). M. Biot a repris, le premier, ce genre de calcul pour l'appliquer aux questions géométriques. J'ai inséré un extrait de son travail dans le quatrième chapitre de la première édition de mon *Traité des Différences et des Séries*, et j'aurai à y joindre, dans la seconde, de nouvelles recherches faites par M. Poisson, sur la théorie analytique de ce calcul.

Après avoir donné l'indication sommaire des grandes divisions de mon Ouvrage, je dirai quelques mots sur son exécution. Je n'ai jamais perdu de vue qu'au point où les Mathématiques sont parvenues de nos jours, ceux qui les étudient ont souvent besoin de revenir sur leurs pas pour classer les connaissances qu'ils ont acquises; qu'on leur épargne beaucoup de peine, et que leurs idées s'ordonnent mieux, lorsqu'on leur présente de grandes divisions auxquelles les diverses méthodes viennent ensuite se rattacher. J'ai donc fait ensorte que chaque chapitre, formant, autant que cela se pouvait, une sorte de traité particulier, ne dépendît en général de ceux qui le précèdent, que par la nature du sujet et non pas par les détails; et pour tâcher d'atteindre à la clarté si desirable, surtout dans les livres qu'on est obligé d'étudier seul, je me suis imposé la loi de ne mettre sous les yeux du lecteur aucun calcul, sans en avoir exposé le but et fait connaître l'esprit : enfin j'ai apporté le plus grand soin à donner aux formules cette symétrie qui les fait presque deviner, et dont les écrits de M. Lagrange offrent tant d'exemples.

Uniquement animé du desir de faire un livre utile aux jeunes gens, j'ai écarté toutes les prétentions de l'amour-propre, et je ne me suis point arrêté à relever les détails qui peuvent m'appartenir, dans un travail pour lequel j'ai dû nécessairement mettre beaucoup d'auteurs à contribution. Dans les citations, j'ai tâché de ne rien omettre des obligations de quelque importance que je puis avoir aux géomètres dont les ouvrages m'ont servi à enrichir le mien; et pour la commodité des lecteurs qui débutent dans la carrière des Mathématiques, ou qui veulent approfondir un sujet que je n'ai pu qu'indiquer, j'ai rapporté à côté des articles de la Table des sommaires, placée à la tête de chaque volume, le titre des Ouvrages et des Mémoires que j'ai consultés pour la rédaction de ces articles, ou qui y ont quelque rapport, et qui sont venus à ma connaissance. A la suite du troisième volume j'ai mis une ample table des matières, qui forme du livre entier, du moins je l'espère, une sorte de dictionnaire d'analyse et de géométrie transcendante. On sent que j'ai dû penser à cet usage de mon livre, puisque son étendue est devenue telle, qu'on n'en peut entreprendre la lecture continue, et qu'il faut y revenir à plus d'une fois. Si cependant j'étais obligé de demander grace pour cette étendue, je prierais le lecteur de penser à celle des objets qui s'y trouvent traités, et au nombre de volumes dont les trois qui composent mon Ouvrage peuvent tenir lieu, du moins pour le présent, et tant qu'on ne s'engage pas dans des recherches particulières.

TABLE.

INTRODUCTION.

(*) M. Labey, professeur d'un mérite distingué, a donné une traduction française de cet ouvrage, à laquelle il a joint des notes intéressantes.

(*) En 1797, on a réimprimé cet ouvrage devenu très-rare, et on l'a joint à celui de Newton, dont il est le Commentaire.

Sommaires des Articles.	Liste des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
	Opuscules Mathém. T. V, (d'Alembert). *Commercium Epistolicum*, (Leibnitz et Jean Bernoulli). *Nova Acta Pétrop.* T. XIII, page 172, (Schubert).

TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE. DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Sommaires des Articles.	Liste des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
	Analyse des infiniment petits, (l'Hôpital). *Méthode des fluxions*, (Newton). *Methodus incrementorum*, (Taylor). *Traité des fluxions*, (Maclaurin). *Institutiones Calculi differentialis*, (Euler). *The Residual Analysis*, 1758 et 1764, (Landen). *Mémoires de l'Acad. de Berlin*, an. 1772, page 185, (Lagrange). *Théorie des fonct. analytiq.*, (Lagrange). *Leçons sur le Calcul des fonct.* (Lagrange). *Elementi d'Algebra*, T. II, (Paoli). *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, (Cousin). *Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio*, (l'Huillier). *Elementa Analyseos et Geometriæ sublimioris*, (Pasquich). *Arithmétique universelle*, (Kramp). *Mémoires sur le Calcul d'exposition*, Acad. de Berlin, 1798—99 et 1800, (Gruson).

Sommaires des Articles.

Liste des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

N. B. Voyez les ouvrages déjà cités pour l'exposition des principes du Calcul différentiel, et le n° 3 de *la Correspondance sur l'École Polytechniq*. (Poisson).

Théorie des fonctions analytiq. (Lagrange).
Leçons sur le Calcul des fonct. (Lagrange).
Meditationes analyticæ, (Waring).

The Residual analysis, (Landen).
Réflexions sur la métaphysique du Calcul différentiel, (Carnot).
Elementa Analyseos et Geom. (Pasquich).
Mémoires sur le Calcul d'exposition, Acad. de Berlin, 1798, 99 et 1800, (Gruson).
Arithmétique universelle, (Kramp).
Theorie des fonctions analytiq. (Lagrange).
Traité de la Résolution des équations numériques, note X, (Lagrange).
Leçons sur le Calcul des fonct. (Lagrange).
Meditationes analyticæ, (Waring).
Institutiones Calculi differentialis, prefat. et pars I, cap. IV, (Euler).

N. B. Ceux des lecteurs qui voudraient prendre une connaissance générale des principaux Ouvrages et Mémoires concernant les Mathématiques pures et appliquées, pourront recourir à la *Bibliotheca mathematica*, publiée par M. Murhard. La grande fécondité d'Euler rend aussi très-bon à consulter le catalogue de ses Œuvres, placé à la fin de son Éloge, par Fuss, et à celle du second volume de l'édition de ses *Institutiones Calculi differentialis*, imprimée à Pavie, en 1787.

FIN DE LA TABLE.

Observ. Plus convaincu que jamais de la difficulté d'éviter les fautes d'impression dans un livre de Mathématiques de quelqu'étendue, j'avais prié deux jeunes gens fort instruits de lire en particulier les épreuves du mien, et je les revoyais aussi moi-même avec toute l'attention dont je suis capable; malgré ces soins, j'ai déjà reconnu un assez grand nombre de fautes que j'ai indiquées à la fin du volume, et que je prie les lecteurs de vouloir bien corriger d'avance.

INTRODUCTION.

Cette Introduction a pour but de présenter dans leur ensemble, des théories qu'on ne trouve qu'en partie dans les Élémens d'Algèbre, ou qui n'y sont pas développées avec toute l'étendue qu'il convient de leur donner pour ne rien laisser à desirer sur la généralité des démonstrations. En effet, dans ces Élémens, on a dû s'attacher principalement à considérer l'Algèbre dans ses rapports avec la résolution des équations déduites des problèmes relatifs aux nombres; mais ce n'est là que le moins important de ses usages. La propriété que possède ce genre d'écriture, d'exprimer, de combiner et de transformer les relations que les grandeurs ont entre elles, a conduit à des résultats très-remarquables, et dont la connaissance répand beaucoup de lumière sur l'objet principal de cet Ouvrage. Avant de les exposer, je vais rappeler quelques notions essentielles, et éclaircir le sens de plusieurs expressions qui peuvent paraître obscures et même fausses, lorsqu'on ne remonte pas à leur origine.

1. Les anciens Analystes comprenaient en général sous la dénomination de *fonctions* d'une quantité, toutes les puissances de cette quantité. Notions générales sur les fonctions, et les séries.
Dans la suite on a étendu le sens de ce mot, en l'appliquant aux résultats des diverses opérations algébriques : ainsi on a encore appelé *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression algébrique renfermant d'une manière quelconque des sommes, des produits, des quotiens, des puissances et des racines de ces quantités. Enfin de nouvelles idées, amenées par les progrès de l'analyse, ont donné lieu à la définition suivante des fonctions.

Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction *de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.*

La racine d'une équation du cinquième degré, par exemple, dont on ne saurait assigner l'expression dans l'état actuel de l'Algèbre, est néanmoins une fonction des coefficiens de l'équation, parce que sa valeur dépend de celles de ces coefficiens.

On distingue les fonctions suivant le nombre de quantités dont elles dépendent ; ainsi la puissance quelconque, mais déterminée, d'une quantité, n'est fonction que de cette seule quantité. Si on prend la chose sous un point de vue plus général, qu'on envisage à-la-fois toutes les puissances possibles d'une quantité susceptible de valeurs quelconques, alors l'expression générale de ces puissances sera fonction de la quantité primitive et de l'exposant, puisque la valeur particulière de chacune d'elles dépend de ces deux choses.

2.° C'est la considération des équations indéterminées qui a conduit à généraliser l'idée des fonctions. Lorsqu'on a voulu exprimer qu'une quantité ne pouvait être assignée sans que préalablement on n'eût donné des valeurs particulières à d'autres quantités, qui pouvaient en recevoir un nombre infini dans une même question, on s'est servi du mot *fonction* pour désigner cette dépendance. Il suit de là que si on avait, par exemple, l'une ou l'autre de ces équations,

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = axz + bx^2 + cz^2, \end{cases}$$

on dirait que y est, dans la première, une fonction de x, ou qu'il est, dans la seconde, une fonction de x et de z. Il faut remarquer qu'on fait abstraction des quantités a, b, c, parce qu'elles sont déterminées, c'est-à-dire parce qu'on les regarde comme devant conserver la même valeur dans toutes les solutions dont chacune des équations précédentes est susceptible.

On pourrait, au lieu de ces équations, en rencontrer d'autres dans lesquelles les quantités inconnues se trouvassent engagées de façon qu'il ne fût pas possible de déterminer, sans quelques opérations préliminaires, la valeur de l'une d'elles : telles seraient les équations,

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = axy \\ x^3 + y^3 + z^3 = axz + byz + cxy. \end{cases}$$

Dans ce cas l'inconnue y sera toujours une fonction de x, en vertu de la première, ou une fonction de x et de z, en vertu de la seconde ; parce que cette inconnue ne saurait être déterminée, à moins qu'on n'ait donné des valeurs particulières à x dans l'une, ou à x et à z dans l'autre.

Si dans les équations de cet exemple on se proposait de déterminer x en conséquence des valeurs particulières données à y, ou à y et à z, on dirait que x serait dans la première une fonction de y, ou dans la seconde une fonction de y et de z. On voit par là que dans une équation qui renferme plusieurs inconnues, l'une quelconque d'entre elles est toujours une fonction de toutes les autres; et c'est l'énoncé de la question qui fait connaître celle qu'on doit envisager ainsi. Lorsqu'on a une équation entre deux quantités, elles sont réciproquement fonction l'une de l'autre.

Nous venons de mettre sous les yeux du lecteur deux sortes d'exemples qui donnent lieu à une distinction remarquable. Dans les premiers on voit tout de suite comment avec la valeur de x, ou celles de x et de z, on parviendrait à former la valeur de y; dans les seconds, au contraire, il faudrait encore résoudre une équation algébrique par rapport à y, pour trouver cette quantité, en supposant qu'on connût les valeurs de x, ou de x et de z. Nous dirons donc que dans le premier cas y est une fonction *explicite* de x, ou de x et de z, et dans le second une fonction *implicite* des mêmes quantités.

Il n'est pas nécessaire qu'on ait une équation entre plusieurs quantités, pour qu'on dise que l'une d'elles est une fonction implicite des autres. Il suffit qu'on sache que sa valeur dépend de leurs valeurs particulières; ainsi dans un cercle, le sinus est une fonction implicite de l'arc, quoique l'analyse algébrique n'offre aucun moyen d'exprimer la relation de ces deux quantités, parce qu'en effet l'une d'elles est déterminée lorsque l'autre l'est, et réciproquement. Il est bon d'observer qu'ici nous avons fait abstraction du rayon, quoique la grandeur du sinus dépende aussi de cet élément, parce que nous n'avions en vue qu'un seul cercle.

On comprend sous la dénomination de *fonctions algébriques*, toutes celles qui résultent des opérations algébriques, ou dont la relation avec les quantités indéterminées dont elles dépendent peut être exprimée par une équation algébrique.

3. Les fonctions algébriques ne renferment jamais qu'un nombre limité de termes, lorsqu'on les exprime sous la forme qui leur est propre. Cette restriction est nécessaire; car si on veut évaluer par un assemblage de monomes, une fraction proprement dite, ayant un dénominateur binome ou polynome, on tombe alors dans une suite infinie.

La fraction $\frac{a}{a-x}$, par exemple, étant développée par la division ou autrement, donne la suite:

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.}$$

sans qu'on trouve jamais un quotient qui s'arrête. Il en est de même des racines des polynomes qui ne sont pas des puissances parfaites, lorsqu'on veut les exprimer d'une manière rationnelle, ou par une suite de monomes.

On sait que la formule donnée par Newton, pour développer les puissances du binome, ne se termine pas lorsque l'exposant est un nombre négatif ou fractionnaire.

Mais il existe des fonctions qu'on ne saurait, dans aucun cas, exprimer par un nombre limité de termes, de l'espèce de ceux qui constituent les quantités algébriques : tels sont, par exemple, les logarithmes qu'on ne peut obtenir que par approximation, et qui dépendent de l'extraction d'un nombre infini de racines ; les sinus et cosinus qu'on ne saurait évaluer au moyen de leurs arcs, sans concevoir un nombre infini d'opérations algébriques : on a donné à ces fonctions le nom de *transcendantes*. Celles que nous venons d'indiquer ne sont pas les seules de ce genre; les progrès que l'analyse a faits en ont introduit beaucoup d'autres, et peuvent en fournir indéfiniment. Telle est l'origine des séries. Quoiqu'elles ne donnent la valeur exacte des fonctions auxquelles elles appartiennent, que lorsqu'elles s'arrêtent, ou qu'on sait obtenir la somme de tous leurs termes, comme cela arrive dans les progressions par quotiens (ou géométriques) décroissantes ; cependant elles peuvent toutes, à l'instar de celles qu'on déduit des fonctions algébriques, être regardées comme le développement des fonctions inconnues dont elles dérivent.

4. Il est à propos de faire attention au mot *développement*, que l'on emploie ici au lieu de celui de *valeur*; car une série ne donne pas toujours la valeur de la fonction à laquelle elle appartient : quelquefois même au lieu d'en approcher davantage, à mesure qu'on prend plus de termes, elle s'en éloigne sans cesse, ainsi qu'on peut le remarquer sur la fraction $\frac{a}{a-x}$, développée suivant les puissances de x. La série

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.}$$

qui en résulte, ne donne des résultats convergens vers la vraie valeur que dans le cas où $x<a$: ce n'est donc que dans ce cas qu'il est permis de l'employer à déterminer par approximation cette vraie valeur ; mais cependant l'expression

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.}$$

considérée en faisant abstraction du dernier terme, c'est-à-dire, comme contenant toujours des termes de la même forme, quelque loin qu'on la prolonge, est tellement liée avec la fraction $\frac{a}{a-x}$, que si une question nous conduisait à la série

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.}$$

nous serions en droit d'en conclure que la fonction cherchée n'est autre que $\frac{a}{a-x}$; ou si nous découvrions quelque propriété relative à une suite de termes tels que $1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+$ etc., nous pourrions affirmer qu'elle appartient à la fonction $\frac{a}{a-x}$. Pour sentir la vérité de cette assertion, il suffit d'observer que le développement régulier d'une fonction, considéré dans toute son étendue, vérifie l'équation qui caractérise cette fonction. Dans l'exemple que j'ai choisi, si on fait $\frac{a}{a-x}=y$, on en conclura l'équation

$$a-(a-x)y=0,$$

et si l'on substitue au lieu de la fonction y, son développement

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.},$$

on verra que, quelque loin qu'on pousse le calcul, les termes se détruiront toujours. On conçoit sans peine qu'il en serait de même de tout autre exemple, et d'ailleurs il s'en présentera un grand nombre dans la suite de ce Traité.

5. Si, pour employer avec sécurité un développement analytique, il n'est besoin que de s'assurer de la régularité de la série qui l'exprime, c'est-à-dire, de bien constater la loi suivant laquelle se forment tous ses termes, il faut discuter avec soin la convergence des séries numériques, pour en tirer des valeurs approchées de la quantité dont elles dérivent; et même on ne doit compter entièrement sur ces déterminations que lorsqu'on est en état d'assigner les limites de la différence qui peut se trouver entre elles et la vraie valeur. Pour que l'approximation soit commode et sûre, il est nécessaire que cette différence décroisse rapidement à mesure qu'on embrasse un plus grand nombre de termes, et qu'elle puisse être rendue moindre qu'aucune grandeur donnée,

quelque petite que soit cette grandeur. Il est évident que ces conditions ne sauraient être remplies à moins que les termes de la série proposée n'aillent en diminuant, puisqu'il faut que chaque terme ne change le résultat que par des différences de plus en plus petites. La discussion où je vais entrer, d'après D'Alembert, sur la convergence des séries résultantes du développement des puissances d'un binome, éclaircira suffisamment les remarques précédentes.

Son expression analytique étant mise sous la forme

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 \ldots\ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots.(m-n+2)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}x^{n-1} + \frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}x^n + \text{etc.}$$

fait voir que le rapport entre deux termes consécutifs quelconques est $\frac{m-n+1}{n}x$ (*Élém. d'Algèbre*); ainsi, pour que ces termes aillent en diminuant, il faut, abstraction faite du signe des nombres $m-n+1$ et x, que l'on ait

$$\frac{m-n+1}{n}x < 1.$$

Il est à propos de remarquer que le nombre m demeure le même dans toute l'étendue de la série, mais que le nombre n, nécessairement entier, augmente d'un terme à l'autre, et peut devenir aussi grand que l'on voudra, quand la série ne se termine point, ce que je suppose ici, où j'ai principalement en vue le développement des puissances négatives ou fractionnaires.

La première conséquence qui s'offre, c'est que la quantité

$$\frac{m-n+1}{n} = \frac{m+1}{n} - 1,$$

qui exprime le rapport des coefficiens consécutifs des puissances de x, s'approche sans cesse de -1, puisque la fraction $\frac{m+1}{n}$ ayant un numérateur constant et un dénominateur de plus en plus grand, devient de plus en plus petite. Il suit de là que le rapport des termes consécutifs de la série précédente tend sans cesse à se réduire à $-x$, et que par conséquent, quels que soient ses premiers termes, cette série doit toujours finir par être divergente, quand la valeur de x surpasse l'unité; on ne peut donc s'en servir que lorsque $x < 1$.

6. Considérons d'abord le cas où m est positif, et faisons $x=\frac{1}{a}$, $a>1$; la convergence ne commencera que lorsque le rapport des deux termes consécutifs devenant <1, les termes formeront une progression décroissante : ce sera donc lorsque

$$\frac{m-n+1}{na}<1,\quad \text{ou}\quad 1>\frac{m-n+1}{na},$$

condition qui se transforme successivement en

$$na>m-n+1,\quad na+n>m+1,\quad \text{ou}\quad n(a+1)>m+1,$$

et enfin
$$n>\frac{m+1}{a+1}.$$

Mais comme au second terme, $n=1$, la convergence se manifestera dès le commencement de la série, quand on aura $a>m$, puisqu'alors le nombre $\frac{m+1}{a+1}$ sera une fraction.

Soit pour exemple,

$$m=\frac{9}{2},\quad x=\frac{10}{11},$$

d'où
$$a=\frac{11}{10},\quad \frac{m+1}{a+1}=\frac{\frac{9}{2}+1}{\frac{11}{10}+1}=\frac{55}{21};$$

ici la convergence n'a lieu que lorsque $n>2$, c'est-à-dire au quatrième terme.

Si m était négative, la quantité $\frac{m-n+1}{na}$ deviendrait $\frac{-m-n+1}{na}$, et en faisant abstraction du signe du nombre $-m-n+1$, la condition relative à la convergence se changerait en

$$1>\frac{m+n-1}{na},\quad na>m+n-1,$$
$$na-n>m-1,\quad \text{d'où}\quad n>\frac{m-1}{a-1}.$$

Dans ce cas la convergence peut ne commencer que très-tard.

Soit pour exemple, $m=2$, $x=\frac{99}{100}$, il vient

$$a=\frac{100}{99},\quad \text{et}\quad n>99;$$

les 100 premiers termes de la série formeront donc une progression croissante.

7. Après avoir trouvé le terme où la série commence à être convergente, et avant lequel il n'est pas permis de s'arrêter, il faut chercher les limites de l'approximation; on y parvient assez simplement pour les séries qui nous occupent, par un procédé que D'Alembert a mis le premier en usage.

Je ferai d'abord observer que le rapport de deux termes consécutifs de la série proposée,

$$\frac{m-n+1}{n}x=\left(\frac{m+1}{n}-1\right)x=-\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x.$$

Les deux dernières expressions montrant que ce rapport change de signe quand on est parvenu au terme où $\frac{m+1}{n}<1$, je ne considérerai la série qu'au-delà de ce terme, afin de n'embrasser que la partie où la loi des signes est définitivement fixée; et je supposerai encore que x soit négatif, afin que le rapport des termes consécutifs ayant le signe $+$, tous soient de même signe. Cela posé, en désignant par N le terme $\frac{m(m-1)\ldots m-n+2}{1.2\ldots\ldots n-1}x^{n-1}$, qui est le $n^{ième}$, la série proposée prendra la forme

$$N+N\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x+N\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x.\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)x+\text{etc.} \qquad (f)$$

d'après laquelle il est évident que tous ses termes, excepté les deux premiers, seront plus grands que ceux de la progression par quotiens

$$N+N\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x+N\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x.\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x+\text{etc.}$$

et que tous, excepté le premier, seront moindres que ceux de la progression

$$N+Nx+Nx.x+\text{etc.}$$

La somme des termes de la série (f) sera donc comprise entre les sommes ou plutôt les *limites* (*Élém. d'Algèbre*) de ces deux progressions; et comme la raison de la première est $\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x$, et celle de la seconde, x, leurs limites respectives sont:

$$\frac{N}{1-\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x} \quad \text{et} \quad \frac{N}{1-x}.$$

Telles sont les limites, en plus et en moins, des diverses approximations que fournit la série (f); l'erreur sera par conséquent, au-dessous de leur différence, exprimée par

$$\frac{N\left(\frac{m+1}{n}\right)x}{(1-x)\left(1-\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x\right)}=\frac{N(m+1)\,x}{(1-x)\,(n+(m-n+1)\,x)}.$$

On voit assez facilement, dans la première forme de cette expression, qu'elle peut se réduire à tel degré de petitesse qu'on voudra, en prenant n de plus en plus grand; car le numérateur est susceptible de diminuer indéfiniment, par le décroissement du facteur $\frac{m+1}{n}$, et le dénominateur, en y supprimant même cette dernière fraction, ne peut pas tomber au-dessous de $(1-x)^2$, quantité invariable pour tous les termes de la série.

En employant, par exemple, la formule du binome, pour extraire la racine du nombre 2 mis sous cette forme : $\frac{9-1}{4}$, on aura

$$\sqrt{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{9-1}=\tfrac{3}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{9}}=\tfrac{3}{2}(1-\tfrac{1}{9})^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce cas, $m=\frac{1}{2}$; x étant déja supposé négatif, il suffit d'y substituer $\frac{1}{9}$, et si l'on veut s'arrêter au terme où $n=10$, il viendra

$$N=\frac{1.1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20}\cdot\frac{1}{9^{10}}=0{,}00000\ 00000\ 05;$$

les limites du reste de la série qui exprime la valeur de $(1-\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}}$, seront donc

$$\frac{N}{1-\frac{1}{9}(1-\frac{3}{20})},\qquad \frac{N}{1-\frac{1}{9}},$$

et l'erreur commise, sera moindre que

$$\frac{N.\frac{3}{2}.\frac{1}{9}}{(1-\frac{1}{9})\,(10+(\frac{1}{2}-9)\frac{1}{9})}=\frac{3.9N}{8.163}=0{,}00000\ 00000\ 0006.$$

Il ne reste plus qu'à multiplier ce nombre par $\frac{3}{2}$, pour obtenir la limite de l'approximation, relativement à la valeur de $\sqrt{2}$.

Si m était négative et >1, l'ordre de grandeur des deux progressions par quotiens, auxquelles j'ai comparé la série (f), serait inverse; car le rapport du terme N à celui qui le suit, étant alors $\left(\frac{m-1}{n}+1\right)x$, surpasse le rapport exprimé seulement par x; mais la série (f) demeurerait toujours comprise entre les progressions, et l'on en trouverait les limites comme ci-dessus.

8. J'ai supposé que tous les termes de la série (f) étaient de même signe, parce que c'est le cas le plus simple; mais il n'a plus lieu lorsque les quantités $\frac{m+1}{n}-1$ et x sont de signes différens, quand m est positive, et les quantités $-\left(\frac{m-1}{n}+1\right)$ et x, lorsque m est négative. Dans ces deux circonstances, les termes de la série (f) sont alternativement affectés du signe $+$ et du signe $-$.

Pour abréger, je représenterai alors la série (f) par

$$N - Px + Qx^2 - Rx^3 + Sx^4 - Tx^5 + \text{etc.};$$

elle se partage dans les suivantes :

$$N + Qx^2 + Sx^4 + \text{etc.} = K$$
$$-(Px + Rx^3 + Tx^5 + \text{etc.}) = L,$$

dont tous les termes sont de même signe, et dont on trouverait les limites, de la même manière qu'on a trouvé celles de la série (f), en substituant au rapport $\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x$, le rapport $\left(1-\frac{m+1}{n}\right)^2 x^2$, à cause que les termes sont pris ici de deux en deux.

Soient k et k' les limites de la série K, l et l' celles de la série L; ensorte que

$$K > k \text{ et } < k', \quad L > l \text{ et } < l':$$

si on retranche de la plus petite des limites de K, la plus grande de celles de L, on aura évidemment

$$K - L < k' - l;$$

et en faisant le contraire, on trouvera

$$K - L > k - l'.$$

Je ne m'arrêterai point à développer le calcul; mais je ferai observer que quand les termes d'une série sont en partie positifs et en partie négatifs, on ne peut rien conclure de la comparaison des limites correspondantes de chacune de ses parties; il ne servirait de rien de savoir ici que $k' > K$ et $l' > L$; car, ignorant la grandeur des excès, on ne saurait pas non plus si $k' - l'$ est au-dessus ou au-dessous de

$K - L$. Au reste, dans ce cas, la série proposée étant équivalente à

$$N - [(Px - Qx^2) + (Rx^3 - Sx^4) + \text{etc.}],$$

et à
$$N - Px + [(Qx^2 - Rx^3) + (Sx^4 - Tx^5) + \text{etc.}],$$

est visiblement $> N$ et $< N - Px$, si elle est convergente.

9. Quand on peut disposer à volonté de la quantité x, il est facile de rendre aussi convergente qu'on le veut une série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

dans laquelle le rapport des coefficiens consécutifs A et B, B et C, etc. n'est pas susceptible de croître à l'infini, quoique d'ailleurs ces coefficiens aillent sans cesse en augmentant. Cela se voit en comparant la série proposée avec une progression par quotiens, comme on l'a fait dans les n^{os} précédens; et on prouve par ce moyen qu'il existe toujours une valeur de x qui peut rendre le premier terme supérieur à la somme de tous les autres.

En effet, soient $Nx^n + Px^{n+1}$, les termes dans lesquels le rapport des coefficiens consécutifs, $\frac{P}{N}$, a la plus grande valeur; si r désigne ce rapport, et que l'on forme la progression par quotiens

$$A + Arx + Ar^2x^2 + Ar^3x^3 + \text{etc.},$$

tous les coefficiens Ar, Ar^2, Ar^3, etc. des puissances de x, surpasseront les coefficiens B, C, D, etc., puisque r surpasse $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, etc.; et mettant à part le premier terme, A, on trouvera que la somme des termes

$$Arx + Ar^2x^2 + Ar^3x^3 + \text{etc.}$$

surpassera celle des termes

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

de la série proposée. Or

$$Arx + Ar^2x^2 + Ar^3x^3 + \text{etc.} = \frac{Arx}{1 - rx},$$

expression dont on peut rendre la valeur aussi petite que l'on voudra, en donnant à x une valeur convenable; car si on prend $x = \frac{1}{rq}$, il viendra

$$\frac{Arx}{1 - rx} = \frac{A}{q - 1},$$

quantité qui décroîtra sans cesse, à mesure que l'on donnera à q des valeurs de plus en plus considérables.

La somme de tous les termes de la série proposée, à partir du second, étant moindre que $\frac{A}{q-1}$, pourra donc être rendue aussi petite que l'on voudra, et dans tel rapport que l'on voudra, avec le premier terme A.

Si on avait, par exemple, la série

$$2(10)^2x + 4(10)^4x^2 + 6(10)^6x^3 + 8(10)^8x^4 + \text{etc.},$$

dont la loi est telle, que deux termes consécutifs sont exprimés en général par

$$2n(10)^{2n}x^n + 2(n+1)(10)^{2n+2}x^{n+1},$$

on trouverait que le rapport des coefficiens de ces termes est

$$\frac{n+1}{n}(10)^2;$$

or en faisant successivement

$$n = 1, \quad n = 2, \quad n = 3, \quad \text{etc.},$$

la quantité $\frac{n+1}{n}$ devient

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \text{etc.}:$$

sa plus grande valeur est donc 2, et 200 est par conséquent le plus considérable des rapports qu'il y ait entre deux termes consécutifs. Prenant $r = 200$, $x = \frac{1}{200q}$, et désignant toujours par A le premier terme, la somme de tous les autres sera moindre que $\frac{A}{q-1}$, et par conséquent moindre que le premier terme A, dès qu'on fera seulement $q = 2$, ce qui suppose $x = \frac{1}{400}$.

Quelqu'étendu que soit le succès du procédé ci-dessus, pour rendre les séries convergentes, il y en a néanmoins dont il ne saurait corriger la divergence; ce sont celles dans lesquelles le rapport des coefficiens va toujours croissant. La série

$$1 + 1.2x + 1.2.3x^2 + 1.2.3.4x^3 + \text{etc.}$$

offre un exemple de ce cas.

Deux termes consécutifs quelconques y sont exprimés par

$$1.2.3\ldots(n+1)x^n + 1.2.3\ldots(n+2)x^{n+1},$$

et leur rapport, égal à $(n+2)x$, augmente sans cesse avec le nombre n, qui n'admet aucune limite : quelle que fût donc la petitesse de la valeur qu'on assignerait à x, comme cette valeur serait la même dans toute la série, la quantité $(n+2)x$ finirait toujours par surpasser l'unité et croîtrait même indéfiniment.

Cet exemple suffit pour faire voir qu'on ne doit s'appuyer qu'avec beaucoup de réserve sur les séries, lorsqu'on a pour but de parvenir à des valeurs approchées.

10. Les calculs précédens et la sommation des progressions par quotiens, décroissantes, font voir qu'il y a des quantités qui, quoique formées par l'addition d'un nombre illimité de termes, ne peuvent s'élever au-delà d'un certain degré de grandeur, et cela, parce que les fonctions dont elles sont le développement, ne sont point susceptibles d'un accroissement sans bornes : il est aisé de reconnaître cette dernière circonstance dans les fonctions dont on a l'expression algébrique.

Des limites des fonctions, et de ce qu'on entend par les infinis et les infiniment petits.

Soit d'abord la fonction très-simple $\frac{ax}{x+a}$, dans laquelle on suppose que x soit positif et augmente indéfiniment; en divisant par x les deux termes de cette fraction, le résultat

$$\frac{a}{1+\frac{a}{x}},$$

montre évidemment que la fonction demeure toujours moindre que a, mais qu'elle en approche sans cesse, puisque la partie $\frac{a}{x}$ de son dénominateur diminue de plus en plus et peut être réduite à tel degré de petitesse que l'on voudra. La différence entre a et la fraction proposée, étant exprimée en général par

$$a-\frac{ax}{x+a}=\frac{a^2}{x+a},$$

devient d'autant plus petite que x est plus grand, et *peut être rendue moindre qu'aucune grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur;* ensorte que *la fraction proposée peut approcher de* a *aussi près que l'on voudra :* a est donc la *limite* de la fonction $\frac{ax}{x+a}$, relativement à l'augmentation indéfinie que peut recevoir x.

C'est dans les caractères que je viens d'énoncer, que consiste la véritable acception qu'il faut donner au mot *limite*, pour y comprendre tout ce qui peut s'y rapporter.

Si l'on s'attachait à remarquer, dans l'exemple précédent, qu'en poussant aussi loin qu'on voudra l'augmentation de x, on ne pourra jamais regarder comme nulle la fraction $\frac{a^2}{x+a}$, on en conclurait avec raison que la fonction $\frac{ax}{x+a}$, quoique pouvant s'approcher indéfiniment de la limite a, ne saurait jamais l'atteindre, et à plus forte raison la surpasser; mais ce serait à tort qu'on insérerait cette circonstance, comme une condition dans la définition générale du mot *limite*: on en exclurait par là les rapports de quantités évanouissantes, rapports dont l'existence est incontestable, et dont on tire un grand parti dans l'analyse.

11. En effet, lorsque l'on compare les fonctions ax et $ax+x^2$, on trouve que leur rapport, réduit à sa plus simple expression, est $\frac{a}{a+x}$, et qu'il approche de plus en plus de l'unité, à mesure que x diminue. Il devient rigoureusement 1, quand $x=0$; mais les quantités ax et $ax+x^2$, qui sont alors rigoureusement nulles, peuvent-elles avoir un rapport déterminé? C'est ce qui ne paraît pas aisé à concevoir; et l'on n'en donne une notion claire, qu'en présentant la quantité 1 comme une limite dont le rapport des fonctions ax et $ax+x^2$ peut approcher aussi près que l'on voudra, puisque la différence

$$1-\frac{a}{a+x}=\frac{x}{a+x},$$

peut être rendue moindre qu'aucune grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.

D'un autre côté, le rapport $\frac{a}{a+x}$, des quantités ax et $ax+x^2$, peut non-seulement atteindre l'unité, quand on y fait $x=0$, mais la surpasser, lorsque l'on suppose x négatif, puisqu'il devient alors $\frac{a}{a-x}$, quantité qui surpasse 1, lorsque x est $<a$. Cette circonstance ne me paraît point contraire à l'idée de limite; car on peut regarder la valeur 1, qui répond à $x=0$, comme un terme vers lequel tend le rapport des fonctions ax et $ax+x^2$, par la diminution des valeurs de x, soit positives, soit négatives.

Dans la suite, les considérations géométriques feront encore mieux saisir le but de cette observation; mais il est d'ailleurs évident que les objections qu'on pourrait élever à cet égard n'auraient aucun fondement, puisqu'une définition de mots étant toujours arbitraire, doit être accordée toutes les fois qu'on n'emploie ces mots que suivant l'acception qui leur a été donnée : or l'application des limites se fait par des principes dont la vérité ne repose que sur la possibilité de prouver qu'une quantité variable peut approcher de sa limite aussi près que l'on voudra. Voici les plus importans :

1°. *Deux grandeurs qui sont la limite d'une même fonction sont égales entre elles.*

Car si cela n'était pas, ces deux grandeurs auraient une différence, et par conséquent la fonction proposée ne saurait approcher en même temps de l'une et de l'autre de ces grandeurs, de plus près que d'une quantité donnée, ce qui est contre la définition des limites.

2°. *La limite du rapport de deux fonctions est égale au rapport de leurs limites.*

Soient p et q les limites correspondantes des fonctions P et Q; on aura en général

$$P=p+\alpha,\qquad Q=q+\beta,$$

α et β désignant des quantités qui décroissent ensemble, et s'évanouissent en même temps; et il viendra

$$\frac{P}{Q}=\frac{p+\alpha}{q+\beta}\quad \text{et}\quad \frac{p+\alpha}{q+\beta}-\frac{p}{q}=\frac{q\alpha-p\beta}{(q+\beta)q},$$

fraction dont le dénominateur ne peut tomber au-dessous de q^2, tandis que le numérateur diminue sans cesse à mesure que α et β deviennent plus petits, ou à mesure que les fonctions P et Q approchent de leurs limites : $\frac{p}{q}$ est donc (10) la limite de $\frac{P}{Q}$.

12. L'expression très-générale

$$\frac{Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots\ldots}{A'x^{\alpha'}+B'x^{\beta'}+C'x^{\gamma'}+\ldots\ldots}$$

comprend une infinité de cas où le rapport de deux fonctions peut demeurer fini ou assignable, quoique chacune en particulier soit ou nulle ou infinie.

Pour en trouver la limite, lorsque x devient de plus en plus petit, il faut que les termes du numérateur et du dénominateur soient ordonnés de manière à commencer par le moindre des exposans de x, et alors on lui donnera la forme

$$\frac{x^{\alpha}\{A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \ldots\ldots\}}{x^{\alpha'}\{A' + B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \ldots\ldots\}}.$$

Cela fait, on distinguera trois cas, savoir:

$$\alpha > \alpha', \quad \alpha = \alpha', \quad \alpha < \alpha'.$$

Dans le premier, le rapport étant réduit à sa plus simple expression, devient

$$\frac{x^{\alpha-\alpha'}\{A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \ldots\ldots\}}{A' + B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \ldots\ldots};$$

et son numérateur seul s'évanouit, lorsque $x=0$; il tend donc à devenir nul à mesure que x diminue.

Il n'en est pas de même lorsque $\alpha = \alpha'$; car il se change en

$$\frac{A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \ldots\ldots}{A' + B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \ldots\ldots},$$

et si le nombre des termes de son numérateur et de son dénominateur est fini, ou s'il est possible, par des valeurs convenables de x, de rendre de plus en plus petites (9) les sommes des séries

$$Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \ldots\ldots,$$
$$B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \ldots\ldots;$$

ce rapport approchera sans cesse de la fraction déterminée $\frac{A}{A'}$, qui en sera la limite. Il est à remarquer qu'on tombe immédiatement sur cette limite, en faisant $x=0$.

Pour le troisième cas, où $\alpha < \alpha'$, on écrirait le rapport proposé ainsi qu'il suit:

$$\frac{A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \ldots\ldots}{x^{\alpha'-\alpha}\{A' + B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \ldots\ldots\}};$$

et comme alors son dénominateur s'évanouit dans la supposition de $x=0$, tandis que son numérateur se réduit à A, il devient infini et n'a donc pas de limite.

13. Quand on veut découvrir les limites de la fonction proposée, relatives à l'accroissement de x, il faut en ordonner les termes en commençant par l'exposant le plus élevé, et l'écrire ainsi :

$$\frac{x^{\alpha}\left\{A+\frac{B}{x^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{x^{\alpha-\gamma}}+\ldots\ldots\right\}}{x^{\alpha'}\left\{A'+\frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}}+\frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}}+\ldots\ldots\right\}};$$

ensuite la réduire à sa plus simple expression; et l'on aura, quand $\alpha>\alpha'$,

$$\frac{x^{\alpha-\alpha'}\left\{A+\frac{B}{x^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{x^{\alpha-\gamma}}+\ldots\ldots\right\}}{A'+\frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}}+\frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}}+\ldots\ldots}.$$

Considérant alors que les termes de la forme

$$\frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}},\quad \frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}},\ldots\ldots$$

diminuent à mesure que x augmente, on verra que la fonction proposée tend à devenir infinie, puisque son dénominateur ne tombe pas au-dessous de A', tandis que son numérateur augmente sans cesse, à cause du facteur $x^{\alpha-\alpha'}$ et de la quantité déterminée A.

Si l'on avait $\alpha=\alpha'$, le numérateur et le dénominateur tendraient à se réduire à leurs premiers termes A et A', et la fonction proposée aurait encore pour limite $\frac{A}{A'}$.

Quand $\alpha<\alpha'$, il vient

$$\frac{A+\frac{B}{x^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{x^{\alpha-\gamma}}+\ldots\ldots}{x^{\alpha'-\alpha}\left\{A'+\frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}}+\frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}}+\ldots\ldots\right\}};$$

dans ce cas le numérateur a seul une limite A, tandis que le dénominateur augmente à l'infini; la fonction proposée tend donc à devenir nulle, et n'a par conséquent point de limite assignable.

14. Tout ce qu'on vient de lire peut se résumer en très-peu de mots, si l'on observe que la limite de la fonction proposée ne dépend

que du rapport de ses premiers termes,

$$\frac{Ax^{\alpha}}{A'x^{\alpha'}},$$

rapport qui devient

$$\frac{Ax^{\alpha-\alpha'}}{A'}, \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'}, \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'x^{\alpha'-\alpha}},$$

selon que $\alpha > \alpha'$, $\alpha = \alpha'$, $\alpha < \alpha'$.

Il est donc permis et même nécessaire, quand on ne cherche que ce rapport, de négliger tous les autres termes de la fonction proposée.

On exprime d'une manière abrégée cette circonstance, en se servant des dénominations d'*infini* et d'*infiniment petit*, et en établissant pour principe que *toute puissance d'une quantité infinie disparaît devant celle d'un exposant plus élevé*, et qu'au contraire, *toute puissance d'une quantité infiniment petite s'évanouit vis-à-vis de celle d'un exposant moindre*.

En appliquant immédiatement ces principes à l'expression

$$\frac{Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots\ldots}{A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \ldots\ldots},$$

on la réduit sur-le-champ à

$$\frac{Ax^{\alpha}}{A'x^{\alpha'}},$$

lorsqu'elle est ordonnée en commençant par le plus haut exposant, dans la supposition de x infini, ou par le plus petit, dans la supposition de x infiniment petit.

Ce langage, très-commode par sa brièveté, et exact quant au fond, a été le prétexte d'un grand nombre d'objections, parce qu'il semble attribuer une existence actuelle à l'infini mathématique, qui n'est, à proprement parler, qu'une idée négative, puisqu'on appelle infinie ou infiniment petite une quantité parvenue au plus haut degré de grandeur ou au dernier degré de petitesse; et on ne conçoit pas alors comment il peut y avoir différens ordres d'infinis ou d'infiniment petits, ni même qu'une quantité puisse jamais être considérée comme actuellement infinie ou infiniment petite. En effet, il n'y a d'énonciation exacte que dans les axiomes suivans, sur lesquels se sont toujours appuyés les Géomètres anciens :

1°. *Quelque grande que soit une quantité, on peut en concevoir une autre qui la surpasse autant qu'on voudra.*

2°. *Quelque petite que soit une quantité, on peut en concevoir une qui soit encore au-dessous de celle-là.*

Si l'on rencontre quelquefois des expressions qui paraissent contraires à ces axiomes, il suffira de les analyser, avec quelqu'attention, pour se convaincre que l'infini ou l'infiniment petit ne s'y trouvent jamais considérés d'une manière absolue, mais qu'il s'agit toujours réellement de rapports qui tendent vers des limites assignables et dont l'existence est facile à concevoir; cette remarque paraîtra de plus en plus évidente, à mesure qu'on avancera dans la lecture de ce Traité. (Voyez d'ailleurs le Discours préliminaire.)

15. Passons maintenant au développement des fonctions en séries, et commençons par celui de $(p+x)^m$. Quoiqu'il se trouve dans presque tous les livres élémentaires, la manière dont on y parvient ne pouvant s'appliquer rigoureusement qu'au cas où m est un nombre entier positif, nous croyons devoir le démontrer de nouveau par un procédé qui ne soit pas sujet à cette restriction. D'ailleurs, pour peu qu'on soit versé dans l'Analyse, on sait que l'expression de $(p+x)^m$, due à Newton, sert au développement de presque toutes les fonctions : il est donc convenable, en traitant ce sujet, de commencer par là.

Développement des fonctions en séries.

1°. Des fonctions algébriques.

L'inspection des premières puissances de $(1+x)$, savoir:

$$\left.\begin{array}{l} (1+x) = 1+x \\ (1+x)^2 = 1+2x+x^2 \\ (1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 \\ (1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4 \\ \text{etc.}\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

conduit à supposer en général

$$(1+x)^m = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.};$$

les coefficiens A, B, C, D, etc. étant des nombres indépendans de x, ensorte qu'ils demeurent les mêmes, quelque valeur qu'on donne à cette quantité; mais on a $(p+x)^m = p^m\left(1+\frac{x}{p}\right)^m$: mettant donc dans la série proposée $\frac{x}{p}$ au lieu de x, on aura

$$(p+x)^m = p^m\left(1+A\frac{x}{p}+B\frac{x^2}{p^2}+C\frac{x^3}{p^3}+D\frac{x^4}{p^4}+\text{etc.}\right),$$

et en effectuant la multiplication par p^m, il viendra

$$(p+x)^m = p^m + Ap^{m-1}x + Bp^{m-2}x^2 + Cp^{m-3}x^3 + Dp^{m-4}x^4 + \text{etc.}\ldots(1),$$

équation qui doit se vérifier indépendamment d'aucune valeur particulière de p et de x, lorsque les coefficiens A, B, C, D, etc. seront déterminés convenablement.

Supposons maintenant que x se change en $x+u$, il faudra qu'on ait alors

$$(p+x+u)^m = p^m + Ap^{m-1}(x+u) + Bp^{m-2}(x+u)^2 + Cp^{m-3}(x+u)^3 + Dp^{m-4}(x+u)^4 + \text{etc.}\,.(2);$$

mais on peut encore présenter cette équation sous une autre forme, en posant $p+x=q$: alors $(p+x+u)^m$ deviendra $(q+u)^m$, et en substituant q à p et u à x, dans l'équation (1), il en résultera

$$(q+u)^m = q^m + Aq^{m-1}u + Bq^{m-2}u^2 + Cq^{m-3}u^3 + Dq^{m-4}u^4 + \text{etc.}\ldots(3)$$

Les seconds membres des équations (2) et (3) n'étant que les expressions d'une même quantité mise sous deux formes différentes, on peut les égaler, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} p^m + Ap^{m-1}(x+u) + Bp^{m-2}(x+u)^2 \\ \quad + Cp^{m-3}(x+u)^3 + Dp^{m-4}(x+u)^4 \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} q^m + Aq^{m-1}u + Bq^{m-2}u^2 \\ \quad + Cq^{m-3}u^3 + Dq^{m-4}u^4 \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right.$$

mais pour comparer entre eux les deux membres de cette dernière équation, il faut développer dans le premier les puissances de $(x+u)$ qui s'y trouvent : or en imitant l'équation (1), on verra qu'on peut supposer,

$$\begin{array}{l} x+u = x + a'u \\ (x+u)^2 = x^2 + a''xu + b''u^2 \\ (x+u)^3 = x^3 + a'''x^2u + b'''xu^2 + c'''u^3 \\ (x+u)^4 = x^4 + a^{\text{iv}}x^3u + b^{\text{iv}}x^2u^2 + c^{\text{iv}}xu^3 + d^{\text{iv}}u^4, \\ \quad \text{etc.}, \end{array}$$

les lettres a, b, c, d, etc. désignant des nombres indépendans de x et de u, et l'accent qui les affecte, marquant à quelle puissance elles appartiennent. En substituant ces valeurs et en ordonnant de manière que tous les termes affectés d'une même puissance de u se trouvent dans une même colonne, nous aurons ;

$$\left.\begin{array}{l} p^m \\ +Ap^{m-1}x \\ +Bp^{m-2}x^2 \\ +Cp^{m-3}x^3 \\ +Dp^{m-4}x^4 \\ +\text{ etc.} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} +Ap^{m-1}a' \\ +Bp^{m-2}a''x \\ +Cp^{m-3}a'''x^2 \\ +Dp^{m-4}a^{\text{iv}}x^3 \\ +\text{ etc.} \end{array}\right\} u \left.\begin{array}{l} +Bp^{m-2}b'' \\ +Cp^{m-3}b'''x \\ +Dp^{m-4}b^{\text{iv}}x^2 \\ +\text{ etc.} \end{array}\right\} u^2 \left.\begin{array}{l} +Cp^{m-3}c''' \\ +Dp^{m-4}c^{\text{iv}}x \\ +\text{ etc.} \end{array}\right\} u^3 + \text{etc.}$$
$$= q^m \quad + \quad Aq^{m-1}u + \quad Bq^{m-2}u^2 + \quad Cq^{m-3}u^3 + \text{ etc.} \quad (4)$$

Puisque la valeur de x doit rester indéterminée dans l'équation (1), il est aisé de voir qu'il faut en dire autant de x et de u dans l'équation (4), qui n'est qu'une suite de la première ; or une telle condition ne peut être remplie, à moins que l'équation (4) ne devienne identique indépendamment de u ; c'est-à-dire, à moins que les quantités qui multiplient la même puissance de u dans l'un et l'autre membre, ne se détruisent mutuellement.

En comparant d'abord la première colonne de chaque membre, on trouve $p^m + Ap^{m-1}x + Bp^{m-2}x^2 + Cp^{m-3}x^3 + Dp^{m-4}x^4 + \text{etc.} = q^m$, résultat identique par l'hypothèse même, puisque $q^m = (p+x)^m$.

Passant à la seconde colonne on trouve :

$$Ap^{m-1}a' + Bp^{m-2}a''x + Cp^{m-3}a'''x^2 + Dp^{m-4}a^{\text{iv}}x^3 + \text{etc.} = Aq^{m-1},$$

équation qui nous suffira pour déterminer les coefficiens A, B, C, D, etc. En effet, $q^{m-1} = \frac{q^m}{q} = \frac{(p+x)^m}{p+x}$; mettant au lieu de $(p+x)^m$, son expression, on aura, en chassant le dénominateur,

$$(Ap^{m-1}a' + Bp^{m-2}a''x + Cp^{m-3}a'''x^2 + Dp^{m-4}a^{\text{iv}}x^3 + \text{etc.})(p+x)$$
$$= Ap^m + A^2p^{m-1}x + ABp^{m-2}x^2 + ACp^{m-3}x^3 + ADp^{m-4}x^4 + \text{etc.}$$

et en effectuant la multiplication indiquée,

$$Ap^m a' + \left.\begin{array}{l} Bp^{m-1}a'' \\ +Ap^{m-1}a' \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} +Cp^{m-2}a''' \\ +Bp^{m-2}a'' \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} +Dp^{m-3}a^{\text{iv}} \\ +Cp^{m-3}a''' \end{array}\right\} x^3 + \text{etc.}\ldots$$
$$= Ap^m + \quad A^2p^{m-1}x + \quad ABp^{m-2}x^2 + \quad ACp^{m-3}x^3 + \text{etc.}\ldots$$

Dans tous ces calculs il ne faut pas perdre de vue que A, B, C, D, etc. sont des nombres dans lesquels ni p, ni x, ni u ne sauraient entrer ; on doit donc traiter cette équation comme la précédente, et en comparant les coefficiens de chaque puissance de x, dans l'un et l'autre membre, on trouve :

$$\left.\begin{aligned} A &= Aa' \\ A^2 &= Ba'' + Aa' \\ AB &= Ca''' + Ba'' \\ AC &= Da^{\text{IV}} + Ca''' \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \text{d'où l'on tire} \left\{\begin{aligned} A &= Aa' \\ B &= \frac{A(A-a')}{a''} \\ C &= \frac{B(A-a'')}{a'''} \\ D &= \frac{C(A-a''')}{a^{\text{IV}}} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right.$$

La manière dont se forment ces équations est assez évidente pour qu'on puisse les pousser aussi loin qu'on voudra; et on voit aisément que si $Pp^{m-n}x^n$ et $Qp^{m-n-1}x^{n+1}$ représentent deux termes consécutifs du développement de $(p+x)^m$, on aura

$$AP = Qa'''\cdots^{(n+1)} + Pa'''\cdots^{(n)}, \text{ ce qui donne } Q = P\left\{\frac{A - a'''\cdots^{(n)}}{a'''\cdots^{(n+1)}}\right\},$$

expression dans laquelle n ne désigne pas une puissance de a, mais le nombre des accens que doit porter cette lettre.

Nous remarquerons que les coefficiens B, C, D, etc. seraient tous déterminés si on connaissait a', a'', a''', etc. A; mais ces derniers ne sont autre chose que les coefficiens du second terme dans les puissances du binome qui ont pour exposant les nombres 1, 2, 3, etc., m.

Il suit de là que du second terme du développement de $(p+x)^m$, on peut déduire tous les autres; car A étant le coefficient de ce second terme, on en doit tirer, comme des cas particuliers, ceux des seconds termes de $(p+x)$, $(p+x)^2$, $(p+x)^3$, etc.

16. On sait déjà que les seconds termes de ces premières puissances sont x, $2px$, $3p^2x$, etc.; il paraît naturel d'en conclure par analogie, que celui de $(p+x)^m$ sera $mp^{m-1}x$: il ne nous reste donc qu'à vérifier cette assertion, pour être en état d'assigner tous les coefficiens du développement cherché.

Parmi un assez grand nombre de moyens d'y parvenir, je choisirai le suivant, qui se lie avec une des plus ingénieuses démonstrations qu'on ait donnée du binome, due à Euler, et que j'ai rapportée ailleurs (*Complément des Élémens d'Algèbre*).

Quel que soit le coefficient de x dans le second terme du développement de $(1+x)^m$, il est nécessairement une fonction du seul exposant m, et je le désignerai en conséquence par $\mathrm{f}(m)$, la lettre f étant l'abréviation du mot fonction. D'après cette convention, il vient

$$(1+x)^m = 1 + x\,\mathrm{f}(m) + \text{etc.}$$

et de même

$$(1+x)^r = 1 + x\,\mathrm{f}(r) + \text{etc.}$$

En multipliant, membre à membre, ces deux équations, on en conclut

$$(1+x)^{m+r} = 1 + x\,\{\mathrm{f}(m) + \mathrm{f}(r)\} + \text{etc.};$$

mais par la notation établie on a aussi

$$(1+x)^{m+r} = 1 + x\,\mathrm{f}(m+r) + \text{etc.};$$

$\mathrm{f}(m+r)$ étant formée de $m+r$, comme $\mathrm{f}(m)$ et $\mathrm{f}(r)$ le sont respectivement de m et de r; et en comparant les deux développemens ci-dessus, il en résulte

$$\mathrm{f}(m+r) = \mathrm{f}(m) + \mathrm{f}(r),$$

équation qui exprime la propriété caractéristique de la fonction représentée par f.

Si l'on change r en $r+s$, l'équation précédente devient

$$\mathrm{f}(m+r+s) = \mathrm{f}(m) + \mathrm{f}(r+s);$$

mais la même équation donnant aussi

$$\mathrm{f}(r+s) = \mathrm{f}(r) + \mathrm{f}(s),$$

il en résultera

$$\mathrm{f}(m+r+s) = \mathrm{f}(m) + \mathrm{f}(r) + \mathrm{f}(s).$$

En écrivant $s+t$ au lieu de s, on parviendrait à

$$\mathrm{f}(m+r+s+t) = \mathrm{f}(m) + \mathrm{f}(r) + \mathrm{f}(s) + \mathrm{f}(t),$$

et ainsi de suite.

Cela posé, 1°. si on fait d'abord $r=1$, on obtient

$$\mathrm{f}(m+1) = \mathrm{f}(m) + \mathrm{f}(1), \quad \text{ou} \quad \mathrm{f}(m+1) = \mathrm{f}(m) + 1;$$

car r étant 1, $(1+x)^r$ se réduit à $1+x$, où le coefficient de x est 1, ensorte que $\mathrm{f}(1) = 1$.

Posant alors successivement

$$m=1, \quad m=2, \quad m=3, \quad \text{etc.},$$

on trouvera

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + 1 = 2, \\ f(3) &= f(2) + 1 = 3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(m-1) &= f(m-2) + 1 = m-1, \\ f(m) &= f(m-1) + 1 = m : \end{aligned}$$

voilà pour le cas où l'exposant m est un nombre entier.

2°. Soit $m = r = s = t$; l'équation

$$f(m + r + s + t) = f(m) + f(r) + f(s) + f(t)$$

devenant

$$f(4m) = 4f(m),$$

on en tirera

$$f(m) = \tfrac{1}{4}f(4m);$$

d'où il suit que si $4m$ est un nombre entier que je représenterai par i, on aura

$$f(4m) = i \quad \text{et} \quad f\left(\frac{i}{4}\right) = \tfrac{1}{4}i;$$

on s'éleverait de la même manière au cas où le nombre m serait une fraction quelconque $\frac{i}{k}$, et on trouverait $f\left(\frac{i}{k}\right) = \frac{i}{k}$.

3°. Enfin si l'on suppose $m+r=0$, cas dans lequel $f(m+r)=0$, et $(1+x)^0 = 1$, il en résulte que $f(0)$ est nécessairement nulle : on aura donc alors

$$f(m) + f(r) = 0, \quad \text{ou} \quad f(r) = -f(m);$$

mais aussi $m+r=0$ conduit à $r = -m$; donc

$$f(-m) = -f(m) = -m.$$

On peut donc affirmer que, *quel que soit le nombre représenté par* m, *pourvu qu'il soit rationnel, les deux premiers termes de* $(1+x)^m$ *sont* $1 + mx$. Je montrerai dans la suite, que quand l'exposant m serait irrationnel et même imaginaire, la proposition précédente serait toujours vraie.

17. Reprenons les équations

$$\left.\begin{aligned}
A &= Aa' \\
B &= \frac{A(A-a')}{a''} \\
C &= \frac{B(A-a'')}{a'''} \\
D &= \frac{C(A-a''')}{a^{\text{iv}}} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
Q &= \frac{P(A-a^{(n)})}{a^{(n+1)}} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\};$$

en y faisant

$$a'=1,\quad a''=2,\quad a'''=3,\quad a^{\text{iv}}=4\ldots\ldots A=m,$$

elles donneront

$$\begin{aligned}
A &= m \\
B &= A\frac{(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} \\
C &= B\frac{(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \\
D &= C\frac{(m-3)}{4} = \frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Q &= P\frac{(m-n)}{n+1} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

L'expression de Q contient la loi générale des coefficiens, et fait voir comment chacun d'eux se déduit de celui qui le précède.

En substituant les valeurs qu'on vient de trouver, on aura

$$(1+x)^m = \left\{\begin{aligned}
&1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 \\
&+\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^4+\text{etc.},
\end{aligned}\right.$$

et pour le *terme général*, où l'exposant de x, restant indéterminé, est représenté par n, il viendra

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,n}x^n.$$

18. Nous n'avons employé pour trouver les coefficiens A, B, C, D, etc. que les termes affectés de la première puissance de u dans l'équation (4); mais cependant nous serions en droit d'en conclure que les autres sont identiques dans chaque membre; car si cela n'était pas, il en résulterait de nouvelles équations auxquelles il serait impossible de satisfaire, puisque les quantités A, B, C, D, etc. sont déjà déterminées, et par conséquent il ne serait pas vrai de dire qu'on peut représenter le développement de $(1+x)^m$ par une série $1+Ax+Bx^2+Cx^3+$ etc., qui convienne à toutes les valeurs de x.

Quoique ces raisonnemens paraissent prouver d'une manière suffisante la légitimité du développement que nous avons obtenu, cependant pour ne rien laisser à desirer, je vais montrer que les autres termes de l'équation (4) se détruisent mutuellement.

Pour cela je reprendrai, dans l'équation (2), l'expression

$$p^m+Ap^{m-1}(x+u)+Bp^{m-2}(x+u)^2+Cp^{m-3}(x+u)^3+Dp^{m-4}(x+u)^4+\text{etc.},$$

dont le développement compose le premier membre de l'équation (4), et j'observerai qu'on peut effectuer ce développement à l'aide de ce qui précède, puisque les coefficiens A, B, C, D, etc. sont déterminés. Je vais donc chercher par quelle quantité la puissance quelconque u^n, serait multipliée. Il est aisé de voir qu'on ne saurait rencontrer u^n avant le terme affecté de $(x+u)^n$, mais qu'à partir de celui-là on le trouve dans tous, ensorte que si on développe les puissances de $(x+u)^n$, $(x+u)^{n+1}$, etc. en commençant par u au lieu de commencer par x, ce qui est indifférent, u^n sera au premier terme dans la première, au second terme dans la seconde, et ainsi de suite.

Supposons donc qu'on ait dans la série proposée, les termes suivans:

$$Pp^{m-n}(x+u)^n+Qp^{m-n-1}(x+u)^{n+1}+Rp^{m-n-2}(x+u)^{n+2}$$
$$+Sp^{m-n-3}(x+u)^{n+3}+\text{etc.};$$

il en résultera pour le coefficient de u^n,

$$Pp^{m-n}+\frac{(n+1)}{1}Qp^{m-n-1}x+\frac{(n+2)(n+1)}{1\,.\,2}Rp^{m-n-2}x^2$$
$$+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}Sp^{m-n-3}x^3+\text{etc.};$$

mais d'après la loi que nous avons trouvée dans les coefficiens du développement de $(p+x)^m$, on doit avoir

$$Q = \frac{(m-n)}{n+1}P$$
$$R = \frac{(m-n-1)}{n+2}\ Q = \frac{(m-n)}{(n+1)}\frac{(m-n-1)}{(n+2)}P$$
$$S = \frac{(m-n-2)}{n+3}\ R = \frac{(m-n)}{(n+1)}\frac{(m-n-1)}{(n+2)}\frac{(m-n-2)}{(n+3)}P$$
etc.;

en substituant ces valeurs et faisant les réductions qui s'offrent d'elles-mêmes, on obtiendra

$$P\Big\{p^{m-n} + \frac{(m-n)}{1}p^{m-n-1}x + \frac{(m-n)(m-n-1)}{1\,.\,2}p^{m-n-2}x^2 + \frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}p^{m-n-3}x^3 + \text{etc.}\Big\}.$$

Il est aisé de reconnaître que la quantité renfermée dans la parenthèse n'est autre chose que le développement de $(p+x)^{m-n}$; le coefficient de u^n sera donc, dans le premier membre de l'équation (4), $P(p+x)^{m-n}$; mais dans le second, il sera évidemment $Pq^{m-n} = P(p+x)^{m-n}$: l'identité est donc prouvée.

Quelque longs que paraissent les calculs précédens, ils méritent néanmoins une attention particulière, parce qu'ils ne sont fondés que sur des principes de la plus grande rigueur, et qu'ils conduisent, comme on le verra bientôt, à un grand nombre de résultats aussi utiles qu'élégans.

19. On pourrait faire usage des formules précédentes pour développer $(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)^m$ suivant les puissances de x; mais on peut y parvenir d'une manière plus simple, ainsi qu'on va le voir. Il est évident qu'on peut supposer

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots)^m = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.};$$

car si on met le premier membre de cette équation sous la forme d'un binome $(a+k)^m$ et qu'on le développe, le résultat, quel que soit m, ne contiendra que des puissances entières et positives de k, depuis la première inclusivement; et par conséquent si on remettait au lieu de cette dernière lettre sa valeur, cette substitution n'introduirait que des puissances entières et positives de x. Cela posé, si x se changeait en $x+u$, on aurait

$$\{a+b(x+u)+c(x+u)^2+d(x+u)^3+\ldots\ldots\}^m = A+B(x+u)+C(x+u)^2+D(x+u)^3+E(x+u)^4 + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots(1);$$

cette équation devant avoir lieu indépendamment d'aucune valeur particulière de x et de u, il faut que dans le développement de l'un et de l'autre membre, les termes qui multiplient chaque puissance de x et de u soient identiques. La fonction

$$a+b(x+u)+c(x+u)^2+d(x+u)^3+\text{etc.}$$

devient d'abord

$$\left.\begin{array}{l} a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots \\ \quad +bu+2cxu+3dx^2u+\ldots\ldots \\ \qquad +cu^2+3dxu^2+\ldots\ldots \\ \qquad\quad +\text{etc.} \end{array}\right\};$$

faisons pour abréger

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots = p,$$

$$\left.\begin{array}{l} (b+2cx+3dx^2+\ldots)u \\ \quad +(cu+3dxu+\ldots)u \\ \qquad +\text{etc.}\ldots\ldots \end{array}\right\} = qu,$$

et nous changerons le premier membre de l'équation (1) en

$$(p+qu)^m = p^m + mp^{m-1}qu + \frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}q^2u^2 + \text{etc.};$$

mais il nous suffira, comme dans le n° 15, de considérer les termes affectés de la première puissance de u, et nous nous bornerons en conséquence à $p^m + mp^{m-1}qu$. En remettant pour qu sa valeur, on verra qu'il faut en exclure la seconde ligne et les suivantes, parce qu'elles donneraient des termes affectés de u^2 et des puissances supérieures : il viendra donc pour résultat final

$$p^m + mp^{m-1}(b+2cx+3dx^2+\ldots\ldots)u.$$

Passons maintenant au second membre de l'équation (1) : il donne tout de suite

$$\begin{array}{l} A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.} \\ \quad +(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.})u. \end{array}$$

La première ligne n'est autre chose que la valeur supposée pour $(a+bx+cx^2+\dots)^m$ ou p^m; on aura donc en comparant les coefficiens de u,

$$mp^{m-1}(b+2cx+3dx^2+\dots)=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.};$$

mais $p^{m-1}=\frac{p^m}{p}$, mettant au lieu de p^m et de p leurs valeurs, on trouvera, en chassant les dénominateurs,

$$m(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.})\,(b+2cx+3dx^2+4ex^3+\dots)= (B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.})\,(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\dots):$$

faisant les multiplications indiquées, on aura

$$\left.\begin{array}{l} mbA+\left.\begin{array}{l} mbB \\ +2mcA \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}x+\left.\begin{array}{l} mbC \\ +2mcB \\ +3mdA \\ \\ \\ \end{array}\right\}x^2+\left.\begin{array}{l} mbD \\ +2mcC \\ +3mdB \\ +4meA \\ \\ \end{array}\right\}x^3+\left.\begin{array}{l} mbE \\ +2mcD \\ +3mdC \\ +4meB \\ +5mfA \end{array}\right\}x^4+\text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} aB+\left.\begin{array}{l} 2aC \\ +bB \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}x+\left.\begin{array}{l} 3aD \\ +2bC \\ +cB \\ \\ \\ \end{array}\right\}x^2+\left.\begin{array}{l} 4aE \\ +3bD \\ +2cC \\ +dB \\ \\ \end{array}\right\}x^3+\left.\begin{array}{l} 5aF \\ +4bE \\ +3cD \\ +2dC \\ +eB \end{array}\right\}x^4+\text{etc.} \end{array}\right.$$

En comparant les coefficiens des puissances homologues de x, on en déduira,

$$\begin{aligned}
&aB=mbA\\
&2aC=(m-1)bB+2mcA\\
&3aD=(m-2)bC+(2m-1)cB+3mdA\\
&4aE=(m-3)bD+(2m-2)cC+(3m-1)dB+4meA\\
&5aF=(m-4)bE+(2m-3)cD+(3m-2)dC+(4m-1)eB+5mfA\\
&\quad\text{etc.}
\end{aligned}$$

La loi de ces valeurs est facile à saisir : tous les coefficiens B, C, D, etc. seront déterminés lorsque A sera connu; mais on voit qu'il exprime la valeur du développement, lorsque $x=0$, et dans ce cas la fonction proposée $(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^m$ se réduit à a^m : on a donc $A=a^m$.

En calculant d'après cette valeur, celles des lettres B, C, D, etc., on trouvera facilement que la puissance m du polynome.......... $a+bx+cx^2+dx^3+$ etc. a pour expression

$$a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}bx+\left.\begin{array}{r}\dfrac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2\\ +\dfrac{m}{1}a^{m-1}c\end{array}\right\}x^2+\left.\begin{array}{rr}\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}b^3\\ +\quad \dfrac{m(m-1)}{1\,.\,1}a^{m-2}bc\\ +\quad \dfrac{m}{1}a^{m-1}d\end{array}\right\}x^3$$

$$+\left.\begin{array}{lr}&\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^{m-4}b^4\\ +&\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,1}a^{m-3}b^2c\\ +&\dfrac{m(m-1)}{1\,.\,1}a^{m-2}bd\\ +&\dfrac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}c^2\\ +&\dfrac{m}{1}a^{m-1}e\end{array}\right\}x^4+\left.\begin{array}{lr}&\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}a^{m-5}b^5\\ +&\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,1}a^{m-4}b^3c\\ +&\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,1}a^{m-3}b^2d\\ +&\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,1\,.\,2}a^{m-3}bc^2\\ +&\dfrac{m(m-1)}{1\,.\,1}a^{m-2}be\\ +&\dfrac{m(m-1)}{1\,.\,1}a^{m-2}cd\\ +&\dfrac{m}{1}a^{m-1}f\end{array}\right\}x^5+\text{etc.}$$

20. Moivre, qui a le premier indiqué ce développement, a aussi donné des règles pour en former successivement tous les termes; mais elles sont peu commodes et ne reposent que sur des inductions; je ne m'y arrêterai point, parce que je dois exposer dans la suite des procédés plus féconds. Je ne puis cependant quitter ce sujet sans montrer sa liaison avec le développement de la puissance m du polynome $\alpha+\beta+\gamma+\delta+$ etc., dont les termes sont indépendans.

On parvient sans peine, par la formule du binome de Newton (Voyez le *Compl. des Élém. d'Alg.*, ou plus bas, n° 24), à prouver que tous les termes du développement de $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^m$ se tirent de l'expression

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m-n'+1}{1.2.3\ldots q\times 1.2.3\ldots r\times 1.2.3\ldots s\times\text{etc.}}\alpha^{m-n'}\beta^q\gamma^r\delta^s\ \text{etc.},$$

en prenant pour q, r, s, etc. tous les nombres entiers positifs (y compris zéro) qui satisfont à l'équation

$$q+r+s+\text{etc.}=n',$$

et donnant successivement à n' les valeurs 0, 1, 2, 3, etc. Maintenant si on fait

$$\alpha = a, \quad \beta = bx, \quad \gamma = cx^2, \quad \delta = dx^3, \quad \text{etc.},$$

le polynome à développer deviendra

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})^m;$$

l'expression qui comprend tous ses termes sera

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(m-n'+1)}{1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots r \times 1.2.3\ldots s \times \text{etc.}}\, a^{m-n'}b^q c^r d^s \text{ etc. } x^{q+2r+3s+\ldots}.$$

Mais comme on se propose toujours d'ordonner, suivant les puissances de x, le développement cherché, on doit, parmi les différens termes que donne l'expression ci-dessus, rassembler ceux qui sont affectés de la même puissance de x; c'est-à-dire que si l'exposant de la puissance dont on veut avoir le coefficient, est n, il faut, pour trouver les termes dont il se compose, donner aux lettres q, r, s, etc., toutes les valeurs entières et positives qui rendent

$$q + 2r + 3s + \text{etc.} = n,$$

et déterminer alors n' par l'équation

$$q + r + s + \text{etc.} = n'.$$

Voici le tableau de ces valeurs dans les premiers termes :

pour	$n = 0$,	on trouve	$q = 0,\ r = 0,\ s = 0,$ etc. $n' = 0$
	$n = 1$,	....	$q = 1,\ r = 0,\ s = 0, \ldots\, n' = 1$
	$n = 2$,	....	$q = 2,\ r = 0,\ s = 0, \ldots\, n' = 2$
			$q = 0,\ r = 1,\ s = 0, \ldots\, n' = 1$
	$n = 3$,	....	$q = 3,\ r = 0,\ s = 0, \ldots\, n' = 3$
			$q = 1,\ r = 1,\ s = 0, \ldots\, n' = 2$
			$q = 0,\ r = 0,\ s = 1, \ldots\, n' = 1$
	etc.		

Quand on a déterminé les exposans des lettres a, b, c, etc. pour chaque terme, le coefficient numérique qui doit les multiplier s'obtient tout de suite, en ayant l'attention de supprimer dans son dénominateur, les facteurs qui se rapportent à celles des lettres q, r, s, etc. qui sont nulles, ou pour mieux dire, qui n'entrent pas dans ce terme. Lorsque

$n=3$, par exemple, on a les trois termes

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3,\quad \frac{m(m-1)}{1\,.\,1}a^{m-2}bc,\quad \frac{m}{1}a^{m-1}d,$$

qui multiplient en effet x^3 (page 30).

La difficulté ne consiste, comme l'on voit, qu'à former toutes les combinaisons de nombres entiers et positifs qui peuvent satisfaire à l'équation

$$q+2r+3s+\text{etc.}=n,$$

suivant les diverses valeurs de n; on a imaginé pour cela divers procédés dont plusieurs sont très-ingénieux; c'est là spécialement le but de l'*Analyse combinatoire*, dont la première idée appartient à Leibnitz, et qui est très-cultivée en Allemagne; mais on s'en est beaucoup moins occupé dans les autres pays, et l'on y a substitué des méthodes plus analogues aux formes du calcul analytique (*).

2°. Des fonctions transcendantes.

Fonctions exponentielles.

21. La plus simple de toutes les fonctions transcendantes est celle qu'on connaît sous le nom d'*exponentielle*, et à laquelle on est conduit en considérant la relation qui existe entre un terme quelconque d'une progression par quotiens et le rang qu'il occupe. Si l'on nomme α le premier terme, a la raison, y le terme cherché et x le nombre de ceux qui le précèdent, on a, comme on sait, $y=\alpha a^x$; et dans cette équation, où α et a sont des quantités invariables, pour chaque progression, y est une fonction de x, et réciproquement x est une fonction de y; mais ces fonctions sont l'une et l'autre d'un ordre supérieur aux fonctions algébriques; car pour obtenir y, il faut effectuer un nombre indéterminé de multiplications et mêmes d'extractions de racines, si on donne à x des valeurs fractionnaires. L'équation $y=\alpha a^x$ changeant de degré à chaque valeur que prend x, Jean Bernoulli, qui s'en est occupé le premier, la nomma *équation parcourante*. Quant à la détermination de x en y, elle ne peut avoir lieu qu'en employant les logarithmes.

Nous allons donner les moyens de développer la fonction y, et nous ferons, pour plus de simplicité, $\alpha=1$, d'où il résultera $y=a^x$. Nous supposerons que a^x soit représenté par la série

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\text{etc.}$$

(*) En effet, l'*Analyse combinatoire* ne paraît, à l'égard des puissances des polynomes, que ce qu'était le *Triangle arithmétique de Pascal*, à l'égard de celles des binomes; mais on n'a point encore pour les premiers, l'équivalent de la formule donnée par Newton pour les seconds. (Voyez le Discours préliminaire.)

A_0, A_1, A_2, etc. sont des coefficiens indépendans de x, et les chiffres inférieurs o, 1, 2, etc. marquent l'exposant de la puissance de x qui multiplie la lettre à laquelle ils sont attachés; ainsi A_m sera le coefficient de x^m. Cette notation, qui d'abord paraît un peu compliquée, est néanmoins très-commode, et très-propre à faire reconnaître la loi qui règne entre les valeurs des coefficiens.

On demandera peut-être quelle considération a déterminé le choix de la série, et pourquoi elle procède suivant les puissances ascendantes de x : il sera facile de répondre à ces questions. En effet la fonction a^x devient égale à l'unité lorsqu'on y fait $x=0$, et si on eût supposé à la série la forme suivante $A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+$ etc., on voit que dans la même circonstance tous les termes de cette série seraient devenus infinis; elle n'aurait donc pu représenter la fonction proposée. En général, si la forme de la série ne convenait pas au développement cherché, le calcul conduirait à des relations contradictoires entre les coefficiens. Il suit de là que pour pouvoir compter sur les résultats de la méthode des *coefficiens indéterminés* que nous employons ici, il faut s'être assuré qu'on ne rencontrera pas de semblables relations, quelque loin qu'on pousse le calcul; or c'est ce dont on ne saurait répondre, dans le cas où la série est infinie, que lorsqu'on peut assigner la loi que suivent ses termes.

Cela posé, si x devient $x+u$, la fonction a^x se changera en a^{x+u}; mais puisque les coefficiens A_0, A_1, A_2, etc. sont indépendans de toute valeur particulière de x, il faut qu'on ait également

$$a^x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \text{etc.},$$
$$a^u = A_0 + A_1u + A_2u^2 + A_3u^3 + \text{etc.},$$

enfin

$$a^{x+u} = A_0 + A_1(x+u) + A_2(x+u)^2 + A_3(x+u)^3 + \text{etc.};$$

et à cause de $a^x \times a^u = a^{x+u}$, il faut que le produit des deux premières séries soit égal à la dernière. Pour ordonner les différens produits partiels, il suffira de reculer d'un rang à mesure qu'on changera de multiplicateur dans la seconde série, et de placer dans une même colonne tous les termes résultans d'une même puissance de $(x+u)$ dans la troisième série; on aura ainsi

$$\left.\begin{array}{llllll}
A_0A_0 & + A_0A_1x & + A_0A_2x^2 & + A_0A_3x^3 & + A_0A_4x^4 & + \text{etc.} \\
 & + A_1A_0u & + A_1A_1ux & + A_1A_2ux^2 & + A_1A_3ux^3 & + \text{etc.} \\
 & & + A_2A_0u^2 & + A_2A_1u^2x & + A_2A_2u^2x^2 & + \text{etc.} \\
 & & & + A_3A_0u^3 & + A_3A_1u^3x & + \text{etc.} \\
 & & & & + A_4A_0u^4 & + \text{etc.}
\end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{llllll}
A_0 & + A_1x & + A_2x^2 & + A_3x^3 & + A_4x^4 & + \text{etc.} \\
 & + A_1u & + 2A_2ux & + 3A_3ux^2 & + 4A_4ux^3 & + \text{etc.} \\
 & & + A_2u^2 & + 3A_3u^2x & + 6A_4u^2x^2 & + \text{etc.} \\
 & & & + A_3u^3 & + 4A_4u^3x & + \text{etc.} \\
 & & & & + A_4u^4 & + \text{etc.}
\end{array}\right.$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient u et x, il s'ensuit nécessairement que ces quantités ne doivent pas entrer dans la détermination des coefficiens, et que par conséquent chacun des termes du premier membre doit être détruit par celui qui lui correspond dans l'autre membre; on aura donc $A_0A_0 = A_0$, ce qui donne $A_0 = 1$, valeur qu'on mettra partout au lieu de A_0 et qui dispensera d'écrire cette lettre dans les termes où elle se rencontre. Il résultera de cette omission, que la première ligne du premier membre sera identique avec la première du second membre; ce sera par conséquent dans la deuxième que nous chercherons les équations qui donnent les coefficiens, et nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}
A_1 = A_1 \\
A_1A_1 = 2A_2 \\
A_1A_2 = 3A_3 \\
A_1A_3 = 4A_4. \\
\text{etc.}
\end{array}\right\} \text{d'où on tire} \left\{\begin{array}{l}
A_1 = \dfrac{A_1}{1} \\
A_2 = \dfrac{A_1^2}{1.2} \\
A_3 = \dfrac{A_1^3}{1.2.3} \\
A_4 = \dfrac{A_1^4}{1.2.3.4} \\
\text{etc.}
\end{array}\right.$$

et en général

$$A_1A_{m-1} = mA_m, \qquad A_m = \frac{A_1^m}{1.2.3\ldots.m}.$$

Les coefficiens étant tous déterminés par ces équations, à l'exception du deuxième, A_1, il s'ensuit que si la forme que nous avons supposée au développement de a^x est légitime, la troisième ligne du premier membre et les suivantes doivent devenir identiques d'elles-mêmes avec celles qui leur correspondent dans le deuxième membre (*).

Pour vérifier cette condition nous prendrons, dans le premier membre, un terme quelconque $u^m x^n$; son coefficient sera évidemment $A_m A_n$ ou $\frac{A_1^m}{1.2.3\ldots m} \times \frac{A_1^n}{1.2.3\ldots n} = \frac{A_1^{m+n}}{1.2\ldots m \times 1.2\ldots n}$. Le même terme $u^m x^n$ faisant partie de la puissance $m+n$ de $x+u$, dans le second membre, a pour coefficient

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots\ldots(m+1)A_{m+n}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n};$$

mais

$$A_{m+n} = \frac{A_1^{m+n}}{1.2.3\ldots(m+n)};$$

substituant cette valeur et effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, savoir : tous les nombres depuis $m+n$ jus-

---

(*) J'aurais pu me dispenser de faire la vérification indiquée; car ayant effacé de part et d'autre, dans la première équation, les termes identiques, et divisé ensuite les deux membres par u, j'aurais trouvé

$$\left.\begin{array}{llll} A_1 + A_1^2 x + & A_1 A_2 x^2 + & A_1 A_3 x^3 + & \text{etc.} \\ \quad + A_2 u + & A_2 A_1 u x + & A_2 A_2 u x^2 + & \text{etc.} \\ \quad + \text{etc.} & & & \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{llll} A_1 + 2A_2 x + & 3A_3 x^2 + & 4A_4 x^3 + & \text{etc.} \\ \quad + A_2 u + & 3A_3 u x + & 6A_4 u x^2 + & \text{etc.} \\ \quad + \text{etc.} & & & \end{array}\right.$$

mais comme cette équation doit avoir lieu quel que soit u, on peut y faire $u=0$, alors chacun de ses membres se réduit à la première ligne, et l'on n'a que les équations trouvées plus haut. Cependant, quoique cette marche soit plus courte que celle que j'ai suivie, j'ai cru devoir préférer la dernière, parce qu'elle ne laisse rien à desirer sur l'exactitude du développement, et que par cette raison elle satisfera davantage ceux qui n'ont pas encore une grande habitude de l'analyse.

Ce que je viens de dire s'applique également aux numéros 37 et 38, et je me dispenserai de le répéter.

J'aurais pu partir aussi d'une propriété plus simple pour déterminer le développement de a^x, employer, par exemple, l'équation $a^{2x} = a^x \times a^x$; mais l'équation $a^x \times a^u = a^{x+u}$, qui comprend la précédente, est plus générale, et renferme toutes les propriétés dont la fonction a^x est susceptible, parce qu'elle en exprime la définition la plus étendue, et la seule qui présente un sens lorsque la variable x est imaginaire.

qu'à $m+1$ inclusivement, on a pour résultat

$$\frac{A_1^{m+n}}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots m},$$

c'est-à-dire le même que précédemment. L'identité est donc démontrée, et nous pouvons en conclure que

$$a^x = 1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_1^2 x^2}{1.2} + \frac{A_1^3 x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

22. Il reste encore à déterminer A_1 : pour cela nous ferons $x = \frac{1}{A_1}$, et nous aurons

$$a^{\frac{1}{A_1}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

série, dont la convergence devient de plus en plus rapide, puisque le rapport des termes consécutifs diminue sans cesse. En la poussant jusqu'au dixième terme, elle donne 2,7182818, et en désignant par e sa valeur exacte, dont on peut approcher aussi près que l'on voudra, il viendra

$$a^{\frac{1}{A_1}} = e.$$

Prenant le logarithme de chaque membre de cette équation, on obtiendra

$$\frac{1}{A_1}\,\mathrm{l}a = \mathrm{l}e, \quad \text{d'où} \quad A_1 = \frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e};$$

et avec cette valeur de A_1, on trouvera

$$a^x = 1 + \frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e}\frac{x}{1} + \left(\frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e}\right)^2 \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e}\right)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Ce développement se simplifie quand on prend les logarithmes dans le système dont la base est le nombre e, puisqu'alors $\mathrm{l}e = 1$; et en distinguant par la caractéristique l' cette espèce de logarithmes, il vient

$$a^x = 1 + (\mathrm{l}'a)\frac{x}{1} + (\mathrm{l}'a)^2 \frac{x^2}{1.2} + (\mathrm{l}'a)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Enfin si l'on suppose $a = e$, on a simplement

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Les diverses séries rapportées ci-dessus finissent toujours par devenir convergentes, quelque valeur que l'on donne à x; car dans la série

$$1+\frac{A_1x}{1}+\frac{A_1^2x^2}{1.2}+\frac{A_1^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

qui les comprend toutes, deux termes consécutifs étant de la forme

$$\frac{A_1^nx^n}{1.2\ldots.n}+\frac{A_1^{n+1}x^{n+1}}{1.2\ldots.(n+1)};$$

leur rapport sera $\frac{A_1x}{n+1}$; or en prolongeant la série, on doit nécessairement rencontrer un terme dans lequel le nombre $n+1$ surpassera la quantité A_1x; et à partir de ce terme, la série deviendra de plus en plus convergente.

23. Voici une propriété bien remarquable du développement de a^x. Puisque $(a^x)^m = a^{mx}$, il s'ensuit que

$$\left(1+\frac{A_1x}{1}+\frac{A_1^2x^2}{1.2}+\frac{A_1^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)^m$$
$$=1+\frac{mA_1x}{1}+\frac{m^2A_1^2x^2}{1.2}+\frac{m^3A_1^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

et l'on obtient ainsi avec la plus grande facilité le développement d'une puissance quelconque de la série qui exprime a^x, développement qui serait très-long à calculer par les formules du n° 19.

24. Le développement de e^x (22) conduit aussi très-simplement à l'expression du terme général de la puissance m d'un polynome quelconque. Soit $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc.}$ ce polynome; si l'on substitue à x la quantité $(\alpha+\beta+\gamma+\delta\ldots)x$, on aura d'abord

$$e^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta\ldots)x}=e^{\alpha x}.e^{\beta x}.e^{\gamma x}.e^{\delta x}.\text{etc.};$$

et remplaçant les exponentielles par leurs développemens, on formera l'équation

$$1+\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})x}{1}+\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^2x^2}{1.2}$$
$$+\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$
$$=\left(1+\frac{\alpha x}{1}+\frac{\alpha^2x^2}{1.2}+\frac{\alpha^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\left(1+\frac{\beta x}{1}+\frac{\beta^2x^2}{1.2}+\frac{\beta^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\left(1+\frac{\gamma x}{1}+\frac{\gamma^2x^2}{1.2}+\frac{\gamma^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\left(1+\frac{\delta x}{1}+\frac{\delta^2x^2}{1.2}+\frac{\delta^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\ \text{etc.}$$

Le terme général du premier membre étant

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^m x^m}{1.2\ldots m},$$

il faudra, pour obtenir les termes correspondans du second membre, choisir dans le produit indiqué, ceux qui sont affectés de la puissance m de x; or un terme quelconque de ce produit sera composé de facteurs pris, un à un, dans chacune des séries dont la multiplication est indiquée, et sera par conséquent de la forme

$$\frac{\alpha^p x^p}{1.2.3\ldots p}\times\frac{\beta^q x^q}{1.2.3\ldots q}\times\frac{\gamma^r x^r}{1.2.3\ldots r}\times\frac{\delta^s x^s}{1.2.3\ldots s}\times\text{etc.},$$

qui revient à

$$\frac{\alpha^p\beta^q\gamma^r\delta^s\,\text{etc.}\ x^{p+q+r+s+\ldots}}{1.2.3\ldots p\times1.2.3\ldots q\times1.2.3\ldots r\times1.2.3\ldots s\times\text{etc.}}:$$

ainsi l'ensemble des combinaisons dans lesquelles on aura

$$p+q+r+s+\text{etc.}=m,$$

donnera tous les termes affectés de x^m, et sera par conséquent le développement de $\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^m}{1.2.3\ldots.m}$. En multipliant ces termes par le produit $1.2.3\ldots.m$, on aura le développement de $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^m$; ce dernier résultera donc de l'expression

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots m\,\alpha^p\beta^q\gamma^r\delta^s.\text{etc.}}{1.2.3\ldots p\times1.2.3\ldots q\times1.2.3\ldots r\times1.2.3\ldots s\times\text{etc.}},$$

en donnant aux nombres entiers p, q, r, s, etc. toutes les valeurs positives, en commençant par zéro, qui peuvent satisfaire à l'équation

$$p+q+r+s+\text{etc.}=m.$$

Cette manière d'obtenir le terme général de la puissance indéfinie du polynome, est due à M. Lagrange. Elle suppose que l'exposant m est entier et positif; mais pour l'étendre aux autres cas, il suffit de décomposer le polynome en deux parties.

En l'écrivant ainsi :

$$\{\alpha+(\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})\}^m,$$

on tire d'abord de la formule du binome, la série

$$\alpha^m+\frac{m\alpha^{m-1}}{1}(\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-2}(\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^2+\text{etc.},$$

dont le terme général est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n'+1)}{1.2.3\ldots\ldots n'}\alpha^{m-n'}(\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^{n'}\ldots.(1)$$

et où le nombre n' est entier et positif; le terme général du polynome $(\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^{n'}$, sera donc, d'après la dernière formule de la page précédente,

$$\frac{1.2.3\ldots n'\beta^q\gamma^r\delta^s.\text{etc.}}{1.2.3\ldots q\times1.2.3\ldots r\times1.2.3\ldots s\times\text{etc.}},$$

sous la condition que $q+r+s+\text{etc.}=n'$: si on le met dans la formule (1), en observant de supprimer les facteurs $1.2.3\ldots n'$, communs au numérateur et au dénominateur, on aura l'expression

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n'+1)\alpha^{m-n'}\beta^q\gamma^r\delta^s.\text{etc.}}{1.2.3\ldots q\times1.2.3\ldots r\times1.2.3\ldots s\times\text{etc.}},$$

employée déja, n° 20, et dans laquelle il faut remarquer que les exposans fractionnaires ou négatifs ne porteront que sur le premier terme α du polynome proposé.

25. Puisque $A_1=\frac{\text{l}a}{\text{l}e}$, si on pouvait trouver une expression de A_1 Développement

des fonctions transcendantes.

Fonctions logarithmiques.

qui ne contînt que des termes algébriques en a, on aurait par là le développement de la fonction logarithmique; mais en faisant $a = 1 + b$, la fonction a^x devient $(1 + b)^x$, et peut se développer par le moyen de la formule du binome; on a alors :

$$(1 + b)^x = 1 + \frac{xb}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}b^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}b^4 + \text{etc.}$$

Pour comparer ce développement à celui que nous avons trouvé, n° 21, il faut l'ordonner par rapport aux puissances de x, ce qui lui donnera la forme suivante :

$$\begin{aligned} 1 &+ \left\{ b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.} \right\} x \\ &+ \left\{ b^2 - \frac{3b^3}{3} + \frac{11b^4}{3.4} + \text{etc.} \right\} \frac{x^2}{2} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

La loi du coefficient de x est facile à saisir; et comme c'est le seul dont nous ayions besoin pour déterminer A_1, nous aurons sur-le-champ $A_1 = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}$, ou en mettant au lieu de b sa valeur $a - 1$,

$$A_1 = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.};$$

et de là on tirera

$$\text{l}a = \text{l}e \left\{ (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.} \right\}.$$

Cette série n'est convergente que dans le cas où la quantité $a - 1$ est très-petite; mais on peut toujours la rendre telle par un artifice très-simple. En substituant $\sqrt[m]{a}$ au lieu de a, il viendra

$$\text{l}\sqrt[m]{a} = \text{l}e \left\{ (\sqrt[m]{a}-1) - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^4}{4} + \text{etc.} \right\};$$

mais on sait que $\text{l}a = m\,\text{l}\sqrt[m]{a}$: on aura donc

$$\text{l}a = m\text{l}e \left\{ (\sqrt[m]{a}-1) - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^4}{4} + \text{etc.} \right\};$$

or en prenant pour m un nombre de plus en plus grand, on peut faire ensorte que $\sqrt[m]{a}$ diffère aussi peu qu'on voudra de l'unité; et comme la quantité $\sqrt[m]{a}-1$ diminue bien plus rapidement que m n'augmente, l'expression de la peut devenir aussi convergente qu'on le voudra.

Pour rendre les opérations plus faciles, il faudra choisir le nombre m parmi ceux de la progression $2, 4, 8, 16, 32, \ldots 2^n$, afin de n'avoir que des racines quarrées à extraire. Il est à remarquer qu'on peut toujours faire ensorte que le premier terme de la série proposée, donne une valeur suffisamment approchée du logarithme de a. En effet, si on prend l'exposant n assez considérable pour qu'il y ait entre l'unité et le premier chiffre significatif de la racine extraite, au moins autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux dans le résultat final, le quarré, contenant un nombre de décimales double de celui de sa racine, tombera hors des limites qu'on s'est prescrites.

Soit pour exemple $a=10$: Briggs, en extrayant 54 fois de suite la racine quarrée de ce nombre, a trouvé pour résultat

$$1{,}00000\ 00000\ 00000\ 12781\ 91493\ 20032\ 35:$$

si on retranche l'unité, il viendra une fraction telle que le premier chiffre significatif de son quarré aura 31 zéros avant lui; la quantité $\sqrt[m]{a}-1$, donnera donc, dans ce cas, les 31 premiers chiffres décimaux de la valeur de toute la série; et quand le nombre mle, par lequel il faut la multiplier, aurait 20 chiffres dans sa partie entière, les 11 premiers chiffres décimaux du produit seraient encore ceux de la valeur exacte de la; sur quoi il faut observer que m, qui est ici 2^{54}, n'a que 17 chiffres, et que dans le système des logarithmes ordinaires, le est une fraction.

26. M. Lagrange, qui le premier a donné la série précédente, a encore remarqué qu'on peut en déduire une autre dont tous les termes soient de signe $+$, en prenant m négative, puisque

$$\sqrt[-m]{a}-1=\frac{1}{\sqrt[m]{a}}-1=-\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right),$$

et que quand a surpasse 1, on a $\sqrt[m]{a}>1$, et $\frac{1}{\sqrt[m]{a}}<1$. Par ce changement, et en observant que $\mathrm{l}a = -m\mathrm{l}\sqrt[-m]{a}$, on obtient

$$\mathrm{l}a = m\mathrm{le}\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^3+\text{etc.}\right\}.$$

Cette dernière série présente immédiatement une limite de $\mathrm{l}a$; car tous ses termes étant additifs, il s'ensuit que

$$\mathrm{l}a > m\mathrm{le}\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right).$$

La limite en sens contraire se conclut de l'autre série, en faisant attention que puisque ses termes sont décroissans, le second qui est négatif, combiné avec le troisième, qui est positif, donnera nécessairement un résultat négatif; qu'il en sera de même du quatrième et du cinquième, et de tous les autres termes de la série réduits deux à deux de cette manière; le premier est donc à lui seul plus grand que la vraie valeur : ainsi

$$\mathrm{l}a < m\mathrm{le}\,(\sqrt[m]{a}-1).$$

La différence entre les deux limites de $\mathrm{l}a$ est

$$m\mathrm{le}\left\{(\sqrt[m]{a}-1)-\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)\right\}=m\mathrm{le}\,\frac{(\sqrt[m]{a}-1)^2}{\sqrt[m]{a}},$$

et peut être rendue de plus en plus petite, à mesure que l'on augmente le nombre m.

27. Pour que $\mathrm{l}a$ soit déterminé, il faut faire une hypothèse sur $\mathrm{l}e$. La plus simple sans doute est de prendre $\mathrm{l}e = 1$, auquel cas on tombe sur l'espèce particulière de logarithmes indiquée ci-dessus (22) par la caractéristique l' et nommés jusqu'ici *logarithmes hyperboliques*, parce qu'on peut les déduire de la quadrature des espaces compris entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes; mais cette dénomination est vicieuse, car on peut également tirer de la quadrature de l'hyperbole en général, tous les systèmes de logarithmes. Il serait donc plus convenable d'appliquer aux premiers le nom de l'inventeur, et de consacrer ainsi la mémoire de celui qui a rendu un aussi grand service aux Mathématiques : on pourrait les appeler logarithmes de Néper, ou logarithmes *Népériens*.

Briggs changea le système de logarithmes adopté par Néper, et pour se conformer à celui de la numération, il établit pour base le nombre 10; il eut donc alors $l\,10 = 1$: mais en se bornant au premier terme de la série, on trouvera $l\,e = \frac{l\,a}{m(\sqrt[m]{a}-1)}$; et mettant au lieu de a le nombre 10, il viendra $l\,e = \frac{1}{m(\sqrt[m]{10}-1)}$.

On a vu précédemment que Briggs avait extrait cinquante-quatre fois de suite la racine quarrée du nombre 10; par conséquent, il eut $m = 2^n = 2^{54}$, et pour trouver le quotient $\frac{1}{2^{54}}$, il divisa l'unité cinquante-quatre fois de suite par 2, ce qui lui donna

$$0{,}00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 31257\ 827.$$

Substituant cette valeur au lieu de $\frac{1}{m}$ ainsi que celle de $\sqrt[m]{a}$, que nous avons rapportée plus haut, on aura, en supprimant dans le numérateur et dans le dénominateur, quinze zéros :

$$l\,e = \frac{0{,}5551\ 11512\ 31257\ 827}{1{,}2781\ 91493\ 20032\ 35} = 0{,}4342\ 94481\ 90325\ 18.$$

Ce nombre est celui par lequel il faut multiplier les logarithmes calculés dans l'hypothèse de $l\,e = 1$, pour avoir ceux de Briggs, ou des Tables ordinaires.

Si au contraire on voulait passer des logarithmes tabulaires à ceux de Néper, il faudrait diviser les premiers par le nombre que nous venons de trouver, ou, ce qui revient au même, les multiplier par $\frac{1}{l\,e} = 2{,}30258\ 50929\ 94045$. Il est bon d'observer que ce dernier résultat n'est autre chose que le logarithme de 10 dans le système de Néper; car en faisant $l\,e = 1$ on trouve $l'\,10 = m(\sqrt[m]{10}-1)$, ce qui est précisément l'inverse de la valeur trouvée précédemment pour $l\,e$.

Dans quelque système que ce soit, $l\,e$ est désigné par le nom de *module*; nous le représenterons en général par M; et puisque dans le système de Néper on a $M = 1$, nous en conclurons $l\,a = M l'a$, ou $M = \frac{l\,a}{l'a}$. Il suit de là que pour trouver le module d'un système quelconque de logarithmes, il faut évaluer le rapport qu'ont entre eux les logarithmes du même nombre, calculés l'un dans ce système, et l'autre dans celui de Néper.

Pour calculer le logarithme de 2, Briggs chercha celui de 1,024, nombre qui est égal à la dixième puissance de 2 divisée par 1000, parce que l'extraction des racines de l'un lui parut plus facile que celle de l'autre. Ayant pris 47 fois de suite la racine quarrée de 1,024, il opéra sur le résultat comme sur celui qu'il avait déduit du nombre 10, et parvint ainsi au logarithme népérien de 1,024, qu'il multiplia ensuite par le module, et dont il tira facilement le logarithme de 2, en observant que $1{,}024 = \frac{2^{10}}{1000}$. Nous ne pousserons pas plus loin l'exposition des calculs de Briggs, dont nous n'avons voulu donner qu'une légère idée.

28. Si dans la série qui exprime la valeur de a^x (21) on met au lieu de l'a sa valeur $\frac{\mathrm{l}a}{M}$, elle deviendra

$$a^x = 1 + \left(\frac{\mathrm{l}a}{M}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{\mathrm{l}a}{M}\right)^2\frac{x^2}{1.2.} + \left(\frac{\mathrm{l}a}{M}\right)^3\frac{x^3}{1.2.3.} + \left(\frac{\mathrm{l}a}{M}\right)^4\frac{x^4}{1.2.3.4.} + \text{etc.}$$

résultat qui s'étend à un système quelconque de logarithmes.

En faisant $x = 1$ on trouve

$$a = 1 + \left(\frac{\mathrm{l}a}{M}\right) + \frac{1}{1.2.}\left(\frac{\mathrm{l}a}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.}\left(\frac{\mathrm{l}a}{M}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4.}\left(\frac{\mathrm{l}a}{M}\right)^4 + \text{etc.}$$

Cette suite donne le nombre a, lorsqu'on connaît son logarithme et le module du système auquel il appartient.

29. Nous allons maintenant passer aux principales transformations que l'on a fait subir à la série qui exprime $\mathrm{l}a$, pour la rendre plus convergente et par conséquent plus propre à la construction des Tables de logarithmes.

Soit d'abord $a = 1 + u$; il viendra

$$\mathrm{l}(1+u) = M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{etc.}\right\};$$

série qui est assez commode pour calculer les logarithmes des nombres très-peu différens de l'unité. Quand $u = 1$, sa marche est si lente, qu'il faudrait calculer un grand nombre de termes pour arriver à un résultat un peu exact; car alors

$$\mathrm{l}(1+1) = \mathrm{l}2 = M(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \text{etc.}),$$

et si on fait $M = 1$, il vient $\mathrm{l}'2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$

En mettant $-u$ à la place de u, dans l'expression précédente de $l(1+u)$, on trouve

$$l(1-u)=M\left(-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}-\text{etc.}\right);$$

d'où on tire

$$l(1+u)-l(1-u)=l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)=2M\left(u+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\text{etc.}\right),$$

série dont la marche est plus rapide que celle de la première.

Soit fait $\frac{1+u}{1-u}=z$; on aura

$$u=\frac{z-1}{z+1},$$

et

$$lz=2M\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\text{etc.}\right\}.$$

Si, pour donner un exemple, on pose $z=2$, il viendra

$$l2=2M\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\text{etc.}\right\},$$

série beaucoup plus convergente que celle que nous avions obtenue d'abord.

Lorsqu'on évalue en décimales, chacune des fractions qui la composent, on trouve, en se bornant à sept chiffres décimaux,

$$l2=0,6931472M;$$

et dans le cas où $M=1$, il vient

$$l'2=0,6931472.$$

Pour connaître M, relativement au système de Briggs, il suffit de calculer le logarithme népérien de 10 et de le comparer à l'unité qui désigne le logarithme du même nombre, d'après Briggs: or la série précédente, en y faisant $z=10$, donne

$$l'10=2\left\{\frac{9}{11}+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5+\text{etc.}\right\},$$

série qui est encore convergente, mais moins que la précédente; c'est pourquoi j'indiquerai une autre voie pour arriver plus promptement au $l'10$, lorsque j'aurai fait quelques remarques sur l'expression de lz.

30. Il faut d'abord observer que la convergence de cette série diminue à mesure que z augmente, parce que la fraction $\frac{z-1}{z+1}$ approche de plus en plus de devenir égale à l'unité, valeur sur laquelle on tombe en faisant z infini (13). Il suit de là que la série

$$2\left\{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\text{etc.}\right\}$$

qu'on trouve en faisant

$$\frac{z-1}{z+1}=1, \quad \text{et} \quad M=1;$$

répond au logarithme d'un nombre infini, et a par conséquent une valeur infinie.

La série $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\text{etc.}$, n'est pas la seule série décroissante dont la somme n'ait aucune limite : celle qui suit :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.}$$

est encore dans le même cas (*), ainsi que l'on peut s'en convaincre en faisant attention qu'elle résulte de

$$l(1-u)=-M\left(u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^4}{4}+\text{etc.}\right),$$

lorsque l'on fait $u=1$, $M=1$, et qu'elle répond à $-l'o$; or on sait que le logarithme de o est infini négativement, dans les systèmes dont la base surpasse l'unité. (*Élém. d'Algèbre.*)

On parvient immédiatement à cette conclusion par la série qui exprime $l'(1-u)$, en y supposant $1-u=\frac{1}{z}$, ce qui donne

$$u=1-\frac{1}{z}=\frac{z-1}{z},$$

et

$$l'\frac{1}{z}=-\left\{\frac{z-1}{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{z-1}{z}\right)^4+\text{etc.}\right\};$$

car $l'\frac{1}{z}$ étant $-l'z$, devient infini négativement quand z est infini ; mais

(*) On la nomme *série harmonique*, parce qu'on en fait quelqu'usage dans le calcul des vibrations des cordes sonores.

alors la série se change en

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}:$$

cette dernière n'a donc aucune limite.

Une conséquence assez importante se présente ici, c'est que toute série dont les termes décroîtront plus rapidement que ceux de

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.},$$

aura nécessairement une limite; car $1\left(\frac{1}{z}\right)$ étant une quantité finie, tant que z n'est pas infini, il faut nécessairement que la suite des fractions

$$\frac{z-1}{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{z-1}{z}\right)^4+\text{etc.},$$

qui forme une série convergente et susceptible de l'application du procédé indiqué dans le n° 9, ait une limite, quelque approchante de l'unité que soit d'ailleurs la fraction $\frac{z-1}{z}$.

31. Pour retourner à mon sujet, qui était d'obtenir les logarithmes des nombres, par des suites d'autant plus convergentes que ces nombres sont plus grands, je ferai en premier lieu,

$$\frac{1+u}{1-u}=\frac{m}{n}, \quad \text{d'où} \quad u=\frac{m-n}{m+n},$$

et

$$1\frac{m}{n}=2M\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\text{etc.}\right\};$$

à cause de $1\frac{m}{n}=1m-1n$, on tire de là

$$1m-1n=2M\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\text{etc.}\right\},$$

série qui fera connaître la différence de deux logarithmes par le moyen de la somme et de la différence des nombres auxquels ils appartiennent.

En écrivant $n+z$, au lieu de m, le résultat ci-dessus prend la forme

$$1(z+n)=1n+2M\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{etc.}\right\},$$

et quand $z=1$, il devient

$$1(n+1)=1n+2M\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5}+\text{etc.}\right\},$$

séries d'autant plus convergentes que n est plus grand. La seconde donne avec beaucoup de facilité les logarithmes des nombres consécutifs, et on peut l'appliquer utilement à la recherche du module. En y faisant d'abord $n=1$, on trouve pour $l2$ la même valeur que dans le n° 29; mais comme en doublant le logarithme de 2 on a celui de 4, on peut prendre $n=4$, et il vient $\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{9}$, d'où

$$l'5=l'4+2\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\frac{1}{(9)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(9)^5}+\text{etc.}\right\},$$

série très-convergente. Ayant calculé, par son moyen, le logarithme népérien du nombre 5, on y ajoutera celui du nombre 2, et on aura le logarithme népérien de 10.

Quant à la série

$$l(n+z)=ln+2M\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{etc.}\right\},$$

elle est très-propre à calculer le logarithme d'un nombre qui sort des limites des Tables.

En effet supposons que ces Tables ne comprennent pas les nombres au-dessus de 10000, et que l'on demande le logarithme de 125283, il faudra décomposer ce nombre en deux parties, dont l'une se trouve dans les Tables, ce qui peut se faire en le considérant comme 125200+83, puisque le logarithme ordinaire de 1252 donne immédiatement celui de 125200: on prendra donc $n=125200$, et $z=83$. La série procédera alors suivant les puissances impaires de $\frac{83}{250483}$, fraction plus petite que $\frac{1}{3000}$.

32. L'expression de $l\frac{m}{n}$ qui dépend des puissances impaires de $\frac{m-n}{m+n}$ est la source d'un nombre indéfini de formules propres à calculer, par des approximations de plus en plus rapides, un logarithme, au moyen de plusieurs de ceux qui le précèdent. Ces formules s'obtiennent, ainsi qu'on va le voir, en prenant pour m et pour n des fonctions qui se décomposent en facteurs.

Soit d'abord

$$m=x^2,\quad n=(x-1)(x+1)=x^2-1;$$

il viendra

$$\mathrm{l}\frac{m}{n}=\mathrm{l}\frac{x^2}{x^2-1}=2\,\mathrm{l}x-\mathrm{l}(x-1)-\mathrm{l}(x+1);$$

$$\frac{m-n}{m+n}=\frac{1}{2x^2-1},$$

$$2\mathrm{l}x-\mathrm{l}(x-1)-\mathrm{l}(x+1)=2\mathrm{l}e\left\{\frac{1}{2x^2-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2x^2-1)^3}+\text{etc.}\right\};$$

d'où l'on tirera

$$\mathrm{l}(x+1)=2\mathrm{l}x-\mathrm{l}(x-1)-2\mathrm{l}e\left\{\frac{1}{2x^2-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2x^2-1)^3}+\text{etc.}\right\}.$$

Cette formule est très-convergente ; car lorsque $x=1000$, elle procède suivant les puissances impaires de $\frac{1}{1999999}$.

La forme à donner aux fonctions m et n était assez facile à deviner, dans le cas précédent ; le point essentiel étant que l'indéterminée x n'entre point dans le numérateur, afin que le dénominateur seul augmente de plus en plus avec les valeurs de x. Pour le troisième degré, on supposera

$$m=x^3+px^2+qx+r,\qquad n=x^3+px^2+qx+r',$$

afin d'avoir seulement $m-n=r-r'$; et il faudra déterminer les coefficiens p, q, r et r', de manière que les quantités m et n soient décomposables en facteurs commensurables. M. Delambre, dans l'Introduction dont il a enrichi les Tables trigonométriques de Borda, réduit les fonctions m et n à la forme

$$m=x^3+px+q,\qquad n=x^3+px-q,$$

et suppose en conséquence

$$m=(x-a)(x-b)(x+a+b),$$
$$n=(x+a)(x+b)(x-a-b),$$

d'où il résulte

$$p=-(ab+a^2+b^2),\qquad q=a^2b+ab^2,$$

$$\frac{m-n}{m+n}=\frac{2q}{2(x^3+px)},\qquad \mathrm{l}\frac{m}{n}=\mathrm{l}m-\mathrm{l}n=$$

$$\mathrm{l}(x-a)+\mathrm{l}(x-b)+\mathrm{l}(x+a+b)-\mathrm{l}(x+a)-\mathrm{l}(x+b)-\mathrm{l}(x-a-b)$$

$$=2\mathrm{l}e\left\{\frac{q}{x^3+px}+\frac{1}{3}\left(\frac{q}{x^3+px}\right)^3+\text{etc.}\right\},$$

équation qui fera connaître le logarithme du nombre $x+a+b$, au moyen de ceux de cinq nombres inférieurs.

On peut faire diverses hypothèses sur a et sur b; je ne m'arrêterai qu'à celle de $a=b=1$, qui donne $p=-3$, $q=2$, et

$$2l(x-1)+l(x+2)-2l(x+1)-l(x-2)=2le\left\{\frac{2}{x^3-3x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3+\text{etc.}\right\},$$

formule très-simple, qui fait connaître le logarithme du nombre $x+2$, par ceux de trois nombres inférieurs seulement. J'ai montré ailleurs (*Compl. des Élém. d'Alg.*) son usage pour obtenir promptement les logarithmes des plus petits nombres premiers, et M. Delambre a remarqué dans l'Introduction déjà citée, qu'on pouvait encore en tirer un parti plus avantageux. Cette formule, due à Borda, est remarquable en ce qu'elle a ramené l'attention sur toutes celles de son espèce, qu'on semblait ignorer tout-à-fait, quoiqu'il s'en trouvât une fort analogue dans le *Traité des Fluentes* de Muller, ouvrage publié il y a plus de 60 années.

Il est visible qu'en prenant pour m et pour n des fonctions d'un degré plus élevé que le troisième, on pourra parvenir à des formules encore plus convergentes, et que le choix de ces fonctions est assujéti aux conditions suivantes :

Trouver deux équations numériques qui, ne différant que par leur dernier terme, aient, l'une et l'autre, leurs racines commensurables et entières.

Tel est l'objet des recherches de M. Lavernède, citées dans la Notice des travaux de l'Académie du Gard, et dont M. Gergonne, professeur distingué à Nismes, m'a fait connaître trois résultats curieux, que j'insérerai ici à la suite de la formule de M. Haros, qui se rapporte au quatrième degré. Celle-ci s'obtient en faisant

$$\begin{aligned} m &= x^2(x-5)(x+5) &&= x^4-25x^2, \\ n &= (x-3)(x+3)(x-4)(x+4) &&= x^4-25x^2+144; \end{aligned}$$

et il en résulte

$$\frac{m-n}{m+n}=\frac{144}{2x^4-50x^2+144}=\frac{72}{x^4-25x^2+72},$$

$$\left.\begin{array}{r} 2lx+l(x-5)+l(x+5) \\ -l(x-3)-l(x+3)-l(x-4)-l(x+4) \end{array}\right\}=2le\left\{\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\text{etc.}\right\},$$

expression qui donne le logarithme de $x+5$ par ceux de six des nombres précédens.

La première formule de M. Lavernède, quoique du quatrième degré seulement, est encore un peu plus convergente, et ne comprend que six logarithmes : elle suppose

$$\begin{aligned} m &= x^2(x+5)^2 &&= x^4+10x^3+25x^2, \\ n &= (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) &&= x^4+10x^3+25x^2-36, \end{aligned}$$

et conduit à

$$\frac{m-n}{m+n} = \frac{36}{2x^4+20x^3+50x^2-36} = \frac{18}{x^4+10x^3+25x^2-18},$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\mathrm{l}x+2\mathrm{l}(x+5) \\ -\mathrm{l}(x-1)-\mathrm{l}(x+2)-\mathrm{l}(x+3)-\mathrm{l}(x+6) \end{array}\right\} = 2\mathrm{l}e\left\{\frac{18}{x^4+10x^3+25x^2-18}+\text{etc.}\right\},$$

d'où l'on déduirait $\mathrm{l}(x+6)$ par ceux de 5 des nombres précédens.

La seconde formule de M. Lavernède dérive des hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} m &= (x+2)\,(x+4)\,(x+10)\,(x-7)\,(x-9) = x^5-125x^3+3004x+5040, \\ n &= (x-2)\,(x-4)\,(x-10)\,(x+7)\,(x+9) = x^5-125x^3+3004x-5040, \end{aligned}$$

qui donnent

$$\frac{m-n}{m+n} = \frac{5040}{x^5-125x^3+3004x},$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{l}(x+2)+\mathrm{l}(x+4)+\mathrm{l}(x+10)+\mathrm{l}(x-7)+\mathrm{l}(x-9) \\ -\mathrm{l}(x-2)-\mathrm{l}(x-4)-\mathrm{l}(x-10)-\mathrm{l}(x+7)-\mathrm{l}(x+9) \end{array}\right\} = 2\mathrm{l}e\left\{\frac{5040}{x^5-125x^3+3004x}+\text{etc.}\right\},$$

et le logarithme $(x+10)$ par ceux de 9 des nombres précédens.

La troisième formule est du sixième degré et répond à

$$\begin{aligned} m &= x^2(x-7)^2(x+7)^2 &&= x^6-98x^4+2401x^2, \\ n &= (x-3)(x+3)(x-5)(x+5)(x-8)(x+8) &&= x^6-98x^4+2401x^2-14400, \end{aligned}$$

d'où il suit

$$\frac{m-n}{m+n} = \frac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200},$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\mathrm{l}x+2\mathrm{l}(x-7)+2\mathrm{l}(x+7) \\ -\mathrm{l}(x-3)-\mathrm{l}(x+3)-\mathrm{l}(x-5) \\ -\mathrm{l}(x+5)-\mathrm{l}(x-8)-\mathrm{l}(x+8) \end{array}\right\} = 2\mathrm{l}e\left\{\frac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200}+\text{etc.}\right\}.$$

Cette dernière formule est remarquable en ce que le premier terme de la série devient d'une telle petitesse, quand le nombre x est un peu grand, qu'on peut n'en pas tenir compte, supprimer ainsi la série, et

former par de simples additions et soustractions le logarithme de $x+8$, par ceux de 8 des nombres précédens. En effet la fraction $\frac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200}$ est au-dessous de 0,000 000 01, quand $x=100$,
et au-dessous de 0,000 000 000 000 01, quand $x=1000$.

Cependant quelque rapide que soit cette approximation, les calculateurs trouveraient peut-être plus commode encore, s'il s'agissait de former des Tables, d'employer la méthode des *différences successives*, dont il sera parlé dans le troisième volume de cet ouvrage.

33. Dans les divers développemens que j'ai rapportés pour les logarithmes, il ne s'en est trouvé aucun qui procédât suivant les puissances du nombre; et l'on n'a point d'expression de cette forme :

$$\mathrm{l}u = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + \text{etc.}:$$

la raison en est facile à appercevoir. Lorsque $u=0$, $\mathrm{l}u$ devient infini et négatif, ce à quoi la série précédente, ni toute autre qui ne contiendrait que des puissances positives de u, ne saurait se prêter; on ne peut pas non plus faire

$$\mathrm{l}u = A + \frac{B}{u} + \frac{C}{u^2} + \frac{D}{u^3} + \text{etc.},$$

parce qu'un semblable développement, ayant une valeur finie quand u est infini, ne saurait convenir à $\mathrm{l}u$, qui devient infini dans cette circonstance. Il est cependant possible de trouver un développement qui satisfasse à ces deux conditions; à la vérité, il ne peut exprimer, dans aucun cas, d'une manière commode, la valeur de $\mathrm{l}u$; mais comme il est remarquable par sa forme, et qu'il conduit à des analogies intéressantes entre les fonctions logarithmiques et circulaires, je ne le passerai pas sous silence.

On a $\mathrm{l}(1+u) = M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \text{etc.}\right\}$,

$$\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{u}\right) = M\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{3u^3} - \frac{1}{4u^4} + \frac{1}{5u^5} - \text{etc.}\right\};$$

en retranchant la seconde série de la première, on trouvera, à cause de $\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{u}\right) = \mathrm{l}(1+u) - \mathrm{l}u$,

$$\mathrm{l}(1+u) - \mathrm{l}\left(1+\frac{1}{u}\right) = \mathrm{l}u = M\left\{\left(u-\frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right) + \frac{1}{3}\left(u^3-\frac{1}{u^3}\right) - \text{etc.}\right\},$$

$$\text{ou } \mathrm{l}u = M\left\{(u-u^{-1}) - \frac{1}{2}(u^2-u^{-2}) + \frac{1}{3}(u^3-u^{-3}) - \text{etc.}\right\}.$$

54. Quoique la manière dont nous sommes parvenus au développement de la (25) soit très-rigoureuse, et semble ne rien laisser à desirer, on verra peut-être encore avec plaisir comment la transformation qui nous a conduit jusqu'à présent au développement des fonctions, s'applique à la fonction logarithmique.

D'après ce qui a été dit dans l'article précédent, nous devons supposer au développement du logarithme, une forme qui se réduise à zéro, lorsque le nombre auquel il appartient, devient égal à l'unité : or toute fonction rationnelle et entière de $z-1$ satisfait à cette condition: on pourra donc poser

$$\mathrm{l}\,z = A_1(z-1) + A_2(z-1)^2 + A_3(z-1)^3 + \text{etc.}$$

Pour simplifier la série, nous ferons $z-1=x$, d'où $z=1+x$, et par conséquent $\mathrm{l}(1+x)=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\text{etc.}$

Si nous supposons, comme à l'ordinaire, que x se change en $x+u$, il viendra

$$\mathrm{l}(1+x+u) = A_1(x+u) + A_2(x+u)^2 + A_3(x+u)^3 + \text{etc.};$$

mais en faisant $1+x=p$, $\mathrm{l}(1+x+u)$ devient $\mathrm{l}(p+u)$, puis à cause de $p+u=p\left(1+\frac{u}{p}\right)$, on a $\mathrm{l}(1+x+u)=\mathrm{l}\left(1+\frac{u}{p}\right)+\mathrm{l}p$, et, par l'hypothèse,

$$\mathrm{l}\left(1+\frac{u}{p}\right) = A_1\frac{u}{p} + A_2\frac{u^2}{p^2} + A_3\frac{u^3}{p^3} + \text{etc.}:$$

donc

$$\mathrm{l}(1+x+u) = \mathrm{l}p + A_1\frac{u}{p} + A_2\frac{u^2}{p^2} + A_3\frac{u^3}{p^3} + \text{etc.}$$

Comparant ensemble les deux valeurs de $\mathrm{l}(1+x+u)$, qui doivent être identiques, quel que soit u, on trouvera, en se bornant de part et d'autre aux termes qui multiplient la première puissance de cette quantité,

$$A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \text{etc.} = \frac{A_1}{p};$$

remettant au lieu de p sa valeur $(1+x)$, il viendra

$$(A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \text{etc.})(1+x) = A_1.$$

Si on effectue la multiplication indiquée, et qu'on détermine séparément les coefficiens de chaque puissance de x, on aura

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A_1 \\ 2A_2 + A_1 = 0 \\ 3A_3 + 2A_2 = 0 \\ 4A_4 + 3A_3 = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{d'où on tire} \left\{\begin{array}{l} A_1 = A_1 \\ A_2 = -\frac{A_1}{2} \\ A_3 = \frac{A_1}{3} \\ A_4 = -\frac{A_1}{4} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

résultats bien conformes à ceux qu'on a déjà trouvés, et dans lesquels il faut remarquer que le premier coefficient A_1 reste indéterminé, parce qu'il tient la place du module.

Il reste à prouver que toutes les équations qu'on tirerait de la comparaison des termes affectés de u^2 et des puissances supérieures, sont identiques. Pour cela je reprends l'équation

$$\mathrm{l}(1+x+u)=A_1(x+u)+A_2(x+u)^2\ldots+A_n(x+u)^n+A_{n+1}(x+u)^{n+1}+\text{etc.}$$

Il est aisé de voir que le coefficient de u^n dans le développement du second membre de cette équation sera

$$A_n+(n+1)A_{n+1}x+\frac{(n+2)(n+1)}{2}A_{n+2}x^2+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2\,.\,3}A_{n+3}x^3+\text{etc.};$$

et, d'après la loi trouvée précédemment, on a

$$\left.\begin{array}{l} (n+1)\,A_{n+1} \qquad\qquad + nA_n = 0 \\ (n+2)\,A_{n+2} + (n+1)\,A_{n+1} = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\},$$

$$\text{d'où il suit} \left\{\begin{array}{l} A_{n+1} = -\frac{nA_n}{n+1} \\ A_{n+2} = \frac{nA_n}{n+2} \\ A_{n+3} = -\frac{nA_n}{n+3} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Substituant ces valeurs, il vient,

$$A_n\left\{1-nx+\frac{n(n+1)}{2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{2\,.\,3}x^3+\text{etc.}\right\},$$

série qui n'est autre chose que le développement de $A_n(1+x)^{-n}$; mais le coefficient de u^n dans l'équation

$$l\left(1+\frac{u}{p}\right)=A_1\frac{u}{p}+A_2\frac{u^2}{p^2}+\ldots+A_n\frac{u^n}{p^n}\text{ etc.},$$

est $\frac{A_n}{p^n}=\frac{A_n}{(1+x)^n}=A_n(1+x)^{-n}$, résultat identique avec le précédent.

35. Nous pouvons maintenant prouver, comme nous l'avons annoncé (16), que, *quand même l'exposant* n *serait irrationnel ou imaginaire, les deux premiers termes de* $(1+x)^n$ *n'en seraient pas moins* $1+nx$.

En effet supposons $(1+x)^n$ développé dans la série $1+Ax+Bx^2+$etc., et faisons, pour abréger, $Ax+Bx^2+$ etc. $=px$, nous aurons $l(1+x)^n=l(1+px)$; mais $l(1+x)^n=nl(1+x)$: donc $l(1+px)=nl(1+x)$, ou, en développant

$$px-\frac{p^2x^2}{2}+\frac{p^3x^3}{3}-\text{etc.}=nx-\frac{nx^2}{2}+\frac{nx^3}{3}-\text{etc.};$$

et comme cette équation doit avoir lieu indépendamment de x, on aura, en mettant pour p sa valeur, et en se bornant aux termes affectés de la première puissance de x, $A=n$.

Il est facile de voir que cette démonstration est tout-à-fait indépendante de la nature du nombre n, et qu'elle ne renferme point de cercle vicieux, en se rappelant que nous n'avons rencontré dans la recherche de $l(1+x)$ que des puissances entières du binome.

36. La considération des limites conduit aussi très-bien aux développemens des fonctions exponentielles et logarithmiques : c'est ce que je vais montrer, en commençant par les dernières.

La méthode la plus élémentaire pour calculer les logarithmes, consiste à extraire de la base une racine d'un degré très-élevé, et qui, tombant fort près de l'unité, forme la raison d'une progression par quotiens dont les termes croissent par des différences assez petites pour qu'on puisse y trouver, au moins d'une manière suffisamment approchée, le nombre dont on cherche le logarithme. Ce nombre est alors exprimé par une puissance fractionnaire de la base, et l'exposant de cette puissance est le logarithme demandé. Afin d'appliquer surement la formule du binome à l'extraction de la racine de la base, il faut supposer que cette base soit peu différente de l'unité, ce qui est toujours permis, puisque dès qu'on connaît les logarithmes dans un système particulier, on les trouve aisément dans tout autre. (*Élém. d'Alg.*)

Soit donc $1+\beta$ cette base; il viendra

$$(1+\beta)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}\beta+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{2}\beta^2+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{2\,.\,3}\beta^3+\text{etc.},$$

série toujours convergente quand $m>1$, et $\beta<1$ (9). En l'écrivant ainsi:

$$1+\frac{1}{m}\left\{\beta+\frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)}{2}\beta^2+\frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{2\,.\,3}\beta^3+\text{etc.}\right\},$$

on voit que

$$(1+\beta)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{k}{m},$$

k désignant la série comprise entre les accolades, et dont la limite correspondante à m infinie (13) est

$$\beta-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}-\text{etc.}$$

Cela posé, si on représente par a un nombre quelconque, par A son logarithme, et que l'on fasse $A=\frac{n}{m}$, il en résultera d'abord

$$a=(1+\beta)^A=(1+\beta)^{\frac{n}{m}}=\left(1+\frac{k}{m}\right)^n,$$

puis

$$1+\frac{k}{m}=a^{\frac{1}{n}},\quad \frac{k}{m}=a^{\frac{1}{n}}-1,\quad \text{ou}\quad \frac{kA}{n}=a^{\frac{1}{n}}-1,$$

à cause que $m=\frac{n}{A}$: on aura donc $A=\frac{n}{k}(a^{\frac{1}{n}}-1)$; et si on pose $a=1+u$, en développant $(1+u)^{\frac{1}{n}}$ au moyen de la formule du binome, on obtiendra: $(1+u)^{\frac{1}{n}}-1=$

$$=\frac{1}{n}\left\{u+\frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}u^2+\frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2\,.\,3}u^3+\frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{2\,.\,3\,.\,4}u^4+\text{etc.}\right\},$$

d'où

$$A=\frac{1}{k}\left\{u-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2}u^2+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{2\,.\,3}u^3-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{2\,.\,3\,.\,4}u^4+\text{etc.}\right\}.$$

Mais plus on suppose le nombre m grand, plus n doit l'être, puisque A, qui est $\frac{n}{m}$, demeure le même tant que a et β ne changent point; la limite de l'accroissement de n correspond donc à celle de l'accroissement de m, et dans cette dernière circonstance, k se réduit à la série $\beta-\frac{\beta^2}{2}+$ etc., que, pour abréger, je remplacerai par k'. Faisant ensuite n infinie, il viendra

$$A=\frac{1}{k'}\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\text{etc.}\right).$$

Voilà l'expression du logarithme de a, ou de $1+u$, dégagée des nombres arbitraires m et n : elle ne se rapporte encore qu'au système dont la base est $1+\beta$; mais pour une base quelconque α, le logarithme cherché sera $\frac{A}{L\alpha}$ (*Élém. d'Alg.*), L étant la caractéristique particulière au premier système : on aura donc dans le second, en faisant $\frac{1}{k'L\alpha}=M$,

$$l(1+u)=M\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\text{etc.}\right),$$

résultat conforme à celui que nous avons trouvé par une voie bien différente.

Le problème inverse, où il s'agit d'exprimer le nombre par son logarithme, se résout en renversant l'équation $A=\frac{n}{k}(a^{\frac{1}{n}}-1)$ qui donne $a=\left(1+\frac{kA}{n}\right)^n$. En développant la puissance indiquée, on trouve

$$a=1+\frac{nkA}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{k^2A^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\;.\;3}\frac{k^3A^3}{n^3}+\text{etc.};$$

prenant la limite relative à l'accroissement de n, c'est-à-dire supposant que les produits n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, etc. se réduisent chacun à leur premier terme n^2, n^3, etc., et changeant k en k', on aura

$$a=1+\frac{k'A}{1}+\frac{k'^2A^2}{1.2}+\frac{k'^3A^3}{1.2.3}+\frac{k'^4A^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

Mais puisque dans le système dont la base est α, on a $la=\frac{A}{L\alpha}$, il s'ensuit que

$$A=L\alpha.la,\quad k'A=k'L\alpha.la=\frac{la}{M},\ \text{à cause que}\ M=\frac{1}{k'L\alpha};$$

et substituant cette valeur de $k'A$ dans la série précédente, il vient

$$a=1+\left(\frac{la}{M}\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{la}{M}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{la}{M}\right)^3+\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{la}{M}\right)^4+\text{etc.};$$

comme dans le n° 28.

Pour déterminer M, il suffit de chercher le nombre dont il exprime le logarithme. En représentant ce nombre par e, on fera $a=e$, $la=le=M$, et l'on aura

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.},$$

de même que dans le n° 22.

Enfin on passera du développement de a à celui de a^x, en substituant à la, le logarithme de a^x, qui est $x\,la$; et il en résultera, ainsi que dans le n° 22,

$$a^x=1+\frac{la}{le}\frac{x}{1}+\left(\frac{la}{le}\right)^2\frac{x^2}{1.2}+\left(\frac{la}{le}\right)^3\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc. (*)}.$$

Développement des fonctions transcendantes.

Fonctions circulaires.

37. La Trigonométrie a fait connaître un genre de fonctions non moins utiles que celles dont nous venons de nous occuper; ce sont

---

(*) Il n'est peut-être pas inutile, dans un Traité de la nature de celui-ci, d'expliquer ce qu'entendait Côtes, en désignant les logarithmes comme la *mesure des raisons ou des rapports*, dénomination qu'on rencontre encore quelquefois dans les ouvrages anglais. Elle est tirée d'un usage des Géomètres anciens, qui nommaient *rapport doublé*, *rapport triplé*, etc. le produit d'un rapport multiplié une fois, deux fois, etc., par lui-même, et mesuraient ainsi par l'exposant du rapport simple, ce genre de rapports composés. Or, en observant qu'un nombre quelconque n'est autre chose que le rapport de la quantité qu'il exprime, comparée à l'unité, l'équation $a=\left(1+\frac{k}{m}\right)^n$ décompose le nombre a, ou le rapport $\frac{a}{1}$, en un nombre n de rapports $\frac{1+\frac{k}{m}}{1}$. Pour un autre nombre a', on aurait de même $a'=\left(1+\frac{k}{m}\right)^{n'}$; le rapport $\frac{a'}{a}$ serait exprimé par $\left(1+\frac{k}{m}\right)^{n'-n}$, et comparé par conséquent au rapport simple $1+\frac{k}{m}$. Les exposans n, n' et $n'-n$, marquent donc le degré de multiplicité respectif des rapports $\frac{a}{1}$, $\frac{a'}{1}$, $\frac{a'}{a}$; mais A, A' et $A'-A$, désignant les logarithmes des nombres a, a' et $\frac{a'}{a}$, on a

$$A=\frac{n}{m},\quad A'=\frac{n'}{m};\quad A'-A=\frac{n'-n}{m}:$$

ces logarithmes sont donc proportionnels aux nombres n, n', $n'-n$, qui expriment les degrés respectifs de multiplicité des rapports $\frac{a}{1}$, $\frac{a'}{1}$, $\frac{a'}{a}$.

En prenant pour exemple les logarithmes ordinaires des nombres 2 et 3, on trouve

$$\frac{n}{m}=\frac{3010300}{10000000},\quad \frac{n'}{m}=\frac{4771213}{10000000};$$

les sinus et les cosinus des arcs de cercle. Je vais montrer qu'on peut non-seulement les développer en série, mais encore trouver leurs propriétés les plus remarquables, en partant des formules données dans presque tous les livres élémentaires, pour calculer les sinus et les cosinus de la somme et de la différence de deux arcs.

Je commence par la recherche de $\cos x$, et je suppose que x se change en $x+u$ et en $x-u$; les formules citées donnent dans ces deux cas,

$$\cos(x+u) = \cos x \cos u - \sin x \sin u \ (*)$$
$$\cos(x-u) = \cos x \cos u + \sin x \sin u.$$

Si on ajoute ces deux équations, il viendra

$$\cos(x+u) + \cos(x-u) = 2\cos x \cos u.$$

Soit maintenant

$$\cos x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \text{etc.},$$

on aura

$$\begin{aligned}
\cos u &= A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + A_4 u^4 + \text{etc.} \\
\cos(x+u) &= A_0 + A_1(x+u) + A_2(x+u)^2 + A_3(x+u)^3 + A_4(x+u)^4 + \text{etc.} \\
\cos(x-u) &= A_0 + A_1(x-u) + A_2(x-u)^2 + A_3(x-u)^3 + A_4(x-u)^4 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

En substituant ces séries dans l'équation

$$\cos(x+u) + \cos(x-u) = 2\cos x \cos u,$$

tous les termes affectés des puissances impaires de u disparaîtront dans

---

d'où il suit

$$\frac{2}{1} = \left\{ (10)^{\frac{1}{10000000}} \right\}^{3010300}, \quad \frac{3}{1} = \left\{ (10)^{\frac{1}{10000000}} \right\}^{4771213}.$$

C'est au rapport $(10)^{\frac{1}{10000000}}$ que sont comparés les rapports composés $\frac{2}{1}$ et $\frac{3}{1}$. Ils ne sont encore mesurés que par approximation; car, quelque peu différent de l'unité que soit le nombre $(10)^{\frac{1}{10000000}}$, il y a toujours un intervalle entre chacune de ses diverses puissances; mais cet intervalle diminue sans cesse à mesure qu'on augmente le degré de la racine extraite de la base, ou le nombre m; et par conséquent la limite de l'équation générale $a = \left(1 + \frac{k}{m}\right)^m$ convient rigoureusement au système de logarithmes caractérisé par le nombre k'. L'inverse $\frac{1}{k'}$, ou M, est appelé par Côtes la *raison modulaire*.

(*) Dans tout ce qui va suivre je suppose le rayon égal à l'unité : si on voulait lui donner une autre valeur, il suffirait d'introduire la lettre qui le représente, de manière à rendre homogènes les formules trouvées dans la première hypothèse.

le développement du premier membre; il est donc inutile de les faire entrer dans le second, et par conséquent on peut, sans diminuer la généralité des suppositions, faire A_1, A_3, A_5, etc. égaux à zéro, ce qui réduira l'expression de $\cos x$ à ne contenir que des puissances paires de x. Il suit de là que $\cos x$ ne change point lorsqu'on écrit $-x$ au lieu de x; or c'est ce qu'il est facile de voir *à priori*, 1°. par les équations d'où nous sommes partis, dans lesquelles $\cos u$ reste le même, quoique l'arc u soit positif dans la première et négatif dans la seconde; 2°. en observant que le cosinus d'un arc ne change point, soit qu'on prenne cet arc au-dessus ou au-dessous du diamètre.

Nous aurons donc
$$\left\{\begin{array}{lllll}\cos x & = A_0 + A_2x^2 & + A_4x^4 & + A_6x^6 & + \text{etc.}\\ \cos u & = A_0 + A_2u^2 & + A_4u^4 & + A_6u^6 & + \text{etc.}\\ \cos(x+u) & = A_0 + A_2(x+u)^2 & + A_4(x+u)^4 & + A_6(x+u)^6 & + \text{etc.}\\ \cos(x-u) & = A_0 + A_2(x-u)^2 & + A_4(x-u)^4 & + A_6(x-u)^6 & + \text{etc.}\end{array}\right.$$

et l'équation $\cos(x+u) + \cos(x-u) = 2\cos x \cos u$ donnera, en divisant ses deux membres par 2,

$$\left.\begin{array}{llllll}A_0 + A_2x^2 & + A_4x^4 & + A_6x^6 & +\ldots+ & A_nx^n & + \text{etc.}\\ \quad + A_2u^2 & + 6A_4u^2x^2 & + 15A_6u^2x^4 & +\ldots+ & \frac{n(n-1)}{2}A_nu^2x^{n-2} & + \text{etc.}\\ & + A_4u^4 & + 15A_6u^4x^2 & + \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & + \text{etc.}\\ & & + A_6u^6 & + \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{llllll}A_0^2 + A_0A_2x^2 + A_0A_4x^4 & + A_0A_6x^6 & +\ldots+ & \ldots A_0A_nx^n & + \text{etc.}\\ + A_2A_0u^2 + A_2A_2u^2x^2 + A_2A_4u^2x^4 & +\ldots+ & \ldots A_2A_{n-2}u^2x^{n-2} & + \text{etc.}\\ \quad + A_4A_0u^4 & + A_4A_2u^4x^2 & + \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & + \text{etc.}\\ & + A_6A_0u^6 & + \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & + \text{etc.}\end{array}\right.$$

En comparant les termes affectés des mêmes puissances de x et de u, on aura d'abord $A_0 = A_0^2$ ou $A_0 = 1$, valeur qui rend la première ligne du premier membre, identique avec celle du second; passant ensuite aux secondes lignes, on trouve

$$\left.\begin{array}{lcl}A_2 & = & A_2\\ 6A_4 & = & A_2A_2\\ 15A_6 & = & A_2A_4\\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots\\ \frac{n(n-1)}{2}A_n & = & A_2A_{n-2}\end{array}\right\} \text{d'où il suit} \left\{\begin{array}{lcl}A_2 & = & A_2\\ A_4 & = & \frac{2A_2^2}{3.4}\\ A_6 & = & \frac{4A_2^3}{3.4.5.6}\\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots\\ A_n & = & \frac{2^{\frac{n}{2}-1}A_2^{\frac{n}{2}}}{3.4.5\ldots n}\end{array}\right.$$

Tous les coefficiens sont déterminés à l'exception de A_2, et les équations qui résulteraient de la comparaison des autres lignes sont satisfaites par les valeurs précédentes. En effet on peut donner à l'expression du coefficient A_n la forme suivante : $A_n = \frac{2^{\frac{n}{2}} A_2^{\frac{n}{2}}}{2.3\ldots n}$, en multipliant son numérateur et son dénominateur par 2 ; et il sera facile d'en déduire

$$A_{m+n} = \frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{2.3\ldots(m+n)}.$$

$$A_m A_n = \frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{2.3\ldots m \times 2.3\ldots n}.$$

Mais le produit $u^m x^n$ faisant partie, dans le premier membre, du développement de $(x+u)^{m+n}$, a pour coefficient

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots\ldots(m+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ n} A_{m+n},$$

ou bien, en mettant pour A_{m+n} sa valeur, et en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3.m \times 1.2.3\ldots n};$$

or ce résultat est précisément la valeur que nous avons trouvée plus haut pour $A_m A_n$, coefficient de $u^m x^n$ dans le second membre.

Il est donc rigoureusement prouvé que

$$\cos x = 1 + \frac{2A_2 x^2}{1.2} + \frac{2^2 A_2^2 x^4}{1.2.3.4} + \frac{2^3 A_2^3 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

38. Nous trouverons d'une manière semblable l'expression du sinus ; car en retranchant l'une de l'autre les équations

$$\begin{cases}\cos(x+u) = \cos x \cos u - \sin x \sin u \\ \cos(x-u) = \cos x \cos u + \sin x \sin u,\end{cases}$$

nous aurons $\cos(x+u) - \cos(x-u) = -2\sin x \sin u$.

Si on met au lieu de $\cos(x+u)$ et de $\cos(x-u)$ les valeurs déduites de l'article précédent, on verra que tous les termes affectés des puissances paires de u se détruisent mutuellement. Il suit de là qu'elles ne doivent pas entrer dans l'expression du sinus; et on le voit bien d'ailleurs, puisqu'il change de signe sans changer de valeur, lorsqu'on prend le même arc négativement, c'est-à-dire d'un autre côté du diamètre, propriété qui ne saurait convenir qu'aux puissances impaires.

On supposera donc
$$\sin x = B_1x + B_3x^3 + B_5x^5 + B_7x^7 + \text{etc.}$$
$$\sin u = B_1u + B_3u^3 + B_5u^5 + B_7u^7 + \text{etc.};$$

à l'aide de ces valeurs et des réductions qui s'offriront naturellement, l'équation $\cos(x+u) - \cos(x-u) = -2\sin x \sin u$ deviendra

$$\left.\begin{array}{r} 2A_2ux + 4A_4ux^3 + 6A_6ux^5 + \ldots + nA_nux^{n-1} + \text{etc.} \\ + 4A_4u^3x + 20A_6u^3x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \\ + 6A_6u^5x + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \end{array}\right\}$$
$$= -\left\{\begin{array}{r} B_1B_1ux + B_1B_3ux^3 + B_1B_5ux^5 + \ldots + B_1B_{n-1}ux^{n-1} + \text{etc.} \\ + B_3B_1u^3x + B_3B_3u^3x^3 + \ldots + B_3B_{n-3}u^3x^{n-3} + \text{etc.} \\ + B_5B_1u^5x + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \end{array}\right.$$

La première ligne du premier membre, comparée terme à terme avec celle du second, donne

$$\left.\begin{array}{l} B_1B_1 = -2A_2 \\ B_1B_3 = -4A_4 \\ B_1B_5 = -6A_6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_1B_{n-1} = -nA_n \end{array}\right\} \text{ et par conséquent } \left\{\begin{array}{l} B_1 = -\dfrac{2A_2}{B_1} \\ B_3 = -\dfrac{4A_4}{B_1} \\ B_5 = -\dfrac{6A_6}{B_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{n-1} = -\dfrac{nA_n}{B_1}. \end{array}\right.$$

Les autres lignes ne fournissent plus que des équations identiques; car le produit u^mx^n aura pour coefficient dans le premier membre, d'après l'article précédent, $\dfrac{2^{\frac{m+n}{2}}A_2^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n}$, et il sera multiplié dans le second membre par $-B_mB_n = -\dfrac{(m+1)(n+1)A_{m+1}A_{n+1}}{B_1B_1}$; en mettant pour A_{m+1}, A_{n+1} et B_1 leur valeur, et en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on trouve encore comme plus haut,

$$\frac{2^{\frac{m+n}{2}}A_2^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n}.$$

Nous aurons donc $\sin x = -\frac{2A_2x}{B_1} - \frac{4A_4x^3}{B_1} - \frac{6A_6x^5}{B_1} -$ etc., le coefficient B_1 étant déterminé par l'équation $B_1B_1 + 2A_2 = 0$.

Si on met au lieu de A_4, A_6, A_8, etc., leurs valeurs en A_2, tirées de l'article précédent, on trouvera

$$\sin x = -\frac{2A_2x}{B_1} - \frac{2^2A_2^2x^3}{1.2.3.B_1} - \frac{2^3A_2^3x^5}{1.2.3.4.5.B_1} - \frac{2^4A_2^4x^7}{1.2.3.4.5.6.7.B_1} - \text{etc.};$$

et en substituant pour A_2 sa valeur $-\frac{B_1^2}{2}$, il viendra, après les réductions,

$$\sin x = B_1x - \frac{B_1^3x^3}{1.2.3} + \frac{B_1^5x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{B_1^7x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

39. Nous voici donc arrêtés, comme dans le cas des fonctions exponentielles, par la détermination du premier coefficient; car B_1 étant connu, il donnera la valeur de A_2 et réciproquement. De plus, si on examine la série trouvée pour $\cos x$, on verra qu'elle surpasse le rayon, ce qui ne saurait avoir lieu dans le cercle; on est donc porté à croire que A_2 doit être une quantité négative, et cela avec d'autant plus de raison que la valeur de B_1 tirée de l'équation $B_1^2 + 2A_2 = 0$, sera imaginaire tant que A_2 sera positif. Ces difficultés vont être éclaircies par la détermination de B_1; et nous aurons occasion de montrer dans la suite qu'elles tiennent à ce que les équations dont nous avons fait usage pour déduire les développemens de $\cos x$ et $\sin x$, expriment des propriétés communes au cercle et à l'hyperbole.

Archimède a démontré le premier que la circonférence d'un cercle est plus petite que le contour du polygone circonscrit, et plus grande que celui du polygone inscrit d'un pareil nombre de côtés; il suit de là qu'un arc de cercle est toujours plus petit que sa *tangente trigonométrique*, et plus grand que son *sinus;* mais on sait que

$$\tang x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin x^2}};$$

on aura donc $$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin x^2}} > x \\ \sin x \quad < x. \end{cases}$$

Pour dégager $\sin x$ dans la première des *inégalités* posées ci-dessus, on multipliera les deux membres par $\sqrt{1 - \sin x^2}$; il viendra

$\sin x > x\sqrt{1-\sin x^2}$, et en élevant au quarré, $\sin x^2 > x^2(1-\sin x^2)$; ajoutant de part et d'autre $x^2 \sin x^2$, on aura $(1+x^2)\sin x^2 > x^2$; divisant par $1+x^2$, et extrayant la racine quarrée de chaque membre, il en résultera $\sin x > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Si on développe $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ par le moyen de la formule du binome, on aura $x\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\text{etc.}\right)$; il faudra donc, d'après ce qui précède, qu'en retranchant cette série de la valeur de $\sin x$, le résultat

$$x\left\{\left(B_1-\frac{B_1{}^3x^2}{1.2.3}+\frac{B_1{}^5x^4}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-\text{etc.}\right)\right\},$$

soit une quantité positive. Mais il suit aussi de ce qu'on a $\sin x < x$, que la différence $x\left\{1-\left(B_1-\frac{B_1{}^3x^2}{1.2.3}+\frac{B_1{}^5x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}\right)\right\}$, doit être positive; or ces deux conditions ne sauraient être remplies dans tous les cas, à moins qu'on n'ait $B_1=1$. En effet, on peut toujours donner à x une valeur assez petite pour que le premier terme de chacune des séries $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-\text{etc.}$,

$$B_1-\frac{B_1{}^3x^2}{1.2.3}+\frac{B_1{}^5x^4}{1.2.3.4.5}-\text{etc.},$$

surpasse la somme de tous les autres, et que cette somme devienne moindre qu'une quantité donnée, quelque petite qu'elle soit, puisque le rapport des termes consécutifs est toujours décroissant (9): on pourra donc représenter la première série par $1-\delta$, et la seconde par $B_1-\delta'$, δ et δ' étant des quantités aussi petites qu'on voudra; et en vertu des conditions énoncées ci-dessus, il faudra que les valeurs de $\left.\begin{matrix}B_1-1+\delta-\delta'\\1-B_1+\delta'\end{matrix}\right\}$ soient toutes deux positives. Maintenant supposons qu'on ait $B_1=1+d$, les expressions précédentes deviendront $\left.\begin{matrix}d+\delta-\delta'\\-d+\delta'\end{matrix}\right\}$; mais δ et δ' peuvent toujours être moindres que d: c'est donc alors du signe de cette quantité que dépend celui des différences que nous considérons, et par conséquent la première étant positive, la seconde sera négative, ce qui ne s'accorde pas avec l'état de la question.

B_1 ne saurait non plus être au-dessous de l'unité; car si on avait

$B_1 = 1 - d$, d deviendrait négatif dans la première formule, positif dans la seconde, et en raisonnant sur l'hypothèse actuelle comme sur la précédente, on trouverait encore deux résultats de signes différens; or comme cette circonstance ne peut pas avoir lieu, il faut en conclure que B_1 ne peut être ni plus grand ni moindre que 1, et que par conséquent $B_1 = 1$.

Puisqu'on a $B_1 = 1$, on trouvera, en vertu de l'équation $B_1B_1 + 2A_2 = 0$, $A_2 = -\frac{1}{2}$, d'où

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Telles sont les expressions du sinus et du cosinus, développées suivant les puissances de l'arc; je montrerai plus loin comment on en peut tirer la valeur de l'arc lui-même.

40. Les considérations qui nous ont servi à déterminer B_1 ne sont pas particulières aux expressions dont nous nous sommes occupés dans l'article précédent; on en peut déduire un principe général, très-remarquable par ses applications à la théorie des courbes et à la mécanique. Voici l'énoncé de ce principe :

Soient trois expressions $\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x^3 + \text{etc.}$

$$\mathrm{A}' + \mathrm{B}'x + \mathrm{C}'x^2 + \mathrm{D}'x^3 + \text{etc.}$$

$$\mathrm{A}'' + \mathrm{B}''x + \mathrm{C}''x^2 + \mathrm{D}''x^3 + \text{etc.}$$

telles que les valeurs de la seconde se trouvent toujours comprises entre celles de la première et de la troisième : si ces deux dernières expressions ont le même premier terme, il sera nécessairement égal à celui de la seconde; c'est-à-dire qu'ayant $\mathrm{A} = \mathrm{A}''$, *on en pourra conclure* $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$.

Pour le prouver, supposons qu'on ait assigné à x une valeur propre à rendre d'une petitesse donnée, la somme de tous les termes qui suivent le premier de chacune des séries proposées, et que dans cet état on les représente par $\left.\begin{matrix} A + \delta \\ A' + \delta' \\ A'' + \delta'' \end{matrix}\right\}$; si on retranche la première de la seconde, et celle-ci de la troisième, on aura....

$\left.\begin{array}{l} A' - A + \delta' - \delta \\ A'' - A' + \delta'' - \delta' \end{array}\right\}$, résultats qui, en vertu de l'énoncé de la proposition, doivent être positifs l'un et l'autre. Mais si on pose $A'' = A$, et qu'on fasse successivement $\left.\begin{array}{l} A' = A + d \\ A' = A - d \end{array}\right\}$, on prouvera, comme précédemment, que tant que d ne sera pas nul, les valeurs des formules ci-dessus seront de signe différent : il faudra donc qu'on ait $A' = A$.

Les notions que nous avons données des limites (11 et 14) rendent encore cette proposition bien évidente et en abrègent un peu la démonstration ; car si on prend le rapport entre la première série et la troisième, on trouvera $\dfrac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}{A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \text{etc.}}$, fraction dont la limite est $\dfrac{A}{A''}$ et devient 1, si $A = A''$. Mais puisque la seconde série est toujours comprise entre celles-ci, qui tendent sans cesse vers l'égalité, lorsque $A = A''$, et que x va en décroissant, elle doit pouvoir s'approcher indéfiniment de l'une et de l'autre, ainsi que de leur limite commune. Il suit de là que les rapports de ces trois séries, comparées deux à deux, doivent tendre sans cesse vers l'unité ; or en divisant la seconde par la première, on a

$$\frac{A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{etc.}}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}},$$

dont la limite est $\dfrac{A'}{A}$: donc $\dfrac{A'}{A} = 1$, ou $A' = A$.

Relations des fonctions circulaires et des fonctions exponentielles ou Logarithmiques.

41. Les fonctions circulaires ont avec les fonctions exponentielles et logarithmiques, des relations purement analytiques, à la vérité, mais d'autant plus intéressantes qu'on en déduit avec beaucoup de facilité les propriétés les plus curieuses et les plus utiles des sinus et des cosinus. Ces relations se présentent pour ainsi dire d'elles-mêmes, quand on rapproche les séries qui expriment e^x, $\sin x$ et $\cos x$.

En effet, si l'on place ces développemens comme il suit :

$$\left.\begin{array}{llllllll} e^x = 1 & + \frac{x}{1} & + \frac{x^2}{1.2} & + \frac{x^3}{1.2.3} & + \frac{x^4}{1.2.3.4} & + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} & + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} & + \text{etc.} \\ \cos x = 1. & & - \frac{x^2}{1.2} & & + \frac{x^4}{1.2.3.4} & & - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} & + \text{etc.} \\ \sin x = & \frac{x}{1} & & - \frac{x^3}{1.2.3} & & + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} & & - \text{etc.} \end{array}\right\},$$

on verra que tous les termes compris dans les deux derniers réunis, sont les mêmes, aux signes près, que ceux qui leur correspondent dans le premier; mais si on substitue dans celui-ci $x\sqrt{-1}$ au lieu de x,

on aura, à cause de $\left\{\begin{array}{l}(x\sqrt{-1})^2 = -x^2\\ (x\sqrt{-1})^3 = -x^3\sqrt{-1}\\ (x\sqrt{-1})^4 = +x^4\\ (x\sqrt{-1})^5 = +x^5\sqrt{-1}\\ \text{etc.}\end{array}\right.$

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{etc.};$$

et en séparant, dans le second membre, les termes réels, des termes imaginaires, cette équation deviendra

$$\begin{aligned} e^{x\sqrt{-1}} &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\\ &+ \left\{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right\}\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

où l'on retrouve les développemens de $\cos x$ et de $\sin x$: il en résulte donc

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x.$$

On pourrait également substituer $-x\sqrt{-1}$ au lieu de x, dans e^x; cela reviendrait à changer ci-dessus le signe de $\sqrt{-1}$, et donnerait

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x.$$

Si maintenant on ajoute les deux dernières équations, on obtiendra

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x, \quad \text{d'où} \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

et en retranchant la seconde de la première, il viendra

$$e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\,\sin x, \quad \text{d'où} \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Il serait facile de trouver les expressions analogues des autres lignes trigonométriques. On aurait celle de $\tang x$, par exemple, en substituant au lieu de $\sin x$ et $\cos x$, leur valeur dans l'équation $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

il viendrait alors $\tang x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} \right\}$, ou bien, en multipliant le numérateur et le dénominateur du second membre par $e^{x\sqrt{-1}}$, $\tang x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} \right)$.

42. La manière dont nous venons de parvenir aux expressions du sinus et du cosinus, en exponentielles imaginaires, réunit à la simplicité, l'avantage de montrer le vrai sens de ces formules : elle prouve que ce ne sont que des symboles purement algébriques, par lesquels on exprime en abrégé une suite d'opérations, ou un développement à effectuer, pour parvenir à celui du sinus ou du cosinus, et non pas une vraie valeur, puisque les termes $e^{x\sqrt{-1}}$ et $e^{-x\sqrt{-1}}$ ne sont que des expressions *analogiques* formées sur le modèle de e^x et de e^{-x}, par la substitution de $x\sqrt{-1}$ à x, et qui, n'ayant par elles-mêmes aucune valeur, ne peuvent être conçues et traduites que par leur développement.

Ce qu'on vient de lire renferme, ce me semble, la seule définition qu'on en puisse donner : on voit par là ce qu'on doit entendre des puissances dont l'exposant est imaginaire. Il n'est pas possible de les interpréter, soit par des multiplications successives, comme les puissances entières, soit par une combinaison de multiplications, d'extractions de racines, ou de divisions, comme les puissances fractionnaires et négatives ; mais seulement comme ce que devient le développement général de $(1+x)^m$, lorsqu'on y écrit, au lieu de m, un symbole imaginaire. Cette génération conserve encore à la fonction proposée sa propriété fondamentale, savoir, que

$$(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n},$$

puisque cette propriété a lieu dans le développement, quels que soient les symboles m et n, dès que l'on prend $A = m$, dans le n°. 16. En considérant les choses sous ce point-de-vue, le seul qui soit susceptible de quelqu'évidence, on voit que l'on pourrait se dispenser de démontrer en particulier que la loi du coefficient du second terme du binome a lieu dans le cas où l'exposant est imaginaire, puisque ce n'est plus alors qu'une vérité de définition. Il n'en est pas de même pour les exposans irrationnels ou transcendans ; mais outre la démonstration du n° 35, appropriée à ces cas, on peut toujours concevoir l'exposant remplacé par un nombre fractionnaire qui en différera aussi peu que l'on voudra, et par ce moyen la démonstration du n° 16 subsiste dans son entier.

43. Revenons maintenant aux équations

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x.$$

En prenant les logarithmes de chaque membre, on trouvera

$$x\sqrt{-1} = \mathrm{l}(\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x),$$
$$-x\sqrt{-1} = \mathrm{l}(\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x);$$

si de la première de celles-ci, on retranche la seconde, on aura

$$2x\sqrt{-1} = \mathrm{l}(\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x) - \mathrm{l}(\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x)$$
$$= \mathrm{l}\left\{\frac{\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x}\right\}:$$

divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $\cos x$, et mettant pour $\frac{\sin x}{\cos x}$, sa valeur $\operatorname{tang} x$, il viendra

$$2x\sqrt{-1} = \mathrm{l}\left\{\frac{1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} x}{1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} x}\right\}.$$

Faisons maintenant $\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} x = u$, nous aurons, en vertu de la série trouvée pour $\mathrm{l}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$ (29),

$$2x\sqrt{-1} = 2\left\{u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{etc.}\right\},$$

ou en remettant pour u sa valeur,

$$2x\sqrt{-1} = 2\left\{\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} x - \frac{\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} x^3}{3} + \frac{\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} x^5}{5} - \text{etc.}\right\}$$

En supprimant le facteur commun $2\sqrt{-1}$, on obtient

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{\operatorname{tang} x^3}{3} + \frac{\operatorname{tang} x^5}{5} - \text{etc.},$$

série très-remarquable, tant par la simplicité de sa loi, que par la nature de la relation qu'elle renferme, puisqu'elle est le développement d'un arc de cercle, au moyen de sa tangente.

Représentons $\operatorname{tang} x$ par t, et nous aurons

$$x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \text{etc.}$$

Si on prend pour x l'arc de 45°, dans la division de la circonférence en 360, sa tangente étant égale au rayon ou à l'unité, on trouvera

$$\text{arc de } 45° = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{etc.}$$

Cette série n'est pas très-convergente: on en obtient une qui l'est davantage, lorsqu'on descend à l'arc de 30° dont le sinus est $\frac{1}{2}$ et par conséquent la tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$. Substituant cette valeur au lieu de t, on trouvera

$$\text{arc de } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \text{etc.}\right\};$$

et connaissant la longueur de l'arc de 30°, on aura celle de la circonférence, en multipliant la première par 12. C'est par la série précédente que Lagny a calculé le rapport de la circonférence au diamètre, avec 127 décimales; et il a trouvé que le diamètre étant $= 1$, la circonférence était exprimée par 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46.

Ce rapport, qui a paru pour la première fois dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1719, renfermait une faute d'impression à la 113me décimale, que j'ai corrigée ici d'après l'indication donnée par M. Véga.

44. Il était possible de former des séries plus convergentes encore que celle qui exprime l'arc de 30°, en employant des arcs plus petits, dont la tangente fût donnée exactement par le calcul, celle de l'arc de 15°, par exemple; mais on tombait alors sur des nombres irrationnels de plus en plus compliqués : on en revint donc à l'arc de 45°; mais au lieu de le calculer en une seule fois, on imagina de le décomposer en plusieurs parties, dont les tangentes fussent des nombres rationnels.

Parmi plusieurs déterminations de ce genre, on remarque d'abord celle d'Euler, qui a trouvé que l'arc de 45° est égal à la somme de deux arcs dont les tangentes respectives sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Cette conclusion peut se vérifier en faisant $\tang A = \frac{1}{2}$, $\tang B = \frac{1}{3}$, dans la formule connue

$$\tang(A+B) = \frac{\tang A + \tang B}{1 - \tang A \tang B},$$

qui donne alors $\operatorname{tang}(A+B)=1$, d'où $A+B=45°$; et comme on a

$$A=\frac{1}{2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\frac{1}{7.2^7}+\text{etc.}$$
$$B=\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\text{etc.};$$

on en conclut

$$A+B=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.4^2}-\frac{1}{7.4^3}+\text{etc.}\right\}\\+\frac{1}{3}\left\{1-\frac{1}{3.9}+\frac{1}{5.9^2}-\frac{1}{7.9^3}+\text{etc.}\right\},\end{array}\right.$$

formule très-aisée à mettre en nombres.

Avant qu'Euler eût publié les séries précédentes, le géomètre anglais, Machin, avait eu une idée semblable, et était parvenu dès 1706, à une valeur beaucoup plus convergente de l'arc de 45°, mais qui est restée long-temps dans l'oubli, quoique l'auteur fût connu pour avoir calculé avec cent chiffres décimaux, le rapport de la circonférence au diamètre, que Leudolphe Van Ceulen n'avait encore poussé que jusqu'à 35. Le procédé de Machin consiste à prendre une fraction assez petite pour la tangente d'un premier arc, et à répéter cet arc autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir celui de ses multiples qui approche le plus de l'arc de 45°, puis à calculer la tangente de la différence de ces deux derniers arcs, tangente qui n'est aussi qu'une petite fraction, et dont par conséquent on obtient l'arc par une série très-convergente. On sent que ce moyen peut conduire à plusieurs résultats, aussi ne m'arrêterai-je que sur celui qui réunit le plus de simplicité et de convergence. (On peut trouver les autres dans le troisième volume des *Scriptores logarithmici*, publiés par M. Maseres, et dans le deuxième volume du *Développement de la partie élémentaire des Mathématiques*, par M. Bertrand de Genève.)

En prenant $a=\frac{1}{5}$, et formant successivement

$$\operatorname{tang} 2a=\frac{2\operatorname{tang} a}{1-\operatorname{tang} a^2}=\frac{5}{12}$$
$$\operatorname{tang} 4a=\frac{2\operatorname{tang} 2a}{1-(\operatorname{tang} 2a)^2}=\frac{120}{119},$$

on voit que l'arc $4a$ excède très-peu celui de 45°, puisque la tangente de l'un surpasse celle de l'autre de $\frac{1}{119}$ seulement Faisant ensuite

$4a = A$, et $45° = B$, on trouve pour l'arc $A - B$, que je représente par b,

$$\text{tang}(A - B) = \frac{\text{tang}\,A - \text{tang}\,B}{1 + \text{tang}\,A\,\text{tang}\,B} = \frac{1}{239} = \text{tang}\,b:$$

ainsi l'arc de $45° = 4a - b$; mais la tangente de a étant $\frac{1}{5}$, et celle de b, $\frac{1}{239}$, il vient

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \text{etc.}$$

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \frac{1}{7(239)^7} + \text{etc.},$$

d'où il résulte

$$45°,\ \text{ou}\ 0^q,5 = \begin{cases} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \text{etc.}\right) \\ -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \frac{1}{7(239)^7} + \text{etc.}\right). \end{cases}$$

Le calcul de la première série est très-facile, quand on fait attention qu'elle équivaut à

$$\frac{1}{5}\left\{1 - \frac{1}{3.25} + \frac{1}{5(25)^2} - \frac{1}{7(25)^3} + \frac{1}{9(25)^4} - \text{etc.}\right\}$$

puis à

$$\frac{1}{5}\left\{1 - \frac{4}{3(100)} + \frac{4^2}{5(100)^2} - \frac{4^3}{7(100)^3} + \frac{4^4}{9(100)^4} - \text{etc.}\right\};$$

et la convergence de la seconde série paraît bien quand on la met sous la forme

$$\frac{1}{239}\left\{1 - \frac{1}{3(57121)} + \frac{1}{5(57121)^2} - \frac{1}{7(57121)^3} + \text{etc.}\right\}.$$

La comparaison de ces séries, avec les procédés laborieux fournis par la considération des polygones inscrits et circonscrits au cercle, est bien propre à faire sentir l'avantage de l'analyse et des calculs modernes sur les méthodes anciennes; aussi les Géomètres ne s'en sont pas tenus au rapport donné par Lagny: M. Véga, que j'ai déjà cité, auquel on doit des Tables de logarithmes très-complètes et très-intéressantes, en a calculé un autre jusqu'à 140 chiffres décimaux, et au moyen duquel il a reconnu l'erreur qui se trouvait dans le premier.

Quand on connaît la longueur de la circonférence du cercle, on en déduit aisément celle d'un arc quelconque; et avec ce secours, on peut obtenir par les formules du n° 39, qui sont très-convergentes pour de petits arcs, les sinus et les cosinus de ces arcs. On passe ensuite aux sinus et aux cosinus de leurs multiples, par les formules rigoureuses trouvées dans la Trigonométrie. On peut aussi n'employer que les séries, en les préparant de manière à les rendre convergentes, ce qui se fait par des procédés souvent très-ingénieux, mais qui ne sont pas de nature à trouver place ici.

45. Les arcs de cercle sont susceptibles de deux formes d'expressions qu'il faut soigneusement distinguer. Quand on les désigne par les degrés de l'ancienne et de la nouvelle division, on ne fait qu'indiquer leurs rapports avec la circonférence, qu'on regarde comme une unité partagée en 360 parties, ou avec le quart de cercle divisé en 100. C'est ainsi qu'on en use dans tous les calculs où il n'entre que des lignes trigonométriques; mais dès que les arcs entrent par eux-mêmes dans ces calculs, c'est alors de leur longueur absolue dont il s'agit : il est donc nécessaire de savoir revenir de cette longueur, qui est exprimée en parties du rayon, à la valeur de l'arc exprimée en parties aliquotes de la circonférence. De simples proportions suffiraient pour cela, puisqu'en désignant par 2π la longueur de la circonférence, et par a celle d'un arc, le nombre de degrés de cet arc sera, dans l'ancienne division,

$$\frac{a.360^\circ}{2\pi},$$

dans la nouvelle,

$$\frac{a.400^\circ}{2\pi};$$

mais les Astronomes rapportent tous les arcs à celui qui est égal en longueur au rayon du cercle, et que, par cette raison, il est bon de connaître. On en trouve la valeur par les formules ci-dessus, en y faisant $a=1$: il vient, dans l'ancienne division,

$$\frac{360^\circ}{2\pi}=206264'',80624\ 70964\,;$$

dans la nouvelle,

$$\frac{400^\circ}{2\pi}=0^q,63661\ 97723\ 67581.$$

Pour l'usage ordinaire, on se borne aux valeurs suivantes :

Anc. div. $57^\circ 17' 44'',81$; nouvelle $63^{gr},66198$.

Connaissant ensuite la longueur d'un arc quelconque en parties décimales du rayon, il suffit de la multiplier par l'un des deux nombres précédens, pour en déduire sa valeur soit dans l'ancienne, soit dans la nouvelle division.

On trouvera de cette manière, que l'arc égal à 0,972 du rayon, équivaut à

$0,972 \times 206264'',81 = 200489'',39$, ou $55^\circ\ 41'\ 29''4$, ancienne division,
$0,972 \times 63^{gr},66198 = 61^{gr},87944$, nouvelle division.

Ce qu'on vient de voir fournit le moyen de mesurer un angle ou arc, lorsqu'on est dépourvu d'instrumens divisés en degrés et même de tables trigonométriques; car si l'on ferme cet angle par une perpendiculaire à l'un de ses côtés, le rapport de ces deux lignes donnera la tangente; et si cette tangente est petite, la longueur de l'arc auquel elle répond se déduira facilement de la formule

$$x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \text{etc.},$$

si aisée à retenir, et qui s'applique aussi bien aux angles voisins de l'angle droit qu'aux petits angles, parce qu'on calcule alors le complément de l'angle cherché, dont la tangente est inverse de la tangente donnée. On peut voir dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1724, l'usage que fait Lagny, de cette formule, pour l'objet proposé. Dans le cas où l'angle à mesurer ne serait pas très-petit, il serait exprimé plus commodément par son sinus ou son cosinus, au moyen de séries qu'on trouvera dans la suite; et une fois qu'on en aurait la longueur, on le convertirait en parties de la circonférence, comme il vient d'être dit.

46. Reprenons les deux équations

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

si l'on y met nx au lieu de x, on aura

$$\cos nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

ce qui conduit aux valeurs des cosinus et des sinus d'arcs multiples.

En général ces formules donnent le moyen d'appliquer le calcul algébrique aux fonctions de sinus et de cosinus; et avec leur secours on parvient aux mêmes résultats qu'on obtiendrait par les voies trigonométriques.

Comme cette matière n'est pas entièrement de notre sujet, on n'en trouvera ici que quelques exemples, mais ils suffiront pour montrer l'usage qu'on peut faire de ces formules.

Supposons qu'on demande ce que signifie le produit $\sin x \cos x$, on trouvera, en l'effectuant,

$$\sin x \cos x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}},$$

ou

$$2 \sin x \cos x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

mais il est aisé de voir que le second membre n'est autre chose que la valeur de $\sin 2x$, puisqu'on y parviendrait en mettant $2x$ au lieu de x, dans l'expression de $\sin x$: on aura donc $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Si on s'était proposé $\sin x \cos z$, on aurait eu

$$\sin x \cos z = \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)\left(\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}\right),$$

d'où

$$\sin x \cos z = \frac{e^{(x+z)\sqrt{-1}} - e^{-(x+z)\sqrt{-1}} + e^{(x-z)\sqrt{-1}} - e^{-(x-z)\sqrt{-1}}}{2.2\sqrt{-1}};$$

mais il est évident que

$$\frac{e^{(x+z)\sqrt{-1}} - e^{-(x+z)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin(x+z),$$

$$\frac{e^{(x-z)\sqrt{-1}} - e^{-(x-z)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin(x-z);$$

par conséquent

$$\sin x \cos z = \tfrac{1}{2}\{\sin(x+z) + \sin(x-z)\}.$$

Cette formule se tire très-simplement, à la vérité, des valeurs connues de

$$\sin(x+z) = \sin x \cos z + \sin z \cos x,$$
$$\sin(x-z) = \sin x \cos z - \sin z \cos x,$$

en les ajoutant ensemble; mais le moyen que nous venons d'employer conduit plus aisément aux formules générales, ainsi qu'on le verra bientôt.

47. Puisqu'on a

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

en élevant à la puissance n, les deux membres de ces équations, on trouvera

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n$$
$$e^{-nx\sqrt{-1}} = (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n;$$

d'où

$$\cos nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n + (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n}{2}.$$

Nous voilà donc parvenus à l'expression du cosinus d'un arc multiple, d'une manière fort simple; et il faut bien faire attention que quoiqu'elle soit affectée de signes imaginaires, elle n'en est pas moins réelle; car ces signes disparaissent tous dans le développement des puissances indiquées. En effet on a

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos x^n + \frac{n}{1}\sqrt{-1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 - \text{etc.}$$
$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos x^n - \frac{n}{1}\sqrt{-1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \text{etc.};$$

en ajoutant le second développement au premier, et divisant par 2, on trouvera

$$\cos nx = \cos x^n - \frac{n(n-1)}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4}\cos x^{n-4}\sin x^4 - \text{etc.}$$

Il n'est pas besoin d'avertir que cette série sera terminée toutes les fois que n exprimera un nombre entier positif; elle suit à cet égard les mêmes lois que la formule du binome, dont elle est tirée.

En mettant pour $e^{nx\sqrt{-1}}$ et $e^{-nx\sqrt{-1}}$ leur valeur, dans l'équation

$$\sin nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\sin nx = \frac{\{\cos x + \sqrt{-1}\sin x\}^n - \{\cos x - \sqrt{-1}\sin x\}^n}{2\sqrt{-1}};$$

et en développant il viendra, après avoir effacé les termes qui se détruisent, qui sont alors les termes réels, et divisé par $2\sqrt{-1}$,

$$\sin nx = n\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\cos x^{n-3}\sin x^3$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cos x^{n-5}\sin x^5 - \text{etc.}$$

48. Dans les équations

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n$$
$$e^{-nx\sqrt{-1}} = (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n,$$

qui servent de fondement aux résultats précédens, on peut éliminer immédiatement les exponentielles, en y mettant pour ces fonctions les valeurs que donnent les deux premières équations du n° 47, lorsqu'on y écrit nx au lieu de x; et il vient alors

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx,$$
$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1}\sin nx,$$

équations que l'on déduit immédiatement des suivantes :

$$\sin(x \pm z) = \sin x\cos z \pm \cos x\sin z,$$
$$\cos(x \pm z) = \cos x\cos z \mp \sin x\sin z,$$
$$1 = \sin x^2 + \cos x^2,$$

qui renferment toute la théorie des sinus.

En décomposant dans ses facteurs le second membre de la dernière, on a

$$1 = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos x - \sqrt{-1}\sin x);$$

mais en développant le produit $(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$, on trouve

$$\cos x\cos z - \sin x\sin z + \{\cos x\sin z + \sin x\cos z\}\sqrt{-1},$$

résultat qui donne, en vertu des deux premieres équations,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+z) + \sqrt{-1}\sin(x+z).$$

On obtiendra de même.

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+z) - \sqrt{-1}\sin(x+z)$$
$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x-z) + \sqrt{-1}\sin(x-z)$$
$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x-z) - \sqrt{-1}\sin(x-z);$$

on peut comprendre ces quatre formules dans les deux suivantes :

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+z) \pm \sqrt{-1}\sin(x+z)$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos z \mp \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x-z) \pm \sqrt{-1}\sin(x-z).$$

Si dans la première de celles-ci, on fait successivement $z = x$, $2x$, $3x$, ... $(n-1)x$, il en résultera

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^2 = \cos 2x \pm \sqrt{-1}\sin 2x$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos 2x \pm \sqrt{-1}\sin 2x) = \cos 3x \pm \sqrt{-1}\sin 3x$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos 3x \pm \sqrt{-1}\sin 3x) = \cos 4x \pm \sqrt{-1}\sin 4x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos(n-1)x \pm \sqrt{-1}\sin(n-1)x) = \cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx;$$

et comme le second membre de chacune de ces équations est précisément le second facteur du premier membre de l'équation suivante, si l'on met, au lieu de ce facteur, la quantité qui lui est égale, on trouvera

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^2 = \cos 2x \pm \sqrt{-1}\sin 2x$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^3 = \cos 3x \pm \sqrt{-1}\sin 3x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx:$$

on aura donc, comme ci-dessus, les équations

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx$$
$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1}\sin nx;$$

mais alors elles ne seront prouvées que pour les cas où le nombre n est entier.

49. Les développemens de $\sin nx$ et de $\cos nx$, trouvés n° 47, résolvent complètement le problème où l'on n'a pour but que d'obtenir la valeur du sinus ou du cosinus d'un arc multiple, au moyen des puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple; et de plus, ils ne cessent pas d'être vrais, quel que soit le nombre n : seulement, ils ne se terminent pas quand ce nombre est négatif ou fractionnaire, inconvénient qui tient à la nature de la chose; mais ces mêmes développemens contiennent à-la-fois les puissances du sinus et celles du cosinus, ce qui semble une complication inutile, puisque l'une de ces quantités étant donnée par l'autre, on peut, avec le secours de l'élimination, parvenir à des formules qui ne dépendent que du sinus, ou du cosinus. Le moyen qui s'offre d'abord pour les obtenir, est de remplacer $\sin x$ par

$\sqrt{1-\cos x^2}$, dans l'expression de $\cos nx$, et $\cos x$ par $\sqrt{1-\sin x^2}$, dans celle de $\sin nx$. La première de ces substitutions conduira toujours à une expression rationnelle, puisque $\cos nx$ ne renferme que des puissances paires de $\sin x$; et la seconde produira le même effet sur $\sin nx$, lorsque n sera un nombre impair; mais dans le cas où n serait pair, il y aurait, à tous les termes, un facteur irrationnel que l'on peut mettre tout de suite en évidence, en écrivant le développement de $\sin nx$ comme il suit :

$$\sin nx = \cos x \left\{ n \cos x^{n-2} \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cos x^{n-4} \sin x^3 + \text{etc.} \right\}.$$

On évite cette distinction de deux cas, en mettant l'expression de $\sin nx$ sous la forme

$$\sin nx = \sin x \left\{ n \cos x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cos x^{n-3} \sin x^2 + \text{etc.} \right\},$$

dans laquelle la série renfermée entre les accolades peut toujours être délivrée rationnellement des puissances du sinus. Il serait actuellement peu commode de substituer dans cette dernière expression et dans celle de $\cos nx$, au lieu des puissances de $\sin x^2$, celles du binome $1-\cos x^2$, même pour ne former qu'un tableau des valeurs particulières de $\cos 2x$, $\cos 3x \ldots$, $\sin 2x$, $\sin 3x \ldots$; on y arrivera plus promptement au moyen de formules très-simples que je vais rapporter.

Les valeurs connues de $\cos a \cos b$ et $\cos a \sin b$ (*Traité élém. de Trigonom. et d'Appl.*, etc.), lorsqu'on fait $a=x$ et $b=nx$, deviennent

$$\cos x \cos nx = \tfrac{1}{2}\{\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\},$$

$$\cos x \sin nx = \tfrac{1}{2}\{\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\},$$

d'où l'on tire

$$\cos(n+1)x = 2\cos x \cos nx - \cos(n-1)x \ldots\ldots(1),$$
$$\sin(n+1)x = 2\cos x \sin nx - \sin(n-1)x \ldots\ldots(2);$$

et prenant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., on déduira de ces deux dernières formules, les tables suivantes :

I.

$$
\begin{aligned}
\cos 2x &= 2\cos x^2 - 1\\
\cos 3x &= 4\cos x^3 - 3\cos x\\
\cos 4x &= 8\cos x^4 - 8\cos x^2 + 1\\
\cos 5x &= 16\cos x^5 - 20\cos x^3 + 5\cos x\\
\cos 6x &= 32\cos x^6 - 48\cos x^4 + 18\cos x^2 - 1\\
\cos 7x &= 64\cos x^7 - 112\cos x^5 + 56\cos x^3 - 7\cos x
\end{aligned}
$$

etc.

II.

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= \sin x\,(2\cos x)\\
\sin 3x &= \sin x\,(4\cos x^2 - 1)\\
\sin 4x &= \sin x\,(8\cos x^3 - 4\cos x)\\
\sin 5x &= \sin x\,(16\cos x^4 - 12\cos x^2 + 1)\\
\sin 6x &= \sin x\,(32\cos x^5 - 32\cos x^3 + 6\cos x)\\
\sin 7x &= \sin x\,(64\cos x^6 - 80\cos x^4 + 24\cos x^2 - 1)
\end{aligned}
$$

etc.

Euler, qui forma le premier ces deux tables par la méthode exposée plus haut, en exprima la loi par les formules ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
\cos nx = {} & 2^{n-1}\cos x^n - \frac{n}{1}\,2^{n-3}\cos x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}\,2^{n-5}\cos x^{n-4}\\
& - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,2^{n-7}\cos x^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,2^{n-9}\cos x^{n-8} - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin nx = \sin x\Big\{ & 2^{n-1}\cos x^{n-1} - \frac{n-2}{1}\,2^{n-3}\cos x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}\,2^{n-5}\cos x^{n-5}\\
& - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}\,2^{n-7}\cos x^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,2^{n-9}\cos x^{n-9} - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Il paraît que ces formules ont été trouvées d'abord par une sorte de tâtonnement, en essayant les fonctions les plus simples de l'indice n, qui, en y faisant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., pussent se changer dans les coefficiens numériques des puissances correspondantes de $\cos x$; et ceux des premiers termes, qui ne sont que des puissances du nombre 2, ont d'ailleurs fait voir la nécessité d'introduire ces puissances dans les formules générales. Ces formules peuvent se vérifier facilement *a posteriori*, en substituant, dans les équations (1) et (2) (page précéd.) les suites qu'elles donnent pour $\cos (n-1)x$ et $\cos nx$,

$\sin(n-1)x$ et $\sin nx$. Il en résultera des suites précisément de même forme pour $\cos(n+1)x$ et $\sin(n+1)x$, ce qui montre que si la loi est vraie pour les nombres $n-1$ et n, elle est encore vraie pour le nombre $n+1$, et que par conséquent il suffit qu'elle soit établie par deux résultats consécutifs, dans les Tables I et II, pour qu'on puisse l'employer à continuer ces tables aussi loin qu'on voudra.

Les derniers développemens de $\cos nx$ et de $\sin nx$ doivent être bien distingués des premiers (47) : l'usage des uns exige une attention superflue dans l'emploi des autres. Pour conduire à un résultat exact, ceux du n° 47, semblables à la formule du binome de Newton, ne demandent que la simple substitution de la valeur assignée à n, et leurs termes s'annulent d'eux-mêmes, dès qu'on a passé ceux qui conviennent à l'expression cherchée, tandis que dans tous les cas, les formules de la page précédente se continuent à l'infini et donnent un résultat faux, à moins qu'on ne rejette les termes où l'exposant de $\cos x$ est négatif, ce que l'expression analytique ne dit pas expressément.

On en a un exemple bien simple, en faisant $n=1$, dans l'expression de $\cos nx$, qui donne la suite infinie

$$\cos x = \cos x - \frac{1}{4\cos x} - \frac{1}{16\cos x^3} - \frac{1}{32\cos x^5} - \text{etc.},$$

équation que les termes du second membre qui suivent le premier rendent fausse, et il en est de même dans tous les autres cas; de sorte qu'on doit toujours joindre à ces formules la restriction de *ne les employer que pour des nombres entiers, et de s'arrêter aux termes où* $\cos x$ *est affecté d'un exposant négatif.*

Cette imperfection mérite d'être remarquée, parce qu'elle prouve bien clairement le peu de fonds que l'on doit faire sur l'induction tirée de l'examen de valeurs particulières, dont le nombre, toujours limité, ne présente souvent que d'une manière incomplète la loi qui règne dans l'ensemble de toutes les valeurs de la fonction cherchée; et on voit par là combien est inexacte la marche des auteurs qui veulent établir de cette manière le développement des puissances du binome, quoiqu'il soit assez probable que c'est d'abord ainsi que Newton y est parvenu. En effet, tant que l'on ne considère que des valeurs particulières, elles peuvent introduire dans le calcul des réductions ou des simplifications dont on ne s'apperçoit pas, et qui n'ayant pas lieu en général, changent entièrement la nature de l'expression. C'est ce qui arrive ici; et Euler, qui a indiqué le premier cette sorte de paradoxe, en a donné aussi l'explication, en trouvant pour les développemens généraux de $\cos nx$ et de $\sin nx$, deux séries infinies, combinées de manière que dans les cas où n est entier positif, il ne reste que les expressions rapportées ci-dessus. MM. Fuss et Lagrange, en revenant sur ce sujet important, ont confirmé et simplifié beaucoup les recherches d'Euler, par des considérations qui trouveront naturellement leur place dans ce Traité, lorsque je parlerai de l'usage du calcul différentiel, pour développer les fonctions en séries.

En effet, si l'on remonte aux équations

$$\cos nx = \frac{\{\cos x + \sqrt{-1}\sin x\}^n + \{\cos x - \sqrt{-1}\sin x\}^n}{2},$$

$$\sin nx = \frac{\{\cos x + \sqrt{-1}\sin x\}^n - \{\cos x - \sqrt{-1}\sin x\}^n}{2\sqrt{-1}},$$

trouvées indépendamment d'aucune valeur particulière de x et de n; on voit que toutes les questions qu'on peut se proposer sur le développement de $\cos nx$ et de $\sin nx$, reposent sur celui de la fonction $\{\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x\}^n$, qui prend les formes :

$$\{\cos x \pm \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{1-\cos x^2}\}^n,$$

$$\{\sqrt{1-\sin x^2} \pm \sqrt{-1}\sin x\}^n,$$

lorsqu'on en élimine $\sin x$ ou $\cos x$, et peut alors se développer en série, de quatre manières, savoir: en série descendante ou ascendante, suivant les puissances de $\cos x$, et en série descendante ou ascendante, suivant les puissances de $\sin x$.

50. Telles sont les circonstances qui ont donné lieu à la variété de formules que l'on rencontre sur ce sujet dans les différens auteurs qui s'en sont occupés, à commencer par Viète; et le premier ouvrage élémentaire où l'on a pris soin d'en rassembler le plus grand nombre, est, à ma connaissance, celui que M. Mauduit a publié en 1765, sous le titre de *Principes d'Astronomie sphérique* : on les trouve aussi presque toutes dans les *Leçons sur le Calcul des fonctions*, par M. Lagrange. Comme le lecteur pourrait être curieux de rapprocher ces diverses formules, je les ai rassemblées dans le tableau ci-joint, où

$$p = \cos x, \qquad q = \sin x.$$

Séries descendantes.

I. n étant indifféremment impaire ou paire,

$$\cos nx = \tfrac{1}{2}\left\{(2p)^n - n(2p)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2p)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2\,.\,3}(2p)^{n-6} + \text{etc.}\right\}$$

$$\sin nx = q\left\{(2p)^{n-1} - (n-2)(2p)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2}(2p)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2\,.\,3}(2p)^{n-7} + \text{etc.}\right\}$$

II. Lorsque n est impaire,

$$\pm\sin nx = \tfrac{1}{2}\left\{(2q)^n - n(2q)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2q)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2\,.\,3}(2q)^{n-6} + \text{etc.}\right\}$$

$$\pm\cos nx = p\left\{(2q)^{n-1} - (n-2)(2q)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2}(2q)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2\,.\,3}(2q)^{n-7} + \text{etc.}\right\}$$

III. Lorsque n est paire,

$$\pm\cos nx = \tfrac{1}{2}\left\{(2q)^n - n(2q)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2q)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2\,.\,3}(2q)^{n-6} + \text{etc.}\right\}.$$

$$\mp\sin nx = p\left\{(2q)^{n-1} - (n-2)(2q)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2}(2q)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2\,.\,3}(2q)^{n-7} + \text{etc.}\right\}$$

Séries ascendantes.

I. Lorsque n est impaire,

$$\pm\cos nx = \left\{np - \frac{n(n^2-1)}{2\,.\,3}p^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}p^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}p^7 + \text{etc.}\right\}$$

$$\sin nx = \left\{nq - \frac{n(n^2-1)}{2\,.\,3}q^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}q^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}q^7 + \text{etc.}\right\}$$

$$\pm\sin nx = q\left\{1 - \frac{(n^2-1)}{2}p^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4}p^4 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}p^6 + \text{etc.}\right\}$$

$$\cos nx = p\left\{1 - \frac{(n^2-1)}{2}q^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4}q^4 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}q^6 + \text{etc.}\right\}$$

II. Lorsque n est paire,

$$\pm\cos nx = \left\{1 - \frac{n^2}{2}p^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2\,.\,3\,.\,4}p^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}p^6 + \text{etc.}\right\}$$

$$\cos nx = \left\{1 - \frac{n^2}{2}q^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2\,.\,3\,.\,4}q^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}q^6 + \text{etc.}\right\}$$

$$\mp\sin nx = q\left\{np - \frac{n(n^2-4)}{2\,.\,3}p^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}p^5 - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}p^7 + \text{etc.}\right\}$$

$$\sin nx = p\left\{nq - \frac{n(n^2-4)}{2\,.\,3}q^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}q^5 - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}q^7 + \text{etc.}\right\}$$

Ces quatorze séries peuvent se réduire à six; car toutes les séries descendantes se déduisent des deux premières, et, parmi les séries ascendantes, la première, la troisième, la cinquième et la septième donnent respectivement la deuxième, la quatrième, la sixième et la huitième. Cette transformation s'opère en introduisant au lieu de l'arc x, son complément.

Si, en désignant le quart de cercle par 1^q, on écrit $1^q - b$, au lieu de x, il viendra d'abord

$$\cos(1^q - b) = \sin b, \quad \sin(1^q - b) = \cos b;$$

mais pour savoir à quoi répondent alors $\cos nx$ et $\sin nx$, qui se changent en

$$\cos n(1^q - b) \text{ et } \sin n(1^q - b),$$

il faut distinguer les diverses formes du nombre n.

Dans le cas où ce nombre est impair, il ne peut avoir que l'une ou l'autre de ces formes: $4m+1$, ou $4m+3$. En multipliant par ces nombres l'arc $1^q - b$, et retranchant les circonférences entières, qui ne doivent compter pour rien, on trouvera (*Traité élém. de Trigonom. et d'Appl.*),

$$\cos\{1^q - (4m+1)b\} = \sin(4m+1)b, \quad \sin\{1^q - (4m+1)b\} = \cos(4m+1)b,$$
$$\cos\{3^q - (4m+3)b\} = -\sin(4m+3)b, \quad \sin\{3^q - (4m+3)b\} = -\cos(4m+3)b.$$

Lorsque le nombre n est pair, ses formes sont $4m$, ou $4m+2$, et produisent les relations suivantes:

$$\cos(4^q - 4mb) = \cos 4mb, \quad \sin(4^q - 4mb) = -\sin 4mb;$$
$$\cos\{2^q - (4m+2)b\} = -\cos(4m+2)b, \quad \sin\{2^q - (4m+2)b\} = \sin(4m+2)b.$$

En substituant ces expressions, classant les résultats suivant les diverses formes du nombre n, et remettant x et nx au lieu de l'arc b et de son multiple, on obtiendra les transformations citées, qui s'opèrent, comme on le voit, par le changement de $\cos x$ en $\sin x$, ou, *vice versâ*, dans le second membre de chaque formule, et par celui de $\cos nx$ en $\sin nx$ dans le premier membre, mais seulement quand n est impaire.

Les tables de la page 80, qui ont donné par induction les deux premières séries descendantes, donnent aussi les séries ascendantes. Il suffit pour cela d'écrire, en commençant par le dernier terme, chacun des résultats qu'elles contiennent. La première table conduit à la première et à la cinquième séries ascendantes, et la seconde table, à la troisième et à la septième séries ascendantes. Quant aux signes, le supérieur, dans les séries où n est impaire, répond au cas où ce nombre est de la forme $4m+1$, l'inférieur, au cas où il est de la forme $4m+3$; dans les formules où n est paire, cette alternative se rapporte aux formes $4m$ et $4m+2$.

51. Les développemens de $\cos nx$ et de $\sin nx$, trouvés dans le n° 47, prennent une forme très-simple quand on y introduit les puissances de la tangente; ce qui se fait en mettant $\cos x^n$ en facteur commun, d'où il résulte

$$\cos nx = \cos x^n \left\{ 1 - \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \frac{\sin x^2}{\cos x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \frac{\sin x^4}{\cos x^4} - \text{etc.} \right\},$$

$$\sin nx = \cos x^n \left\{ \frac{n}{1} \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \frac{\sin x^3}{\cos x^3} + \text{etc.} \right\},$$

et par conséquent

$$\cos nx = \cos x^n \left\{ 1 - \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \operatorname{tang} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \operatorname{tang} x^4 - \text{etc.} \right\},$$

$$\sin nx = \cos x^n \left\{ \frac{n}{1} \operatorname{tang} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \operatorname{tang} x^3 + \text{etc.} \right\},$$

en remplaçant $\frac{\sin x}{\cos x}$ par $\operatorname{tang} x$.

Si l'on divise la dernière expression de $\sin nx$ par celle de $\cos nx$, on obtiendra

$$\operatorname{tang} nx = \frac{\frac{n}{1} \operatorname{tang} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \operatorname{tang} x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \operatorname{tang} x^5 - \text{etc.}}{1 - \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \operatorname{tang} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \operatorname{tang} x^4 - \text{etc.}},$$

d'où l'on conclura sans peine le développement de $\cot nx$, qui serait applicable aux valeurs quelconques du nombre n, ainsi que le précédent.

52. Si dans les expressions de $\sin nx$ et de $\cos nx$ du n° 47, on fait $x = \frac{v}{n}$, elles deviendront

$$\sin v = n\left(\cos \frac{v}{n}\right)^{n-1}\left(\sin \frac{v}{n}\right) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3}\left(\cos \frac{v}{n}\right)^{n-3}\left(\sin \frac{v}{n}\right)^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}\left(\cos \frac{v}{n}\right)^{n-5}\left(\sin \frac{v}{n}\right)^5 - \text{etc.}$$

$$\cos v = \left(\cos \frac{v}{n}\right)^n - \frac{n(n-1)}{2}\left(\cos \frac{v}{n}\right)^{n-2}\left(\sin \frac{v}{n}\right)^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4}\left(\cos \frac{v}{n}\right)^{n-4}\left(\sin \frac{v}{n}\right)^4 - \text{etc.}$$

Les séries qui forment leurs seconds membres sont susceptibles de limites, relativement à l'accroissement de n; car lorsque ce nombre augmente, l'arc $\frac{v}{n}$ diminue et se rapproche de plus en plus de son sinus, tandis que son cosinus converge vers le rayon ou l'unité : en écrivant donc $\frac{v}{n}$ au lieu de $\sin\frac{v}{n}$, 1 au lieu de $\cos\frac{v}{n}$, et en réduisant les produits n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, etc. à leur premier terme, on aura pour la limite

$$\sin v = n\frac{v}{n} - \frac{n^3}{2.3}\frac{v^3}{n^3} + \frac{n^5}{2.3.4.5}\frac{v^5}{n^5} - \text{etc.} \ldots = v - \frac{v^3}{2.3} + \frac{v^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$\cos v = 1 \quad - \frac{n^2}{2}\frac{v^2}{n^2} + \frac{n^4}{2.3.4}\frac{v^4}{n^4} - \text{etc.} \ldots = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

Nous voilà donc retombés dans les séries de la page 65; et on voit par là comment se vérifient l'une par l'autre, les différentes marches que nous avons suivies pour y arriver.

53. La considération des limites mène de même très-promptement à la série qui exprime l'arc par sa tangente. Pour cela, on observe que la limite du rapport de l'arc à son sinus étant l'unité, celle de $\frac{nx}{\sin nx}$, prise par rapport au décroissement de n, sera aussi l'unité; mais en vertu de l'équation

$$\sin nx = \cos x^n \left\{ \frac{n}{1}\tang x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\tang x^3 + \text{etc.} \right\} (51),$$

on aura

$$\frac{nx}{\sin nx} = \frac{nx}{\cos x^n \left\{ \frac{n}{1}\tang x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\tang x^3 + \text{etc.} \right\}},$$

ou, en divisant le second membre par n,

$$\frac{nx}{\sin nx} = \frac{x}{\cos x^n \left\{ \tang x - \frac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\tang x^3 + \text{etc.} \right\}}.$$

Cela posé, en passant aux limites, il faudra mettre 1, pour le premier membre, et faire $n=0$ dans le second, en observant que $(\cos x)^0=1$;

il viendra

$$1 = \frac{x}{\left\{\tang x - \frac{\tang x^3}{3} + \text{etc.}\right\}},$$

d'où il suit, comme dans le n° 43,

$$x = \tang x - \frac{\tang x^3}{3} + \text{etc.}$$

54. Dans les articles 47 et 49, on a développé les sinus et les cosinus des arcs multiples, suivant les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple; voici comment on peut résoudre la question inverse, c'est-à-dire celle où il s'agit d'exprimer les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple, par les sinus et les cosinus de ses multiples :

Soit

$$\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x = u,$$
$$\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x = v,$$

on aura

$$\cos x = \frac{1}{2}(u+v); \qquad \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v),$$

et de là on tirera d'abord

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}(u+v)^n.$$

En développant la puissance indiquée dans le second membre de cette équation, il viendra

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}\right\};$$

mais dans l'expression $(u+v)^n$ on peut changer v en u, et réciproquement, ce qui donnera

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{2}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}v^{n-3}u^3 + \text{etc.}\right\},$$

et en ajoutant ces deux résultats, on aura

$$2\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{\begin{array}{l} u^n + v^n + n(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) \\ \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

On peut donner à cette équation la forme suivante :

$$2^{n+1}\cos x^n = \left\{ \begin{array}{l} u^n + v^n + nuv(u^{n-2}+v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{2} u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4}) \\ \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\ .\ 3}(u^3v^3(u^{n-6}+v^{n-6}) + \text{etc.} \end{array} \right\};$$

mais en vertu du n° 47, on a

$$\cos nx = \tfrac{1}{2}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n + \tfrac{1}{2}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \tfrac{1}{2}u^n + \tfrac{1}{2}v^n,$$

et cela, quelle que soit n : on en pourra conclure que

$$u^n + v^n = 2\cos nx,$$

et en général

$$u^{n-m} + v^{n-m} = 2\cos(n-m)x;$$

et de plus, il est aisé de voir que $uv = 1$: par conséquent on aura

$$2^{n+1}\cos x^n = \left\{ \begin{array}{l} 2\cos nx + 2n\cos(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1\ .\ 2}\cos(n-4)x \\ \quad + \frac{2n(n-1)(n-2)}{2\ .\ 3}\cos(n-6)x + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

ou bien, en divisant tout par 2,

$$2^n\cos x^n = \left\{ \begin{array}{l} \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\cos(n-4)x \\ \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\cos(n-6)x + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

En continuant cette formule comme celle du binome de Newton, on arrivera à des cosinus d'arcs négatifs; mais ils sont précisément les mêmes que ceux des arcs positifs qui leur correspondent : on écrira donc $\cos(m-n)x$ au lieu de $\cos(n-m)x$.

La valeur que nous venons de trouver pour $\cos x^n$ n'est pas restreinte au seul cas où n est un nombre entier; elle conviendrait également à ceux où n serait fractionnaire ou négatif. Cependant dans le premier elle est susceptible d'une simplification que nous allons faire connaître.

Dans le développement de $(u+v)^n$, lorsque n est un nombre entier, les termes placés à égale distance des extrêmes ont le même coefficient; pareille chose aura lieu dans l'expression

$$\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\cos(n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\cos(n-6)x + \text{etc.},$$

et de plus, les cosinus placés à égale distance des extrêmes de cette formule appartiennent à des arcs égaux. En effet, le terme placé à une distance m du premier étant affecté de $\cos(n-2m)x$, le dernier l'est lui-même de $\cos(n-2n)x$, ou $\cos -nx$; et en remontant vers le premier d'un nombre de rangs marqué par m, on trouvera nécessairement $\cos(-n+2m)x$, ou $\cos-(n-2m)x$: mais d'après ce qui a été dit ci-dessus, $\cos(n-2m)x$ et $\cos-(n-2m)x$ sont égaux. Il suit de là qu'il est inutile d'étendre la formule aux termes multipliés par des cosinus d'arcs négatifs, puisqu'il suffit, pour en tenir compte, de prendre le double de chacun de ceux qui en contiennent de positifs.

On pourra donc, en s'arrêtant au terme où les arcs deviennent négatifs, écrire

$$2^n \cos x^n = \left\{ 2\cos nx + \frac{2n}{1}\cos(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x + \text{etc.} \right\}.$$

Il faut néanmoins observer que dans le cas où n est un nombre pair, la formule a un terme moyen, également éloigné de l'un et de l'autre extrême, et représenté par $\dfrac{n(n-1)\ldots\ldots\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots\frac{n}{2}}\cos(n-n)x$: ce terme à cause de $\cos 0 = 1$, se réduit à $\dfrac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\frac{n}{2}}$; et parce qu'il est unique, il ne doit pas être multiplié par 2 comme les autres, à moins qu'on n'en prenne préalablement la moitié, ou que l'on n'écrive

$$\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\frac{n}{2}}.$$

On aura donc pour dernier résultat

$$2^{n-1}\cos x^n = \left\{ \begin{aligned} &\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x \\ &\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos(n-6)x + \text{etc.} \end{aligned} \right\},$$

en observant de s'arrêter, dans cette formule, lorsqu'on rencontrera un arc négatif, et de ne prendre que la moitié du coefficient du cosinus de l'arc nul qu'on trouvera, si n est pair. Avec cette attention, il sera facile de former les valeurs de la table ci-jointe :

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos x\\
2\cos x^2 &= \cos 2x + 1\\
4\cos x^3 &= \cos 3x + 3\cos x\\
8\cos x^4 &= \cos 4x + 4\cos 2x + 3\\
16\cos x^5 &= \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\\
32\cos x^6 &= \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10\\
64\cos x^7 &= \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x
\end{aligned}$$
etc.

55. **Pour développer $\sin x^n$ on fera usage de l'équation**

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v),$$

et on trouvera

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(u-v)^n,$$

ou

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{u^n - \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^{n-2}v^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}\right\}.$$

1°. Soit n un nombre pair ou une fraction de numérateur pair ; dans ce cas, $(u-v)^n = (v-u)^n$, et par conséquent on aura encore

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(v-u)^n.$$

En développant le second membre de cette équation, qu'on ajoutera à la première, il viendra

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\begin{array}{l} u^n + v^n - \frac{n}{1}(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2)\\ \qquad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \text{etc.}\end{array}\right\},$$

ou bien

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\begin{array}{l} u^n + v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4})\\ \qquad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}u^3v^3(u^{n-6} + v^{n-6}) + \text{etc.}\end{array}\right\},$$

résultat qui est le même, aux signes près, que celui du n° précédent: nous pouvons donc écrire tout de suite:

$$(2\sqrt{-1})^n \sin x^n = \left\{ \begin{array}{r} \cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos(n-6)x + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

L'imaginaire disparaît parce que n est un nombre pair; et on a $(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n$, le signe supérieur ayant lieu si n est doublement pair, c'est-à-dire multiple de 4, et le signe inférieur, s'il est simplement divisible par 2.

On fera sur le second membre de cette équation les mêmes raisonnemens que dans l'article précédent; et quand n sera un nombre entier, on en conclura qu'on peut se borner aux termes qui ne renferment que des arcs positifs, pourvu qu'on prenne le double de chacun d'eux. De plus, comme alors n est paire, il y aura un terme dégagé de cosinus qu'il ne faudra pas doubler; et en divisant tout par 2, on aura

$$\pm 2^{n-1} \sin x^n = \left\{ \begin{array}{r} \cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos(n-6)x + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

en observant de s'arrêter lorsqu'on trouvera un arc nul, et de ne prendre que la moitié du coefficient de ce terme.

2°. Si n est un nombre impair, il vient alors

$$(v-u)^n = -(u-v)^n;$$

par conséquent

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(u-v)^n = -\frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(v-u)^n,$$

ou en développant,

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{ -v^n + \frac{n}{1}v^{n-1}u - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}v^{n-3}u^3 - \text{etc.} \right\}.$$

En ajoutant ce développement de $\sin x^n$ à celui de la page 90, et faisant les réductions nécessaires, on trouvera

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{ \begin{array}{l} u^n - v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2}-v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^2v^2(u^{n-4}-v^{n-4}) \\ \quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}u^3v^3(u^{n-6}-v^{n-6}) + \text{etc.} \end{array} \right\};$$

mais par le n° 47,

$$\sin nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u^n - v^n),$$

quelle que soit n; ainsi on aura en général

$$u^{n-m} - v^{n-m} = 2\sqrt{-1}\sin(n-m)x,$$

et quant au produit uv, il est toujours égal à l'unité : on obtiendra par conséquent

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^{n-1}}\left\{ \begin{array}{l} \sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\sin(n-4)x \\ \quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin(n-6)x + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

L'imaginaire n'affecte pas plus cette formule que les précédentes ; car, n étant un nombre impair,

$$(2\sqrt{-1})^{n-1} = \pm 2^{n-1},$$

le signe supérieur ayant lieu si $n-1$ est un multiple de 4, et le signe inférieur si $n-1$ est simplement un multiple de 2.

On peut encore ici se borner aux termes affectés de sinus d'arcs positifs, en doublant ces termes ; car il est d'abord évident, par les mêmes raisons que précédemment, que les termes placés à égale distance des extrêmes, ont le même coefficient, et que l'un est affecté d'un arc positif, et l'autre d'un arc négatif. A la vérité, comme le nombre des termes de la formule est pair, et qu'ils sont alternativement positifs et négatifs, les termes correspondans seront de signe contraire ; mais aussi le sinus de l'arc négatif est lui-même négatif, par conséquent cette différence de signe se trouve corrigée, et les termes dont il s'agit se réunissent dans un seul.

D'après ces considérations, et en divisant par 2, il viendra

$$\pm 2^{n-1}\sin x^n = \left\{\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\sin(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin(n-6)x + \text{etc.}\right\}.$$

On déduira aisément des deux formules de cet article, les valeurs contenues dans la table suivante :

$$\begin{array}{rl}
\sin x = & \sin x \\
2\sin x^2 = & -\cos 2x + 1 \\
4\sin x^3 = & -\sin 3x + 3\sin x \\
8\sin x^4 = & \cos 4x - 4\cos 2x + 3 \\
16\sin x^5 = & \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x \\
32\sin x^6 = & -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10 \\
64\sin x^7 = & -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

Voilà pour les cas où n serait un nombre entier; s'il était fractionnaire, il faudrait avoir recours à la première formule du n° précédent. On y ferait $x = 1^q - z$, ce qui donnerait $\cos x = \sin z$, et par conséquent l'expression de $\cos x^n$ par les cosinus des multiples de x, serait celle de $\sin z^n$ par les cosinus des multiples de $1^q - z$, ou du complément de l'arc z.

56. Le développement de $\mathrm{l}u$, trouvé, n° 33, nous conduira à celui d'un arc de cercle, ordonné par rapport aux sinus de ses multiples. En effet, si dans

$$\mathrm{l}u = u - u^{-1} - \left(\frac{u^2 - u^{-2}}{2}\right) + \left(\frac{u^3 - u^{-3}}{3}\right) - \left(\frac{u^4 - u^{-4}}{4}\right) + \text{etc.},$$

on fait $u = e^{z\sqrt{-1}}$, on aura

$$\mathrm{l}e^{z\sqrt{-1}} = e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}} - \left(\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{2}\right) + \left(\frac{e^{3z\sqrt{-1}} - e^{-3z\sqrt{-1}}}{3}\right) - \left(\frac{e^{4z\sqrt{-1}} - e^{-4z\sqrt{-1}}}{4}\right) + \text{etc.};$$

mais $le^{z\sqrt{-1}} = z\sqrt{-1}$, et par conséquent,

$$z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3z\sqrt{-1}} - e^{-3z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \frac{1}{4}\left(\frac{e^{4z\sqrt{-1}} - e^{-4z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right) + \text{etc.};$$

divisant les deux membres de cette équation par 2, on trouvera

$$\frac{1}{2}z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3z\sqrt{-1}} - e^{-3z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \frac{1}{4}\left(\frac{e^{4z\sqrt{-1}} - e^{-4z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \text{etc};$$

et à cause que $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin z \\ \dfrac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin 2z \\ \text{etc.}, \end{array}\right.$

il en résultera

$$\tfrac{1}{2}z = \sin z - \tfrac{1}{2}\sin 2z + \tfrac{1}{3}\sin 3z - \tfrac{1}{4}\sin 4z + \text{etc.}$$

Si l'on fait $z = 1^q$, alors $\sin 2z$, $\sin 4z$, et en général tous les sinus des multiples pairs, sont égaux à zéro; il ne reste que ceux qui sont impairs; mais il faut observer qu'ils sont alternativement positifs et négatifs : c'est-à-dire que $\sin 1^q$ étant positif, $\sin 3^q$ est négatif, $\sin 5^q$ est positif, $\sin 7^q$ est négatif, et ainsi de suite. En vertu de ces considérations, on trouvera que l'arc de

$$45^\circ = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{etc.},$$

résultat conforme à celui du n° 43.

57. La considération des sinus des arcs multiples conduit encore à un développement de l'arc de cercle, d'une forme très-différente du précédent, et qui est dû à Euler ainsi que la plus grande partie de ce qui concerne le calcul analytique de fonctions circulaires.

Puisqu'on a $\sin(x+z) = \sin x \cos z + \cos x \sin z$, on trouvera en faisant $z = x$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Substituant $\frac{1}{2}x$ à x, il viendra $\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x$. Faisant de nouveau la même substitution, on obtiendra $\sin\frac{1}{2}x = 2\sin\frac{1}{4}x\cos\frac{1}{4}x$; mettant cette valeur de $\sin\frac{1}{2}x$ dans celle de $\sin x$, il en résultera $\sin x = 4\sin\frac{1}{4}x\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{4}x$; mais on aura; en opérant comme tout-à-l'heure, $\sin\frac{1}{4}x = 2\sin\frac{1}{8}x\cos\frac{1}{8}x$; par conséquent $\sin x = 8\sin\frac{1}{8}x\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{4}x\cos\frac{1}{8}x$. On pourra chasser $\sin\frac{1}{8}x$ au moyen de l'équation $\sin\frac{1}{8}x = 2\sin\frac{1}{16}x\cos\frac{1}{16}x$; par conséquent il viendra $\sin x = 16\sin\frac{1}{16}x\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{4}x\cos\frac{1}{8}x\cos\frac{1}{16}x$.

On voit qu'en continuant de la même manière, on introduira chaque fois un nouveau cosinus, et qu'on aura en général

$$\sin x = 2^n \sin\frac{1}{2^n}x\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{4}x\cos\frac{1}{8}x\cos\frac{1}{16}x\ldots\cos\frac{1}{2^n}x.$$

Mais plus n sera grand, plus l'arc $\frac{1}{2^n}x$ sera petit, et par conséquent, moins il différera de son sinus, et plus son cosinus approchera du rayon ou de l'unité; la limite de l'expression précédente sera donc

$$\sin x = x\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{4}x\cos\frac{1}{8}x \text{ etc.}$$

On tirera de là

$$x = \frac{\sin x}{\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{4}x\cos\frac{1}{8}x \text{ etc.}};$$

et à cause que $\frac{1}{\cos z} = \operatorname{séc} z$, on en conclura aussi

$$x = \sin x \operatorname{séc}\frac{1}{2}x \operatorname{séc}\frac{1}{4}x \operatorname{séc}\frac{1}{8}x \text{ etc.}$$

Ce produit converge toujours vers une valeur finie; car à mesure que l'arc devient moindre, la sécante approche du rayon ou de l'unité, ainsi les facteurs vont toujours en diminuant.

En prenant les logarithmes, on ramènerait ce résultat à la forme d'une suite ordinaire, car on trouverait

$$\mathrm{l}x = \mathrm{l}\sin x + \mathrm{l}\operatorname{séc}\frac{1}{2}x + \mathrm{l}\operatorname{séc}\frac{1}{4}x + \mathrm{l}\operatorname{séc}\frac{1}{8}x + \text{ etc.}$$

Ce n'est pas ici le seul exemple d'un développement exprimé par un produit composé d'une infinité de facteurs; on en connaît un assez grand nombre d'autres, dérivés des séries obtenues ci-dessus pour e^x, $\sin x$, $\cos x$, etc.; on les trouvera dans le troisième volume de cet Ouvrage, où ils seront vérifiés par divers procédés.

58. Lorsqu'on a obtenu l'expression d'une quantité par une suite ordonnée suivant les puissances d'une autre quantité, on peut renverser *Du retour des suites.*

la question en regardant la seconde comme une fonction de la première, et chercher son développement. C'est ainsi qu'après avoir trouvé la valeur du cosinus et du sinus, au moyen des puissances de l'arc, on peut demander celle de l'arc lui-même. Les problèmes de ce genre sont l'objet du *retour des suites*. Je vais exposer d'abord le procédé que Newton, qui les résolut le premier, nous a transmis dans une de ses lettres à Oldembourg, parce qu'il me paraît le plus naturel.

Soit x un arc de cercle, et y son sinus, on aura (39)

$$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \text{etc.};$$

si on pouvait éliminer toutes les puissances de x, excepté la première, on obtiendrait la valeur de x en y; or c'est à quoi on parviendra facilement de la manière suivante :

On calculera d'abord la troisième puissance de y, soit directement, soit à l'aide des formules du n° 19, et on trouvera, après les réductions, $y^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120}x^7 - \text{etc.}$; éliminant, entre cette équation et la proposée, x^3 comme une inconnue particulière, il viendra

$$y + \frac{y^3}{6} = x - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{120}\right)x^5 + \left(\frac{13}{720} - \frac{1}{5040}\right)x^7 - \text{etc.},$$

ce qui donne, en réduisant,

$$y + \frac{y^3}{6} = x - \frac{3x^5}{40} + \frac{x^7}{56} - \text{etc.}$$

Formant ensuite la cinquième puissance de y, on aura $y^5 = x^5 - \frac{5x^7}{6} + \text{etc.}$; et chassant x^5 du dernier résultat, on trouvera

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} = x - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{56}\right)x^7 + \text{etc.},$$

ou

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} = x - \frac{5x^7}{112} + \text{etc.};$$

mais on a $y^7 = x^7 - \text{etc.}$: par conséquent

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} = x + \text{etc.}$$

Nous voilà donc parvenus au développement de x en y, poussé jusqu'à la septième puissance de y, et la marche que nous avons suivie pour y arriver est assez claire pour qu'on puisse la continuer aussi loin qu'on voudra. En calculant encore deux termes de plus, on aura

$$y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9 + \frac{63}{2816}y^{11} + \text{etc.} = x.$$

Quoiqu'on ne voie pas tout de suite la loi des différens termes de la série précédente, on la découvrira en décomposant les coefficiens et les diviseurs numériques dans leurs facteurs simples, et il viendra

$$y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{3.y^5}{2.4.5} + \frac{3.5.y^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.y^9}{2.4.6.8.9} + \frac{3.5.7.9.y^{11}}{2.4.6.8.10.11} + \text{etc.} = x:$$

telle est l'expression de l'arc x développé suivant les puissances de son sinus y.

Cet exemple suffirait, en quelque sorte, pour faire connaître l'esprit de la méthode; nous remarquerons cependant que si on avait

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

il faudrait, pour plus de commodité, passer la quantité déterminée a dans l'autre membre, et faire $y - a = z$, ce qui donnerait

$$z = bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

et le résultat procéderait alors suivant les puissances de z. Sans cette précaution, chaque puissance de y produirait de nouveaux termes indépendans de x; et il naîtrait de là une suite indéfinie pour le premier terme du développement cherché.

Si la série proposée ne renfermait pas la première puissance de x, on n'aurait que la valeur de la puissance la moins élevée, et par conséquent il faudrait extraire du résultat une racine du degré marqué par l'exposant de cette puissance, ce qui serait facile, au moyen des formules du n° 19.

Un des avantages les plus remarquables du procédé qui nous occupe, c'est de conduire directement à la forme de la série cherchée. Soit pour exemple

$$z = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \text{etc.};$$

il faut éliminer d'abord x^3; or pour cela on doit élever z à une puissance telle que le premier terme soit affecté de x^3. Supposons que cette condition soit remplie par le développement de z^m; on aura nécessairement $z^m = a^m x^{2m} +$ etc., il faudra par conséquent que $2m = 3$, ou que $m = \frac{3}{2}$. On élevera donc la série qui exprime z à la puissance $\frac{3}{2}$, ce qu'on pourra faire commodément en lui donnant la forme suivante :

$$z = x^2\{a + bx + cx^2 + \text{etc.}\}, \text{ et on trouvera } z^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}x^3 + \tfrac{3}{2}ba^{\frac{3}{2}-1}x^4 + \text{ etc.}$$

On chassera x^3 par cette équation; il ne restera plus que x^2, x^4, et des puissances supérieures. En élevant z au quarré, on aura un résultat qui servira à l'élimination de x^4. Cette opération peut être continuée actuellement sans difficulté, quand même il serait encore nécessaire d'élever la valeur de z à des puissances fractionnaires.

La quantité représentée par z pourrait être elle-même une série ordonnée suivant les puissances de y, sans que pour cela le procédé changeât; il serait seulement nécessaire d'ordonner les développemens des différentes puissances de z par rapport à y, en repassant de la première de ces quantités à la seconde.

Enfin si on avait deux séries telles que

$$\begin{cases} z = ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.} \\ t = a'x + b'x^2 + c'x^3 + \text{etc.}, \end{cases}$$

on pourrait, par la même méthode, trouver le développement de z en t, et réciproquement.

Pour avoir z, par exemple, on prendra la valeur de x en t dans la seconde série, et on la substituera dans la première. Le résultat de cette opération ne contiendra plus que le quarré et les puissances supérieures de x. On élevera ensuite la seconde série au quarré, et on en tirera une valeur de x^2 en t^2, x^3, x^4, etc., qui donnera le moyen de chasser x^2 du résultat précédent : en continuant de la même manière, on se débarrassera successivement des diverses puissances de x. Le procédé que je viens d'indiquer revient à celui qu'on suit ordinairement pour l'élimination, mais avec cette différence qu'au lieu de commencer par chasser les termes dont l'exposant est le plus haut, on opère d'abord sur ceux où il est le plus petit.

Voici maintenant une formule générale qui renferme tous les cas où les exposans des puissances de x forment une progression par différences. Soit

$$y = k + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

En transposant k, et faisant, pour abréger, $y-k=z$, on aura

$$z=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+\text{etc.}\,\ldots\ldots\ldots(1).$$

Calculant les valeurs de z^2, z^3, z^4, etc., on pourra éliminer successivement x^2, x^3, x^4, etc., comme nous l'avons pratiqué dans les exemples précédens, et on trouvera

$$x=\frac{1}{a}z-\frac{b}{a^3}z^2+\left(\frac{2b^2-ac}{a^5}\right)z^3-\left(\frac{5b^3-5abc+a^2d}{a^7}\right)z^4$$
$$+\left(\frac{14b^4-21ab^2c+6a^2bd+3a^2c^2-a^3e}{a^9}\right)z^5+\text{etc.}$$

59. On peut encore arriver au même résultat par la méthode des coefficiens indéterminés, en supposant

$$x=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{etc.},$$

et en calculant, par le moyen des formules du n° 19, les valeurs de x^2, x^3, x^4, x^5, etc. pour les substituer dans l'équation (1). Ces opérations étant exécutées, on transposera le premier membre dans le second, et on égalera à zéro tous les termes affectés d'une même puissance de z, ce qui fournira les équations nécessaires pour déterminer les coefficiens A, B, C, etc. Je ne m'arrêterai pas sur les détails de ces calculs, dont on a déjà vu un assez grand nombre d'exemples; mais je tracerai la marche de l'opération propre à tirer la valeur de z de l'équation

$$\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\text{etc.}=ax+bx^2+cx^3+dx^4+\text{etc.},$$

formée par deux suites infinies.

Si, après avoir supposé

$$x=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.},$$

on développait actuellement les puissances de cette dernière série, soit par la formule de la page 30, soit par des multiplications successives, la substitution immédiate de ces puissances ne conduirait qu'à des résultats dépourvus de symétrie, comme celui qui termine l'article précédent, et d'après lequel il serait impossible de prolonger la valeur de x, au-delà des termes déjà trouvés. Voici un procédé qui, à la vérité, a l'inconvénient de laisser encore beaucoup de calculs à effectuer, mais qui du moins met en évidence la loi qui les lie entre eux, et le moyen de les pousser aussi loin que l'on voudra, par des formules symétriques.

Que l'on fasse d'abord

$$\begin{aligned}
x &= A_1 z + B_1 z^2 + C_1 z^3 + D_1 z^4 + \text{etc.},\\
x^2 &= A_2 z^2 + B_2 z^3 + C_2 z^4 + D_2 z^5 + \text{etc.},\\
x^3 &= A_3 z^3 + B_3 z^4 + C_3 z^5 + D_3 z^6 + \text{etc.},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^n &= A_n z^n + B_n z^{n+1} + C_n z^{n+2} + D_n z^{n+3} + \text{etc.},
\end{aligned}$$

ensorte que les lettres A_n, B_n, C_n, etc., désignent les coefficiens de la puissance n du polynome

$$A_1 z + B_1 z^2 + C_1 z^3 + D_1 z^4 + \text{etc.} = z(A_1 + B_1 z + C_1 z^2 + D_1 z^3 + \text{etc.}),$$

et que l'on substitue dans l'équation proposée les développemens des puissances de x. En passant tous les termes dans un seul membre, il viendra

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
aA_1 z + & aB_1 z^2 + & aC_1 z^3 + & aD_1 z^4 + & \text{etc.}\\
 & + bA_2 z^2 + & bB_2 z^3 + & bC_2 z^4 + & \text{etc.}\\
 & & + cA_3 z^3 + & cB_3 z^4 + & \text{etc.}\\
 & & & + dA_4 z^4 + & \text{etc.}\\
 & & & & + \text{etc.}\\
-\alpha z & - \beta z^2 & - \gamma z^3 & - \delta z^4 & - \text{etc.}
\end{array}\right\} = 0;$$

d'où l'on tirera

$$\left.\begin{array}{l}
aA_1 - \alpha = 0,\\
aB_1 + bA_2 - \beta = 0,\\
aC_1 + bB_2 + cA_3 - \gamma = 0,\\
aD_1 + bC_2 + cB_3 + dA_4 - \delta = 0,\\
\text{etc.}
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
A_1 = \frac{\alpha}{a},\\
B_1 = \frac{\beta - bA_2}{a},\\
C_1 = \frac{\gamma - bB_2 - cA_3}{a},\\
D_1 = \frac{\delta - bC_2 - cB_3 - dA_4}{a},\\
\text{etc.}
\end{array}$$

équations dont la loi est évidente et qui déterminent d'abord A_1, puis

B_1 par A_2, C_1 par B_2 et A_3, D_1 par C_2, B_3 et A_4,

et ainsi de suite, de manière que chaque coefficient de la valeur de x dépend des coefficiens précédens, calculés pour les puissances dont le plus haut exposant est égal au rang qu'occupe le coefficient cherché.

Les coefficiens précédens se calculent par les équations placées au bas de la page 29. Il suffit pour cela d'y changer

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \text{etc. en}\ A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \text{etc.}$$

puisqu'on veut former le développement de

$$(A_1+B_1z+C_1z^2+D_1z^3+\text{etc.})^n=A_n+B_nz+C_nz^2+D_nz^3+\text{etc.}:$$

écrivant donc

$$A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n,\ \text{etc. au lieu de}\ A,\ B,\ C,\ D,\ \text{etc.},$$

dans les équations citées, elles deviennent

$$\begin{aligned}
&A_n=A_1^n\\
&A_1B_n=nB_1A_n\\
&2A_1C_n=(n-1)B_1B_n+2nC_1A_n\\
&3A_1D_n=(n-2)B_1C_n+(2n-1)C_1B_n+3nD_1A_n\\
&4A_1E_n=(n-3)B_1D_n+(2n-2)C_1C_n+(3n-1)D_1B_n+4nE_1A_n\\
&5A_1F_n=(n-4)B_1E_n+(2n-3)C_1D_n+(3n-2)D_1C_n+(4n-1)E_1B_n+5nF_1A_n
\end{aligned}$$

etc.

En y faisant successivement $n=2$, $n=3$, $n=4$, etc., on en tirera la valeur de A_2 pour la substituer dans celle de B_1 (pag. précéd.); celles de B_2 et de A_3, pour les substituer dans celle de C_1, et ainsi des autres. Si l'on effectue ces calculs, en laissant, pour abréger, dans l'expression de chacun des coefficiens A_1, B_1, C_1, etc. les lettres qui désignent les coefficiens précédens, et en omettant les chiffres 1, puisqu'il n'en reste pas d'autres, on trouvera

$$\begin{aligned}
x=&\frac{\alpha}{a}z+\frac{\beta-bA^2}{a}z^2+\frac{\gamma-2bAB-cA^3}{a}z^3\\
&+\frac{\delta-bB^2-2bAC-3cA^2B-dA^4}{a}z^4\\
&+\frac{\varepsilon-2bBC-2bAD-3cAB^2-3cA^2C-4dA^3B-eA^5}{a}z^5\\
&+\frac{\zeta-2bBD-bC^2-2bAE-cB^3-6cABC-3cA^2D-6dA^2B^2-4dA^3C-5eA^4B-fA^6}{a}z^6\\
&+\text{etc.},
\end{aligned}$$

développement inséré par Moivre dans les *Transactions philosophiques* pour 1698 (page 190), et dont il a indiqué la loi.

La forme donnée ci-dessus aux équations d'où dépend le retour des suites, montre combien on simplifierait le calcul, par l'emploi d'un procédé propre à dériver aisément les uns des autres, les divers coefficiens des puissances du polynome $A_1 + B_1 z +$ etc.; et c'est aussi ce qu'ont fait les Analystes allemands qui ont tourné leurs recherches sur le développement de ces puissances; mais antérieurement à leurs travaux, on avait déduit du calcul différentiel plusieurs formules régulières pour passer d'une série à son inverse; c'est pourquoi je ne m'étendrai pas davantage, pour le moment, sur cette matière. Ceux qui voudraient faire des applications particulières, trouveront poussée jusqu'à neuf termes, dans la seconde édition de la *Trigonométrie* de M. Cagnoli (page 46), la série que j'ai rapportée page 99, et dans laquelle rentre celle de Moivre, lorsqu'on prend $\alpha = 1$, et qu'on suppose nulles les quantités β, γ, δ, etc.

Développement des fonctions données par des équations où les inconnues sont mêlées entre elles.

60. Jusqu'ici la forme de la série à coefficiens indéterminés, propre à représenter d'abord le développement cherché, était aisée à prévoir, soit par l'examen des cas particuliers, soit par la simplicité de l'équation à laquelle il fallait satisfaire; mais quand cette équation contient des termes où la fonction et la variable dont elle dépend sont combinées entre elles, la loi que doivent suivre, dans les différens termes, les exposans de la variable, ne se découvre que par une recherche spéciale. On parviendrait bien à la trouver, en résolvant, par rapport à la fonction proposée, l'équation donnée, et en développant les radicaux compris dans l'expression de ses racines; mais ce moyen ne serait plus praticable si elle passait le quatrième degré, et deviendrait déjà très-peu commode pour le troisième, à cause de la complication des radicaux. Voyons donc comment on a surmonté cette difficulté.

Quelle que soit la forme du développement cherché, d'abord qu'on le suppose composé d'une suite de monomes, un quelconque de ses termes pourra être représenté par Ax^{α}, ensorte qu'on aura en général

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.},$$

les exposans α, β, γ, etc. pouvant être des nombres quelconques. Cependant, lorsqu'on développe une fonction, on a presque toujours pour but d'en trouver une valeur approchée, ce qui exige que la série à laquelle on parvient soit convergente : or on ne peut remplir en général cette dernière condition que lorsque la quantité x est très-petite ou très-grande. Dans le premier cas, il est évident que les exposans α, β, γ, etc. doivent être positifs et rangés suivant l'ordre de leurs grandeurs respectives, en commençant par le plus petit; dans le second, au contraire, ils doivent être négatifs, ou du moins finir par devenir tels, et par conséquent s'il y en a de positifs il faudra les écrire les premiers, en commençant par le plus grand.

Les méthodes analytiques d'approximation ont la plus grande analogie avec celles que l'usage des fractions décimales a introduites en Arithmétique, et qui consistent à chercher successivement les chiffres de l'espèce la plus haute, et à négliger ceux des espèces inférieures. Les nombres, par l'arrangement même des chiffres qui les expriment, sont ordonnés suivant les puissances de 10 (*); on juge de la valeur des chiffres qu'on trouve et celle des chiffres qui restent à trouver, ou qu'on néglige, par le rang qu'ils occupent, et les plus considérables se présentent les premiers : on ordonnera donc aussi les expressions algébriques afin de trouver d'abord les plus grands termes et ensuite ceux qui sont inférieurs; mais cela ne peut se faire à moins qu'on n'assigne un degré de grandeur à l'une des quantités qui entrent dans l'expression que l'on considère.

Il ne paraît pas facile de discerner les plus grands termes dans une expression qui renferme à la fois deux variables données implicitement l'une par l'autre; telle serait, par exemple, l'équation

$$ax^{\alpha}y^{\alpha'} + bx^{\beta}y^{\beta'} + cx^{\gamma}y^{\gamma'} + \text{etc.} = 0.$$

Les quantités x et y sont liées entre elles d'une manière qui, quoique déterminée, ne permet pas de juger, à la simple inspection, comment les changemens de l'une influent sur l'autre; et il arrivera souvent qu'elles marcheront en sens inverse, ensorte que la première étant très-petite, la seconde sera très-grande, et réciproquement; ou bien que l'une décroissant très-rapidement, l'autre n'éprouvera pendant ce temps que fort peu de diminution.

Les Géomètres ont imaginé différens moyens pour distinguer parmi les termes d'une équation, ceux qui sont les plus grands. Newton inventa le parallélogramme analytique que de Gua réduisit ensuite à un

---

(*) Le nombre 349, 537, par exemple, n'est autre chose que

$$3(10)^2 + 4(10)^1 + 9(10)^0 + 5(10)^{-1} + 3(10)^{-2} + 7(10)^{-3}.$$

triangle : Taylor a employé une construction géométrique ; mais M. Lagrange a donné un procédé analytique très-simple et très-commode, que nous allons faire connaître.

61. Soit une équation quelconque

$$ax^m y^n + a'x^{m'}y^{n'} + a''x^{m''}y^{n''} + a'''x^{m'''}y^{n'''} + \text{etc.} = 0;$$

on représentera par Ax^α le premier terme du développement de y, et en supposant x très-petite, il suffira d'avoir égard à ce terme qui composera la plus grande partie de la valeur de y. En le substituant à la place de cette variable, dans l'équation proposée, on trouvera

$$aA^n x^{m+n\alpha} + a'A^{n'} x^{m'+n'\alpha} + a''A^{n''} x^{m''+n''\alpha} + a'''A^{n'''} x^{m'''+n'''\alpha} + \text{etc.} = 0.$$

Cette équation ne devant avoir lieu que d'une manière approchée, il faut en classer les termes suivant l'ordre de leur grandeur, marqué par l'exposant dont ils sont affectés, et ne conserver que ceux qui sont du degré le moins élevé : or cela ne se peut tant que l'exposant α est inconnu. Pour le déterminer on remarquera que l'équation que nous considérons ne saurait être satisfaite, en n'ayant égard qu'aux puissances inférieures de x, quelle que soit d'ailleurs cette variable, s'il ne s'y trouve deux termes comparables entre eux, c'est-à-dire du même degré, et dont l'exposant soit plus petit que ceux des autres.

Il s'agit donc maintenant de trouver pour α une valeur qui rende deux des nombres

$$m+n\alpha,\ m'+n'\alpha,\ m''+n''\alpha,\ m'''+n'''\alpha,\ m^{\text{IV}}+n^{\text{IV}}\alpha,\ \text{etc.}$$

égaux entre eux et plus petits que tous les autres.

Chaque équation qu'on formerait en égalant deux à deux les nombres proposés, donnerait une valeur de α qui satisferait à la première condition, et qu'il faudrait substituer dans $m+n\alpha$, $m'+n'\alpha$, etc., pour s'assurer si elle remplit la seconde ; mais en opérant ainsi, on ferait souvent beaucoup de combinaisons inutiles qu'on peut éviter, comme on va le voir.

En égalant seulement le premier terme à chacun de ceux qui le suivent, pour en tirer diverses valeurs de α, qu'on désignera par α', α'', α''', etc., il en résultera

$$\alpha' = \frac{m'-m}{n-n'},\quad \alpha'' = \frac{m''-m}{n-n''},\quad \alpha''' = \frac{m'''-m}{n-n'''},\ \text{etc},$$

Au lieu d'essayer ces valeurs chacune en particulier, cherchons dans la série

$$m+n\alpha,\quad m'+n'\alpha,\quad m''+n''\alpha,\quad m'''+n'''\alpha,\ \text{etc}\ldots\ldots..(1)$$

l'expression des différences entre le premier terme et chacun des autres: il viendra

$$m'-m+(n'-n)\alpha,\ m''-m+(n''-n)\alpha,\ m'''-m+(n'''-n)\alpha,\ \text{etc};$$

mais au moyen des valeurs de α trouvées précédemment, on aura

$$m'-m=-\alpha'(n'-n),\ m''-m=-\alpha''(n''-n),\ m'''-m=-\alpha'''(n'''-n),\ \text{etc.}$$

et par conséquent les différences ci-dessus pourront être exprimées comme il suit:

$$(n'-n)(\alpha-\alpha'),\quad (n''-n)(\alpha-\alpha''),\quad (n'''-n)(\alpha-\alpha'''),\ \text{etc.}$$

Si, pour abréger, on fait $m+n\alpha=\pi$, la série (1) prendra la forme

$$\pi,\ \pi+(n'-n)(\alpha-\alpha'),\ \pi+(n''-n)(\alpha-\alpha''),\ \pi+(n'''-n)(\alpha-\alpha'''),\ \text{etc}\ldots(2);$$

et comme on peut toujours ranger dans l'ordre qu'on voudra, les termes de l'équation proposée, on les écrira de manière que les nombres n, n', n'', n''', etc. forment une progression croissante, ce qui rendra positives toutes les quantités $n'-n$, $n''-n$, $n'''-n$, etc. Dans cet état de choses, on voit évidemment que si on donne à α la plus grande des valeurs représentées par α', α'', α''', etc., le terme qui répond à cette valeur deviendra égal au premier π et plus petit que tous les autres. En effet, si pour fixer les idées on suppose qu'elle soit α''', le quatrième terme de la série (2) se réduira à π, et on verra en même temps que les quantités $(n'-n)(\alpha-\alpha')$, $(n''-n)(\alpha-\alpha'')$, etc. seront toutes positives.

La plus grande des quantités α', α'', α''', etc. satisfera donc aux deux conditions demandées.

Si la question proposée a encore d'autres solutions, ce ne peut être que des nombres plus petits que celui qu'on vient de trouver, car si dans la série (2) on substituait au lieu de α un nombre plus grand que α''', qui par hypothèse surpasse les autres valeurs α', α'', α^{IV}, etc., le premier terme deviendrait moindre que tous ceux qui les suivent, et par conséquent la première condition ne serait plus remplie.

Supposons donc qu'on prenne pour α un nombre plus petit que α''', alors les termes π, $\pi+(n'-n)(\alpha-\alpha')$, $\pi+(n''-n)(\alpha-\alpha'')$ seront plus grands que $\pi+(n'''-n)(\alpha-\alpha''')$, car la différence $\alpha-\alpha'''$ sera négative et surpassera toutes les différences négatives qui pourraient se trouver parmi les précédentes; de plus elle est multipliée par la quantité $n'''-n$ qui surpasse aussi les quantités $n'-n$ et $n''-n$, puisque les nombres n, n', n'' forment une progression croissante. Il suit de là qu'on doit faire abstraction de tous les termes qui précèdent celui dans lequel se trouve la plus grande des valeurs α', α'', α''', etc. En considérant ceux qui le suivent, on verra que les plus petits d'entre eux peuvent devenir moindres que les premiers, parce que si dans les différences $\alpha-\alpha^{\text{IV}}$, $\alpha-\alpha^{\text{V}}$, etc. il s'en trouve qui soient négatives, comme elles seront multipliées par des nombres $n^{\text{IV}}-n$, $n^{\text{V}}-n$, etc. plus grands que leurs correspondans dans l'autre partie de la série, elles donneront des résultats négatifs qui surpasseront ceux qu'on aurait trouvés dans les termes qui précèdent le quatrième.

On conclura donc de là que pour obtenir une seconde solution, il ne faut avoir égard qu'au terme qui contient la plus grande valeur de α, et à ceux qui viennent après lui. Dans l'hypothèse que nous avons établie, α''' étant la plus grande valeur, le terme qui la donne est représenté par $m'''+n'''\alpha$ dans la série (1); on considérera donc la nouvelle série $m'''+n'''\alpha$, $m^{\text{IV}}+n^{\text{IV}}\alpha$, $m^{\text{V}}+n^{\text{V}}\alpha$, etc., et on opérera sur celle-ci comme nous avons fait sur la proposée.

Il pourrait arriver qu'une même valeur de α rendît plusieurs termes égaux au premier, dans la série (2): alors il ne faudrait partir, pour la recherche d'une nouvelle solution, que de celui de ces termes qui se trouve le plus éloigné du premier; car il est aisé de voir que tous ceux qui sont avant lui le surpasseront, lorsqu'on prendra pour α un nombre moindre que la plus grande valeur trouvée dans l'opération précédente.

Les détails de la méthode que nous venons d'exposer sont renfermés dans la règle suivante:

On égalera le premier terme de la série à chacun des suivans; on prendra la plus grande des valeurs de α, qui résulteront des équations qu'on aura formées ainsi, et ce sera la première solution de la question proposée. On partira ensuite du dernier des termes, qui, par sa comparaison avec le premier, a donné cette plus grande valeur, pour l'égaler à chacun des suivans, ce qui fera connaître de nouvelles valeurs de α, parmi lesquelles on *choisira la plus grande, qui résoudra encore la question. On partira de nouveau du terme le plus avancé de ceux qui ont donné la solution précédente, et on le comparera avec les termes ultérieurs, comme on l'a indiqué ci-dessus.*

En continuant ainsi, on parviendra à trouver toutes les valeurs de α qui rendent deux ou un plus grand nombre de termes de la série (1) égaux entre eux et moindres que tous les autres.

62. Prenons pour exemple l'équation

$$a - a'x^3y + a''\frac{y^2}{x} - a'''\frac{y^4}{x^5} + a^{\mathrm{iv}}x^2y^5 - a^{\mathrm{v}}\frac{y^6}{x^3} = 0.$$

En y substituant Ax^α au lieu de y, elle deviendra

$$a - a'Ax^{3+\alpha} + a''A^2x^{-1+2\alpha} - a'''A^4x^{-5+4\alpha} + a^{\mathrm{iv}}A^5x^{2+5\alpha} - a^{\mathrm{v}}A^6x^{-3+6\alpha} = 0;$$

et pour en connaître les plus grands termes, dans la supposition de x très-petite, il faudra déterminer α de manière à rendre deux des nombres 0, $3+\alpha$, $-1+2\alpha$, $-5+4\alpha$, $2+5\alpha$, $-3+6\alpha$, égaux entre eux et plus petits que les autres.

On égalera, d'après la règle, le premier terme à tous les autres, ce qui donnera successivement pour α les nombres -3, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $-\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$, dont le plus grand, $\frac{5}{4}$, satisfait à la question. En effet, en substituant $\frac{5}{4}$ à α, les nombres proposés deviennent 0, $\frac{17}{4}$, $\frac{6}{4}$, 0, $\frac{33}{4}$, $\frac{18}{4}$, et les deux termes égaux sont plus petits que les autres.

On prendra ensuite le terme $-5+4\alpha$, d'où on a tiré la solution précédente, pour le comparer aux deux suivans, $2+5\alpha$ et $-3+6\alpha$; il résultera de là $\alpha = -7$ et $\alpha = -1$. En regardant comme la plus grande de ces valeurs celle qui s'éloigne le moins du positif, on prendra $\alpha = -1$, et on aura les six nombres 0, 2, -3, -9, -3, -9, parmi lesquels -9 est le plus petit. Ici l'opération est achevée, puisque la solution qu'on vient d'obtenir est déduite de la comparaison du quatrième terme avec le dernier.

En substituant les deux valeurs de α dans l'équation proposée, elle deviendra, en vertu de la première,

$$a - a'Ax^{\frac{17}{4}} + a''A^2x^{\frac{6}{4}} - a'''A^4 + a^{\mathrm{iv}}A^5x^{\frac{33}{4}} - a^{\mathrm{v}}A^6x^{\frac{18}{4}} = 0;$$

et en vertu de la seconde,

$$a - a'Ax^2 + a''A^2x^{-3} - a'''A^4x^{-9} + a^{IV}A^5x^{-3} - a^{V}A^6x^{-9} = o.$$

Dans le premier de ces résultats, les deux plus grands termes sont a et $a'''A^4$; dans le second, ce sont $a'''A^4x^{-9}$ et $a^{V}A^6x^{-9}$.

63. Pour connaître les termes les plus considérables d'une équation, dans la supposition de x très-grande, on substituera $\frac{1}{t}$ à x, et on cherchera parmi les termes de l'équation transformée ceux qui deviennent les plus grands lorsqu'on suppose la valeur de t fort petite, hypothèse qui rend celle de x très-grande.

On parviendrait directement au même but en observant qu'après la substitution de Ax^{α} pour y, dans l'équation proposée, les plus grands termes seront ceux qui renfermeront la plus haute puissance de x, et que par conséquent on les trouvera en déterminant α, de manière que deux des nombres de la suite $m+n\alpha$, $m'+n'\alpha$, $m''+n''\alpha$, etc. deviennent égaux entre eux et surpassent tous les autres. Cette dernière question se résoudra en prenant parmi les quantités α', α'', α''', etc. du n° 61, celle qui est la plus petite, et en continuant à choisir dans chaque nouvelle série la plus petite des valeurs de α.

Dans l'exemple du numéro précédent, la plus petite des valeurs de α que nous avons trouvées d'abord, est -3; et elle donne les six nombres o, o, -7, -17, -13, -21, dont les deux premiers, égaux entre eux, doivent être regardés comme les plus grands, puisque les autres sont négatifs. La solution -3 ayant été déduite de la comparaison du second terme de la suite proposée avec le premier, on égalera, conformément à la règle, ce second terme à chacun de ceux qui le suivent, pour obtenir une autre solution. La plus petite valeur de α tirée de cette opération sera $\frac{1}{4}$, d'où résultera cette série : $o, \frac{13}{4}, -\frac{2}{4}, -4, \frac{13}{4}, -\frac{6}{4}$; dans laquelle $\frac{13}{4}$ remplira les conditions imposées. Enfin comparant le cinquième terme de la suite proposée avec le sixième, on trouvera $\alpha=5$, d'où il viendra o, 8, 9, 15, 27, 27; et 27 satisfera encore à la question.

La substitution des trois valeurs de α dans l'équation

$$a - a'x^3y + \frac{a''y^2}{x} - \text{etc.} = o,$$

donnera autant de résultats, qui renfermeront chacun deux termes affectés du même exposant et susceptibles de devenir plus grands que tous les autres, lorsqu'on donnera à x une valeur très-grande.

Le procédé dont nous venons de faire usage pour trouver α, dérive trop simplement de ce qui a été dit dans le n° 61, pour qu'il soit besoin de le démontrer en particulier; nous observerons que si dans la série des exposans $m+n\alpha$, $m'+n'\alpha$, etc., il s'en trouvait qui renfermassent le même multiple de α, leur grandeur respective ne dépendrait que du nombre m, et que par conséquent il ne faudrait considérer que celui de ces termes dans lequel m est le plus petit, si on cherchait les moindres exposans, et au contraire celui où il est le plus grand, si on cherchait les plus hauts exposans.

64. L'exposant α du terme Ax^{α}, étant connu, il est facile de trouver le coefficient A; il suffit pour cela d'égaler à zéro tous les termes affectés du plus petit exposant, si on suppose x très-petite, ou du plus élevé, si on suppose x très-grande. Dans le premier cas, l'équation

$$a - a'Ax^{\frac{17}{4}} + a''A^2x^{\frac{6}{4}} - a'''A^4 + a^{\text{IV}}A^5x^{\frac{33}{4}} - a^{\text{V}}A^6x^{\frac{18}{4}} = 0 \quad (62)$$

donne $$a - a'''A^4 = 0, \text{ d'où } A = \sqrt[4]{\frac{a}{a'''}}.$$

Ceux qui auront saisi l'esprit de ce qui précède, verront aisément que la supposition de x très-petite rend les termes affectés de cette variable, dans l'équation ci-dessus, si petits, qu'aucun d'eux ne peut entrer en comparaison avec les deux autres a et $a'''A^4$, qui doivent par conséquent se détruire entre eux. Si on conservait quelque doute à cet égard, on le dissiperait en substituant $\frac{1}{q}$ au lieu de x, car alors on s'appercevrait qu'on peut toujours prendre le nombre q assez grand pour que la somme des termes où il entre comme diviseur, devienne d'une petitesse telle qu'on voudra.

En employant l'équation

$$a - a'Ax^2 + a''A^2x^{-3} - a'''A^4x^{-9} + a^{\text{IV}}A^5x^{-8} - a^{\text{V}}A^6x^{-9} = 0,$$

donnée par la seconde valeur de α, on aura de la même manière

$$-a'''A^4 - a^{\text{V}}A^6 = 0, \quad \text{d'où} \quad A = \sqrt{\frac{-a'''}{a^{\text{V}}}};$$

cette valeur sera imaginaire tant que les deux quantités a^m et a^r seront de même signe. On voit par cet exemple, qu'on obtiendra, en général, autant de développemens particuliers de y que α aura de valeurs différentes.

Ayant le premier terme Ax^{α}, pour trouver le second on substituera $Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}$ au lieu de y, ou, ce qui revient au même, on changera d'abord y en $Ax^{\alpha}+y'$, dans l'équation proposée, puis après les réductions on écrira Bx^{β} pour y', et on déterminera β et B comme on a déterminé α et A. On obtiendra le troisième en mettant $Bx^{\beta}+y''$ à la place de y', dans l'équation qui contient cette nouvelle variable; les réductions étant faites, on remplacera y'' par Cx^{γ}, et on trouvera γ et C, comme on a trouvé α et A, β et B : l'opération, continuée de la même manière, fera connaître les termes suivans.

Cette manière de trouver, un à un, les différens termes de la valeur approchée de la fonction y, est semblable, quant au fond, à la méthode donnée par Newton pour résoudre par approximation les équations numériques. On l'emploie, avec des modifications convenables, dans beaucoup d'autres circonstances, et elle constitue ce qu'on appelle la *méthode des substitutions successives.*

65. Je prendrai pour exemple, et afin d'éclaircir quelques difficultés qu'on pourrait rencontrer dans l'application de la méthode qui nous occupe, l'équation $ax^3+x^3y-ay^3=0$.

En y mettant Ax^{α} au lieu de y, elle deviendra

$$ax^3+Ax^{3+\alpha}-aA^3x^{3\alpha}=0;$$

et en déterminant α dans la supposition de x très-petite, on trouvera $\alpha=1$, $a-aA^3=0$; d'où $A=1$: le premier terme du développement de y sera donc x.

On fera ensuite $y=x+y'$, ce qui donnera la transformée

$$x^4-3ax^2y'+x^3y'-3axy'^2-ay'^3=0,$$

dans laquelle on changera y' en Bx^{β}. En cherchant toutes les valeurs dont β est susceptible, on trouvera $\beta=2$ et $\beta=1$; mais on voit aisément qu'il faut rejeter la seconde, car dans l'hypothèse de x très-petite la série cherchée doit être ascendante, et cette condition exige que β surpasse α. La première valeur de β donne $1 - 3aB = 0$, d'où l'on tire

$$B = \frac{1}{3a} \quad \text{et} \quad Bx^\beta = \frac{x^2}{3a}.$$

Posant $y' = \frac{x^2}{3a} + y''$, on obtiendra une seconde transformée

$$\frac{x^6}{27a^2} + 3ax^2y'' + x^3y'' + \frac{x^4}{3a}y'' + 3axy''^2 + x^2y''^2 + ay''^3 = 0,$$

dans laquelle on changera y'' en Cx^γ, et on trouvera $\gamma = 4$, $\gamma = 1$. Il faudra, par la même raison que ci-dessus, s'en tenir à la première de ces valeurs, d'où il résultera

$$C = -\frac{1}{81a^3}, \quad Cx^\gamma = -\frac{x^4}{81a^3}.$$

Ces calculs peuvent être poussés maintenant aussi loin qu'on voudra, sans qu'il s'élève de nouvelles difficultés, et on aura pour dernier résultat

$$y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4} - \text{etc.}$$

L'équation proposée fournit encore trois autres séries qui naissent de la supposition de x très-grande, et qui par conséquent sont descendantes. Pour y parvenir on déterminera α dans l'équation

$$ax^3 + Ax^{3+\alpha} - aA^3x^{3\alpha} = 0,$$

de manière que les exposans qui deviennent égaux surpassent tous les autres; les valeurs de cette quantité seront alors 0 et $\frac{3}{2}$. La première donnera $A = -a$, et en cherchant les termes suivans, elle conduit à la série

$$y = -a - a^4x^{-3} - 3a^7x^{-6} - 12a^{10}x^{-9} - 55a^{13}x^{-12} - \text{etc.}$$

La seconde donne $A - aA^3 = 0$, d'où on tire $A = \pm a^{-\frac{1}{2}}$. En employant séparément chacune des deux valeurs de A, dans les opérations subséquentes, on trouvera les deux séries suivantes, qui ne diffèrent que par les signes de leurs termes :

$$y = \quad a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a - \frac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^4x^{-3} - \text{etc.},$$

$$y = -a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a + \frac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^4x^{-3} + \text{etc.}$$

Il faut, dans la recherche de ces séries, qui sont descendantes, avoir l'attention de ne prendre parmi les valeurs qu'on trouve pour chacun des exposans β, γ, δ, etc. que celles qui sont moindres que l'exposant précédent.

Ces détails doivent suffire pour montrer comment on peut trouver les divers développemens d'une fonction implicite donnée par une équation algébrique. Il arrivera souvent que la détermination d'un ou de plusieurs coefficiens A, B, C, etc. demandera qu'on résolve une équation d'un degré supérieur au premier ; mais cet obstacle n'arrêtera point la méthode, parce que l'équation à résoudre ne renfermera que des quantités constantes : on pourra donc, dans les applications particulières, obtenir la valeur numérique du coefficient cherché, au moins par approximation, et dans le cas général on continuera d'opérer sur la lettre qui le représente, comme sur une quantité connue. Si on avait l'équation

$$2a^3 + x^3 - ay^2 - axy - y^3 = 0,$$

en y supposant x très-petite, le coefficient A serait donné par l'équation

$$2a^3 - aA^2 - A^3 = 0.$$

Dans cet exemple, l'équation à résoudre étant d'un degré impair, a au moins une racine réelle ; le premier terme du développement cherché se présentera donc aussi sous une forme réelle ; mais si on était conduit à une équation de degré pair, soit au commencement, soit dans le cours d'un développement, il faudrait d'abord s'assurer si cette équation a des racines réelles ou non, pour connaître si ce développement est réel ou imaginaire.

Cette précaution est importante ; et pour l'avoir négligée, de Gua est tombé dans une grande erreur. Elle montre avec quelle circonspection il faut traiter les séries, et combien peu on doit compter sur les conclusions qu'on en tire, lorsque la loi que suivent leurs termes n'est pas évidente, puisqu'on doit toujours craindre qu'ils ne changent de forme dans la partie de la série qu'on n'a pas calculée, et que même ils n'y deviennent imaginaires.

La méthode ci-dessus peut sembler incomplète, à quelques égards, puisqu'on n'y entre dans aucun détail sur le nombre des développemens qu'on doit tirer d'une équation, d'après son degré, et sur les cas où ces développemens peuvent acquérir des termes imaginaires; mais ce détail aurait peu d'intérêt, puisqu'on emploie rarement la méthode dont il s'agit; et d'ailleurs on peut consulter le chapitre VII de l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, par Cramer, qui mettra sur la voie de ces recherches.

66. La même méthode ferait aussi connaître le développement de y sous la forme d'une fraction continue; car, après avoir trouvé le premier terme Ax^{α}, on pourrait supposer $y=\frac{Ax^{\alpha}}{1+y'}$, y' étant une quantité fort petite, puisque par l'hypothèse le terme Ax^{α} forme la plus grande partie de la valeur de y. Ayant substitué cette expression au lieu de y, dans l'équation proposée, et fait disparaître les dénominateurs, on obtiendra une première transformée en x et y'; dans laquelle on remplacera y' par Bx^{β}, et on déterminera ensuite β et B conformément à l'hypothèse établie sur le degré de grandeur de x.

On fera $y'=\frac{Bx^{\beta}}{1+y''}$ dans la première transformée, et il en résultera une seconde en x et y'', dans laquelle on mettra Cx^{γ} au lieu de y''. Ayant déterminé γ et C, comme à l'ordinaire, on posera $y''=\frac{Cx^{\gamma}}{1+y'''}$, ce qui donnera une troisième transformée, sur laquelle on opérera comme sur les précédentes.

En remontant des valeurs de y', y'', y''', etc. à celle de y, on trouvera

$$y=\cfrac{Ax^{\alpha}}{1+\cfrac{Bx^{\beta}}{1+\cfrac{Cx^{\gamma}}{1+\cfrac{Dx^{\delta}}{1+\text{etc.}}}}}$$

On voit qu'il doit y avoir deux espèces de développemens de cette forme: les uns ascendans, c'est-à-dire dans lesquels les exposans des puissances de x vont en augmentant, convergent vers la valeur de la fonction y, lorsque x est très-petite; les autres, au contraire, qui sont descendans, parce que les exposans de x diminuent suivant le progrès de la fraction, ne sont convergens que dans le cas où x a une très-grande valeur.

Je laisse aux lecteurs familiarisés avec la théorie des fractions continués, le soin de s'exercer sur quelques exemples : mon but dans ce moment n'est que d'indiquer une application intéressante, sur laquelle je reviendrai avec plus de détail dans le second volume de cet Ouvrage, parce qu'elle offre un moyen très-élégant pour trouver les valeurs approchées et quelquefois exactes, des fonctions données par un genre d'équations plus difficile à résoudre que celles qui sont purement algébriques, moyen qu'on doit à M. Lagrange, ainsi que tout ce qui précède.

Résolution de plusieurs classes d'équations, par les tables de sinus.

67. Les formules du n° 48 donnent un moyen facile de trouver, par les tables de sinus, toutes les racines des équations à deux termes. Ces équations, comprises dans la formule générale $x^n \mp a^n = 0$, se transformant en $a^n(y^n \mp 1) = 0$, lorsqu'on y fait $x = ay$, il suffit de considérer la suivante :

$$y^n \mp 1 = 0,$$

qui revient à

$$y^n = \pm 1.$$

L'expression $y = \cos z + \sqrt{-1}\,\sin z$ satisfait à cette équation par une détermination très-simple de l'arc z; car on a

$$y^n = (\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z)^n = \cos nz + \sqrt{-1}\,\sin nz;$$

et comme, en désignant par π la demi-circonférence, et par m un nombre entier quelconque, il vient

$$\sin m\pi = 0, \qquad \cos m\pi = \pm 1,$$

selon que m est un nombre pair ou impair, on n'aura qu'à supposer $nz = m\pi$, pour obtenir $y^n = \pm 1$.

Afin de distinguer plus particulièrement le cas où m est pair, de celui où il est impair, on écrit pour le premier $2m$ au lieu de m, et pour le second $2m+1$; et on fait

$$nz = 2m\pi \qquad \text{et} \qquad nz = (2m+1)\pi.$$

Dans la première hypothèse, il vient

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n} \qquad \text{et} \qquad y^n = +1;$$

dans la seconde;

$$y = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}\quad\text{, et}\quad y^n = -1.$$

Au moyen du nombre indéterminé m, chacune des expressions de y fournit toutes les valeurs dont cette quantité est susceptible; car on peut prendre successivement

$$m=0,\quad m=1,\quad m=2,\quad m=3,\quad \text{etc.}$$

La première formule donnera

$$\begin{aligned}
y &= \cos 0.\pi = 1,\\
y &= \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n},\\
y &= \cos\frac{4\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{n},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

et il est visible qu'on trouvera toujours des résultats différens, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à $m=n-1$; car, en supposant $m=n$, on a $y=\cos 2\pi=1$, et on retombe sur la première des valeurs déjà obtenues; puis, en prenant $m=n+1$, il vient

$$\begin{aligned}
\cos\frac{(2n+2)\pi}{n} &= \cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\pi}{n},\\
\sin\frac{(2n+2)\pi}{n} &= \sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right) = \sin\frac{2\pi}{n},
\end{aligned}$$

ce qui ramène à la deuxième valeur, et ainsi des autres.

La seconde expression générale de y, relative à l'équation $y^n+1=0$, ne donne de même des valeurs différentes que depuis $m=0$, jusqu'à $m=n-1$ inclusivement, puisque si on prend $m=n$, il vient

$$\begin{aligned}
\cos\frac{(2n+1)\pi}{n} &= \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{n}\right) = \cos\frac{\pi}{n},\\
\sin\frac{(2n+1)\pi}{n} &= \sin\left(2\pi+\frac{\pi}{n}\right) = \sin\frac{\pi}{n}.
\end{aligned}$$

68. Non-seulement on trouvera par ce procédé, précisément les n racines de l'équation $y^n \mp 1 = 0$, mais on reconnaîtra, avec un peu d'attention, que ces racines peuvent s'arranger par couples, en réunis-

sant celles qui ne diffèrent que par le signe du radical $\sqrt{-1}$. En effet, puisque

$$\cos(2\pi - p) = \cos p \quad \text{et} \quad \sin(2\pi - p) = -\sin p,$$

il en résulte que

$$y = \cos\frac{(n+q)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(n+q)\pi}{n} = \cos\frac{(n-q)\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{(n-q)\pi}{n};$$

or il est facile de voir que les nombres $n+q$ et $n-q$ sont tous deux pairs ou impairs en même temps : on peut donc, dans les expressions de y, rapportées ci-dessus, se borner aux multiples de π qui ne surpassent point $n\pi$, pourvu qu'on prenne le radical $\sqrt{-1}$ alternativement en $+$ et en $-$; et elles deviendront en conséquence,

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n},$$
$$y = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}.$$

Lorsque n est paire, les valeurs de m dans la première doivent être tous les nombres entiers depuis o jusqu'à $\frac{n}{2}$ inclusivement, et seulement jusqu'à $\frac{n-2}{2}$ dans la seconde; et quand n est impaire, l'une et l'autre doivent être poussées jusqu'à $\frac{n-1}{2}$.

Les deux valeurs comprises dans la formule

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n},$$

donnent pour facteurs du premier degré de la quantité $y^n - 1$, les deux expressions imaginaires

$$\left(y - \cos\frac{2m\pi}{n}\right) - \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n},$$
$$\left(y - \cos\frac{2m\pi}{n}\right) + \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n};$$

et en les multipliant, on obtient l'expression

$$y^2 - 2y\cos\frac{2m\pi}{n} + 1,$$

qui comprend tous les facteurs réels du second degré.

On trouve de même que les facteurs du second degré de la quantité y^n+1 sont

$$y^2-2y\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+1.$$

69. Voici pour servir d'exemple de la formule

$$y=\cos\frac{2m\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n},$$

le tableau des facteurs du premier degré contenus dans la fonction y^6-1:

$$\begin{aligned}&y-1,\\ &y-\left(\cos\frac{2\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{6}\right),\\ &y-\left(\cos\frac{4\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{6}\right),\\ &y+1.\end{aligned}$$

La formule

$$y^2-2y\cos\frac{2m\pi}{n}+1$$

donne les facteurs du second degré

$$\begin{aligned}&y^2-2y+1,\\ &y^2-2y\cos\frac{2\pi}{6}+1,\\ &y^2-2y\cos\frac{4\pi}{6}+1,\\ &y^2+2y+1.\end{aligned}$$

Le premier et le dernier des facteurs du second degré sont les quarrés des facteurs du premier degré $y-1$ et $y+1$, qui n'entrent qu'une fois dans la proposée; il faudra donc, lorsqu'on emploiera les facteurs du second degré, remplacer le premier et le dernier par

$$(y-1)(y+1),\quad\text{ou}\quad y^2-1.$$

On a pour la fonction y^5-1 les facteurs du premier degré

$$\begin{aligned}&y-1\\ &y-\left(\cos\frac{2\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}\right),\\ &y-\left(\cos\frac{4\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

Ceux du second degré sont

$$y^2 - 2y + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{2\pi}{5} + 1;$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{4\pi}{5} + 1;$$

mais il faut encore observer que le premier facteur du second degré est le quarré du facteur $y-1$, qui n'entre qu'une fois dans la fonction proposée.

Par la formule

$$y = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

les facteurs du premier degré de y^5+1 sont

$$y - \left(\cos\frac{\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}\right),$$
$$y - \left(\cos\frac{3\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{5}\right),$$
$$y + 1;$$

et la formule $y^2 - 2y\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + 1$ conduit à

$$y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{5} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{3\pi}{5} + 1,$$
$$y^2 + 2y + 1.$$

La fonction y^6+1 a pour facteurs du premier degré

$$y - \left(\cos\frac{\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{6}\right),$$
$$y - \left(\cos\frac{3\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{6}\right), \text{ ou } y \mp \sqrt{-1},$$
$$y - \left(\cos\frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

et pour facteurs du second,

$$y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{6} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{3\pi}{6} + 1, \quad \text{ou } y^2 + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{5\pi}{6} + 1.$$

70. On retrouve dans les expressions ci-dessus des valeurs de y, la propriété dont jouissent les racines imaginaires de l'unité, de se reproduire toutes par l'élévation d'une seule à ses diverses puissances. (*Compl. des Élém. d'Alg.*) En effet on a, par le n° 48,

$$\left(\cos\frac{2m\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n}\right)^p=\cos\frac{2pm\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2pm\pi}{n},$$

et l'expression $\cos\frac{2pm\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2pm\pi}{n}$, rentrera successivement dans chacune des valeurs particulières de $\cos\frac{2m\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n}$, puisque l'arc $\frac{2pm\pi}{n}$ ne pourra jamais être que la somme d'un certain nombre de circonférences et de quelqu'un des arcs 0, $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{4\pi}{m}$, etc. La même propriété se prouverait d'une manière semblable, à l'égard de l'expression $\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}$.

71. Puisque, d'après ce qui précède, la détermination des racines imaginaires de l'équation $y^n \mp 1 = 0$ dépend de la division de la circonférence du cercle dans un nombre n de parties égales, ou de l'inscription d'un polygone régulier d'un nombre n de côtés, il s'ensuit que l'on pourra obtenir rigoureusement ces racines, toutes les fois que l'exposant n sera compris dans l'une des trois progressions

$$\div 2:4:8:16:\text{etc.},\quad \div 3:6:12:24:\text{etc.},\quad \div 5:10:20:40:\text{etc.};$$

car alors on saura construire avec la règle et le compas, ou calculer, avec des radicaux quarrés seulement, les sinus et les cosinus des arcs $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, etc., $\frac{\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$. etc. Réciproquement, dans tous les cas où l'on saura trouver, par des équations du second degré, les racines imaginaires de l'équation $y^n \mp 1 = 0$, on en déduira la construction géométrique de la division de la circonférence du cercle en n parties égales; et le beau théorème découvert par M. Gauss, sur les équations à deux termes, montre que lorsque l'exposant n est un des nombres premiers compris dans la formule 2^p+1, ces équations se ramènent à une combinaison d'équations du second degré, ce qui fournit d'abord le cas où $n=17$, qui n'avait point été reconnu par la géométrie élémentaire, quoiqu'il soit possible de le démontrer *à posteriori* par les cosinus. (Voyez le n° 61 du *Bulletin des Sciences*, par la Société Philomatique, et le 11[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*)

Mais sans sortir des considérations précédentes, on peut montrer que la connaissance des racines des équations

$$y^n - 1 = 0, \quad y^{n'} - 1 = 0$$

mène à celle des racines de l'équation

$$y^{nn'} - 1 = 0,$$

lorsque les nombres n et n' sont premiers entre eux.

Pour cela, il faut observer que

$$\left(\cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2m'\pi}{n'} + \sqrt{-1}\sin\frac{2m'\pi}{n'}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2m\pi}{n} + \frac{2m'\pi}{n'}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{2m\pi}{n} + \frac{2m'\pi}{n'}\right), \quad (48)$$

et comparer ce résultat avec l'expression

$$\cos\frac{2m''\pi}{nn'} + \sqrt{-1}\sin\frac{2m''\pi}{nn'},$$

qui donne les racines de l'équation $y^{nn'} - 1 = 0$. En faisant

$$\frac{2m\pi}{n} + \frac{2m'\pi}{n'} = \frac{2m''\pi}{nn'},$$

on en déduit

$$n'm + nm' = m'';$$

et donnant à m'' les valeurs 0, 1, 2, 3, etc.; on parviendra nécessairement, d'après la théorie des équations indéterminées du premier degré (*Compl. des Élém. d'Alg.*), à trouver pour m et m' les valeurs entières correspondantes : on pourra par conséquent conclure $\cos\frac{2m''\pi}{nn'}$, $\sin\frac{2m''\pi}{nn'}$, de $\cos\frac{2m\pi}{n}$, $\sin\frac{2m\pi}{n}$, $\cos\frac{2m'\pi}{n'}$, $\sin\frac{2m'\pi}{n'}$.

A l'égard de l'équation $y^{nn'} + 1 = 0$, les calculs ci-dessus deviennent

$$\left(\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{(2m'+1)\pi}{n'} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2m'+1)\pi}{n'}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{n} + \frac{(2m'+1)\pi}{n'}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{n} + \frac{(2m'+1)\pi}{n'}\right)$$
$$= \cos\frac{(2m''+1)\pi}{nn'} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2m''+1)\pi}{nn'},$$

et on a pour déterminer m et m', l'équation

$$n'(2m+1)+n(2m'+1)=2m''+1.$$

72. Les fonctions de la forme $x^{2n}-2px^n+q$ peuvent être traitées comme celles qui ne renferment que deux termes. En les résolvant à la manière des équations du second degré, on en tirera les valeurs

$$p\pm\sqrt{p^2-q},$$

qui seront réelles, tant que p^2 surpassera q; et en faisant alors

$$p+\sqrt{p^2-q}=\pm a^n,$$
$$p-\sqrt{p^2-q}=\pm a'^n,$$

suivant le signe de ces quantités, il viendra des fonctions de la forme

$$x^n\mp a^n, \qquad x\mp a'^n,$$

à décomposer en facteurs.

Lorsqu'on aura $p^2<q$, on fera $p=\alpha^n$, $q=\beta^{2n}$, $x=\beta y$, et il viendra

$$\beta^{2n}y^{2n}-2\alpha^n\beta^n y^n+\beta^{2n}=\beta^{2n}\left(y^{2n}-\frac{2\alpha^n}{\beta^n}y^n+1\right);$$

mais la condition $p^2<q$, ou $\alpha^{2n}<\beta^{2n}$ donnant $\alpha^n<\beta^n$, la quantité $\frac{\alpha^n}{\beta^n}$ sera une fraction et pourra être représentée par le cosinus d'un arc donné δ: la fonction proposée reviendra donc à

$$\beta^{2n}(y^{2n}-2y^n\cos\delta+1),$$

et il ne s'agira plus que de résoudre l'équation

$$y^{2n}-2y^n\cos\delta+1=0.$$

On en tire d'abord

$$y^n=\cos\delta\pm\sqrt{-1}\sin\delta;$$

puis, prenant

$$y=\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z,$$

il vient (48)

$$y^n=\cos nz\pm\sqrt{-1}\sin nz;$$

et en comparant avec l'autre valeur de y^n, on obtient

$$\cos nz=\cos\delta, \qquad \sin nz=\sin\delta.$$

On satisfait en général à ces relations, en supposant $nz = 2m\pi + \delta$, m étant un nombre entier quelconque, puisque

$$\cos(2m\pi + \delta) = \cos\delta, \qquad \sin(2m\pi + \delta) = \sin\delta;$$

on aura donc

$$z = \frac{2m\pi+\delta}{n}, \quad y = \cos\frac{2m\pi+\delta}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi+\delta}{n}:$$

les facteurs du premier degré de la fonction

$$y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1$$

seront par conséquent compris dans la formule

$$y - \left\{\cos\frac{2m\pi+\delta}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi+\delta}{n}\right\}.$$

Si on avait $x^{2n} + 2px^n + q = 0$, on ferait encore $\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \cos\delta$; mais on prendrait

$$y^{2n} - 2y^n \cos(\pi - \delta) + 1,$$

puisque $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta$. Cela fait, il viendrait

$$\cos nz = \cos(\pi - \delta), \qquad \sin nz = \sin(\pi - \delta);$$

et par conséquent

$$nz = 2m\pi + \pi - \delta = (2m + 1)\pi - \delta.$$

73. Quoiqu'il n'y ait rien à objecter contre la marche qui nous a conduit aux formules des racines des équations

$$y^n \mp 1 = 0, \qquad y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1 = 0.$$

Cependant pour compléter ce sujet, nous allons exposer l'élégante méthode qu'a donnée M. Lagrange, pour parvenir aux mêmes formules, sans s'appuyer sur la considération des expressions imaginaires. Si l'on change x en z dans l'équation (1) de la page 79, et qu'on en multiplie tous les termes par 2, elle deviendra

$$2\cos(n+1)z = 2\cos z \,.\, 2\cos nz - 2\cos(n-1)z; \qquad (1)$$

en y supposant

$$2\cos z = y + \frac{1}{y};$$

et faisant $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., on en déduira

$$2\cos 2z = y^2 + \frac{1}{y^2},$$

$$2\cos 3z = y^3 + \frac{1}{y^3},$$

etc.

d'où l'analogie portera à conclure que

$$2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n}. \qquad (2)$$

Cette dernière équation se vérifie, comme les formules générales de la page 80, en montrant que si elle a lieu pour les nombres $n-1$ et n, elle aura pareillement lieu pour le nombre $n+1$; car en faisant

$$2\cos(n-1)z = y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}}, \quad 2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n},$$

l'équation (1) donne

$$2\cos(n+1)z = \left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y^n+\frac{1}{y^n}\right) - y^{n-1} - \frac{1}{y^{n-1}} = y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}};$$

et étant exacte pour les valeurs $n=1$, $n=2$, elle a donc lieu dans toute l'étendue de la suite des nombres entiers.

Cela posé, les équations

$$2\cos z = y + \frac{1}{y}, \quad 2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n};$$

peuvent se mettre sous la forme

$$y^2 - 2y\cos z + 1 = 0, \quad y^{2n} - 2y^n\cos nz + 1 = 0,$$

et dans cet état, elles ont d'abord une racine commune, puisque, d'après leur formation, il doit exister une valeur de y qui satisfasse à toutes deux en même temps. De plus ces équations étant réciproques (*Compl. des Élém. d'Alg.*), elles seront encore satisfaites par la valeur $y=\frac{1}{a}$; mais la première équation n'étant que du second degré et n'ad-mettant que les deux racines $y=a$, $y=\frac{1}{a}$, a donc ses deux racines communes avec la deuxième équation: elle est donc un des facteurs de cette dernière.

Maintenant si on prend

$$nz=2m\pi+\delta,$$

il viendra

$$\cos nz=\cos\delta,\ \text{et}\ z=\frac{2m\pi+\delta}{n},$$

d'où il résulte encore que les facteurs du second degré de l'équation

$$y^{2n}-2y^{n}\cos\delta+1=0,$$

sont compris dans la formule

$$y^{2}-2y\cos\frac{(2m\pi+\delta)}{n}+1=0.$$

Pour en déduire ceux des équations

$$y^{n}\mp 1=0,$$

il suffit de faire $\delta=0$ et $\delta=\pi$. Dans le premier cas, on a

$$\cos\delta=1,\qquad y^{2n}-2y^{n}+1=(y^{n}-1)^{2};$$

et par conséquent,

$$y^{n}-1=0,$$
$$y^{2}-2y\cos\frac{2m\pi}{n}+1=0.$$

Dans le second cas, on a

$$\cos\delta=-1,\qquad y^{2n}+2y^{n}+1=(y^{n}+1)^{2},$$

d'où,

$$y^{n}+1=0,$$
$$y^{2}-2y\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+1=0,$$

ce qui s'accorde avec le n° 68.

74. En remettant au lieu de y sa valeur $\frac{x}{a}$ (67) dans les équations

$$y^{n}\mp 1=0\quad\text{et}\quad y^{2n}\mp 2y^{n}\cos\delta+1=0,$$

elles deviennent

$$x^n \mp a^n = 0 \quad \text{et} \quad x^{2n} \mp 2a^n x^n \cos\delta + a^{2n} = 0\,;$$

et faisant la même substitution dans leurs facteurs du second degré on a pour ceux de la première (68).

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2m\pi}{n} + a^2,$$

ou

$$x^2 - 2ax\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + a^2,$$

et, d'après le n° 72, on trouverait que ceux de la seconde sont

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2m\pi + \delta}{n} + a^2,$$

ou

$$x^2 - 2ax\cos\frac{(2m+1)\pi - \delta}{n} + a^2.$$

Ces expressions peuvent être considérées comme homogènes, en observant que les cosinus tabulaires doivent être pris pour de simples coefficiens numériques : d'ailleurs on les rendrait telles en prenant les cosinus dans le cercle dont le rayon est a, et en divisant par ce rayon les cosinus indiqués ; mais on trouve le plus souvent ces mêmes expressions sous la forme que je leur ai donnée ici.

75. La décomposition de la fonction $x^n \mp a^n$, en facteurs du second degré, répond à une propriété du cercle, connue sous la dénomination de *théorème de Côtes*, parce qu'elle fut annoncée par ce géomètre. Voici en quoi elle consiste :

Si on divise la circonférence d'un cercle en un nombre 2n *de parties égales* MM_1, M_1M_2, M_2M_3, *etc.*, fig. 1, *et que d'un point* O *placé sur* FIG. 1.
le diamètre MCM_5, *on mène aux différens points de division des droites* OM, OM_1, OM_2, OM_3, *etc.*, *le produit de toutes celles qui passeront par des points de division marqués d'un nombre pair, sera égal à* $\overline{CM}^n - \overline{CO}^n$, *si le point* O *est situé dans l'intérieur du cercle, et à* $\overline{CO}^n - \overline{CM}^n$, *si ce point est situé au-dehors ; et le produit de toutes les droites passant par des points de division marqués d'un nombre impair, sera égal à* $\overline{CM}^n + \overline{CO}^n$.

Je ne démontrerai que le cas où le point *O* se trouve au-dedans du cercle, parce qu'il sera aisé de prouver l'autre de la même manière.

En abaissant, du point M_1, la perpendiculaire M_1P, sur le diamètre MM_5, on aura, par le triangle rectangle M_1PO,

$$\overline{OM_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM_1}^2;$$

mais $OP = CP - CO$, et dans le cercle proposé, CP est le cosinus de l'arc MM_1, PM_1 en est le sinus; on aura donc, en employant les cosinus et les sinus tabulaires, calculés pour un rayon égal à l'unité,

$$CP = CM \cos MM_1, \quad PM_1 = CM \sin MM_1;$$

et faisant $CM = a$, $CO = x$, il en résultera

$$OP = a \cos MM_1 - x, \quad PM_1 = a \sin MM_1,$$

$$\overline{OM_1}^2 = a^2 - 2ax \cos MM_1 + x^2.$$

Les valeurs de $\overline{OM_2}^2$, $\overline{OM_3}^2$, etc., se déduiront de la précédente, en substituant à l'arc MM_1 les arcs MM_2, MM_3, etc. Si l'on ne prend que ceux qui répondent aux points de division pairs, en désignant la circonférence par 2π, et en observant que $MM_1 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$, il viendra

$$MM_2 = \frac{2\pi}{n}, \quad MM_4 = \frac{4\pi}{n}, \text{ etc.};$$

d'où

$$\overline{OM_2}^2 = a^2 - 2ax \cos\frac{2\pi}{n} + x^2, \quad \overline{OM_4}^2 = a^2 - 2ax \cos\frac{4\pi}{n} + x^2, \text{ etc.};$$

mais les lignes OM_2, OM_4, etc., placées d'un côté du diamètre, ont leurs correspondantes OM_8, OM_6, etc., qui leur sont respectivement égales, ensorte que l'on pourra écrire

$$\overline{OM_2} \times \overline{OM_8} \text{ au lieu de } \overline{OM_2}^2, \quad \overline{OM_4} \times \overline{OM_6} \text{ au lieu de } \overline{OM_4}^2,$$

et ainsi de suite, quand les divisions seront en plus grand nombre : on remarquera en même temps que la ligne OM représente la quantité $a - x$. Cela posé, il résulte du n° 74, que n étant impaire,

$$a^n - x^n = (a-x)\left(a^2 - 2ax \cos\frac{2\pi}{n} + x^2\right)\left(a^2 - 2ax \cos\frac{4\pi}{n} + x^2\right) \text{ etc.};$$

mettant au lieu des facteurs du second membre leurs expressions en lignes, on aura

$$a^n - x^n = \overline{CM}^n - \overline{CO}^n = \overline{OM} \times \overline{OM}_2 \times \overline{OM}_4 \times \overline{OM}_6 \times \overline{OM}_8.$$

Les arcs MM_1, MM_3, MM_5, etc., qui correspondent aux points de division impairs, étant égaux à

$$\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}, \quad \frac{6\pi}{2n} = \frac{3\pi}{n}, \quad \frac{10\pi}{2n} = \frac{5\pi}{n}, \text{ etc.},$$

on trouvera

$$\overline{OM}_1^2 = a^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{n} + x^2, \qquad \overline{OM}_3^2 = a^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{n} + x^2, \text{ etc.},$$

et $OM_5 = a + x$; mais comme on a

$$a^n + x^n = (a+x)\left(a^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{n} + x^2\right)\left(a^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{n} + x^2\right) \text{ etc.},$$

il viendra

$$a^n + x^n = \overline{CM}^n + \overline{CO}^n = \overline{OM}_1 \times \overline{OM}_3 \times \overline{OM}_5 \times \overline{OM}_7 \times \overline{OM}_9.$$

Lorsque n est un nombre pair, comme dans la *fig.* 2, les deux parties OM et OM_6 du diamètre répondent l'une et l'autre à des points de division marqués d'un chiffre pair, et donnent les deux facteurs réels du premier degré, $a - x$ et $a + x$, que la fonction $a^n - x^n$ a dans ce cas, tandis que toutes les lignes de numéro impair ne répondent qu'à des facteurs du second degré, les seuls réels pour la fonction $a^n + x^n$. FIG. 2.

76. Côtes, qui mourut fort jeune, laissa sans démonstration, parmi ses papiers, le théorème précédent. Moivre et Bernoulli y suppléèrent; mais le premier donna à l'énoncé une extension au moyen de laquelle il comprend la décomposition de l'expression $a^{2n} - 2a^nx^n\cos\delta + x^{2n}$ en facteurs réels du second degré. Voici cette extension :

Au lieu de placer le point M, origine de la division du cercle, à l'extrémité du rayon MC, *fig.* 1, on prend d'abord un arc AM, *fig.* 3, FIG. 3. qui soit la $n^{ième}$ partie de l'arc δ, représenté par AB; ensuite on partage la circonférence du cercle en un nombre n de parties égales, à commencer du point M, et on a alors

$$\begin{aligned} a^{2n} - 2a^nx^n\cos\delta + x^{2n} &= \overline{AC}^{2n} - 2\overline{AC}^n \times \overline{OC}^n\cos\delta + \overline{OC}^{2n} \\ &= \overline{OM}^2 \times \overline{OM}_1^2 \times \overline{OM}_2^2 \times \overline{OM}_3^2 \times \overline{OM}_4^2 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Pour s'assurer de la vérité de cette équation, il faut observer que

$$AM = \frac{\delta}{n}, \quad AM_1 = \frac{2\pi + \delta}{n}, \quad AM_2 = \frac{4\pi + \delta}{n}, \text{ etc.},$$

et chercher, comme dans le n° précédent, les valeurs de $\overline{OM}^2$, $\overline{OM}_1^2$, etc.; on trouvera par ce moyen les mêmes facteurs que ceux que les formules du n° 74 donneraient pour l'expression

$$a^{2n} - 2a^n x^n \cos\delta + x^{2n}.$$

77. Il y a encore dans chaque degré de grandes classes d'équations qui se résolvent avec beaucoup de facilité, par les *Tables trigonométriques;* elles font partie de celles qui admettent une racine de la forme

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B},$$

et dont la composition est indiquée dans le *Complément des Élémens d'Algèbre.* Leur expression générale est

$$x^n - \frac{n}{1} x^{n-2} \sqrt[n]{b} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} \sqrt[n]{b^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-6} \sqrt[n]{b^3}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-8} \sqrt[n]{b^4} - \text{etc.} = a,$$

en faisant

$$A + B = a, \quad AB = b.$$

Elle rentre dans l'expression de $\cos nx$ rapportée à la page 80; car si l'on y change x en $2r\cos z$, et qu'on divise ensuite les deux membres par r^n, on obtiendra l'équation

$$(2\cos z)^n - \frac{n}{1}(2\cos z)^{n-2}\frac{\sqrt[n]{b}}{r^2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}(2\cos z)^{n-4}\frac{\sqrt[n]{b^2}}{r^4} - \text{etc.} = \frac{a}{r^n};$$

puis, écrivant z au lieu de x, dans le développement cité de $\cos nx$, et le multipliant par 2, on en tirera l'équation

$$(2\cos z)^n - \frac{n}{1}(2\cos z)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}(2\cos z)^{n-4} + \text{etc.} = 2\cos nz,$$

qui sera la même que la précédente, si

$$\frac{\sqrt[n]{b}}{r^2} = 1, \quad 2\cos nz = \frac{a}{r^n}.$$

d'où il résulte

$$r=\sqrt[2n]{b}, \quad \cos nz=\frac{a}{2\sqrt{b}};$$

mais $\cos nz$ ne pouvant jamais surpasser l'unité, il faudra que a ne soit pas $>$ que $2\sqrt{b}$, ou $a^2>4b$.

Lorsque cette condition sera remplie, si on représente par δ l'arc dont le cosinus est $\frac{a}{2\sqrt{b}}$, on aura

$$z=\frac{2m\pi+\delta}{n}, \quad \text{et} \quad x=2\sqrt[2n]{b}.\cos\left(\frac{2m\pi+\delta}{n}\right).$$

Le même résultat se déduit de l'expression algébrique de la racine

$$x=\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B},$$

qui revient à

$$x=\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b}}+\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}a-\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b}},$$

quand on y met, au lieu de A et B, leur valeur en a et b.

Dans l'hypothèse $a^2<4b$, la quantité $\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}$ est imaginaire et peut se mettre sous la forme $\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}.\sqrt{-1}$: supposant alors que

$$\tfrac{1}{2}a=r^n\cos\delta \quad \text{et} \quad \sqrt{b-\tfrac{1}{4}a^2}=r^n\sin\delta,$$

on obtient

$$x=r\left\{(\cos\delta+\sqrt{-1}\sin\delta)^{\frac{1}{n}}+(\cos\delta-\sqrt{-1}\sin\delta)^{\frac{1}{n}}\right\},$$

ce qui revient à $x=2r\cos\frac{\delta}{n}$ (47).

Pour déterminer r^n, il suffit de quarrer les valeurs de $r^n\cos\delta$, $r^n\sin\delta$; on trouve par ce moyen $r^{2n}=b$, d'où, comme ci-dessus, $r=\sqrt[2n]{b}$.

78. Il est à remarquer que c'est précisément lorsque la valeur de x, quoique réelle, se présente sous une forme composée d'expressions imaginaires, que les *Tables trigonométriques* la donnent avec facilité; aussi y a-t-on recours pour l'équation du troisième degré $x^3-px=q$, lorsqu'elle tombe dans le cas irréductible. En y faisant $x=2r\cos z$,

elle devient

$$8r^3\cos z^3 - 2pr\cos z = q, \quad \text{puis} \quad 4\cos z^3 - \frac{p}{r^2}\cos z = \frac{q}{2r^3};$$

et comparant avec la formule

$$4\cos z^3 - 3\cos z = \cos 3z,$$

tirée du premier tableau de la page 80, on a

$$\frac{p}{r^2} = 3, \qquad \frac{q}{2r^3} = \cos 3z,$$

d'où il suit,

$$r = \sqrt{\frac{p}{3}}, \qquad \cos 3z = \frac{q}{\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}};$$

et la condition pour que la valeur de $\cos 3z$ soit moindre que l'unité est $q < \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$, ou, en élevant les deux membres au quarré,

$$q^2 < \frac{4p^3}{27}, \text{ ou enfin } \frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3,$$

la même que celle qui constitue le cas irréductible.

Dans ce cas, en désignant par δ, l'arc dont le cosinus est $\frac{q}{\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}}$, les valeurs de x sont

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}.\cos\frac{\delta}{3}, \quad 2\sqrt{\frac{p}{3}}.\cos\left(\frac{2\pi+\delta}{3}\right), \quad 2\sqrt{\frac{p}{3}}.\cos\left(\frac{4\pi+\delta}{3}\right).$$

On se sert aussi des formules trigonométriques pour abréger le calcul des racines dans les autres cas de l'équation du troisième degré, et dans tous ceux des équations du second et du quatrième; mais ces applications sont moins spéciales que la précédente, qui donne en même temps toutes les racines, et leur exposition passerait les bornes que j'ai dû me prescrire. Ces bornes ne me permettent pas non plus de m'étendre sur les autres formes d'équations que l'on tirerait des expressions du sinus, de la tangente, etc. des arcs multiples, non plus que sur les propriétés du cercle qui répondent à ces équations. Dans l'état actuel de la science, ces propriétés ne sont, ainsi que les théorèmes de Côtes et de Moivre, que des objets de pure curiosité, dont il suffit d'indiquer l'existence et de marquer la place.

79. On prouve aisément que les fonctions algébriques des quantités de la forme $a+b\sqrt{-1}$ sont aussi de la même forme (*Compl. des Élém. d'Alg.*); mais les résultats de ces calculs s'expriment avec élégance par les sinus et les cosinus, et on en tire des formules qui sont d'une grande utilité dans l'analyse. Si on compare l'expression $a+b\sqrt{-1}$ avec $r(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)$, on trouvera $a=r\cos z$, $b=r\sin z$; en ajoutant les quarrés de ces équations, il viendra $a^2+b^2=r^2$. La valeur de r étant connue, on aura De la forme des fonctions imaginaires.

$$\cos z=\frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin z=\frac{b}{r};$$

faisant de même

$$a'+b'\sqrt{-1}=r'(\cos z'+\sqrt{-1}\sin z'),$$

il en résultera (48)

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) &= rr'(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)(\cos z'+\sqrt{-1}\sin z')\\ &= rr'[\cos(z+z')+\sqrt{-1}\sin(z+z')].\end{aligned}$$

La fraction $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}$ devient $\frac{r(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)}{r'(\cos z'+\sqrt{-1}\sin z')}$; multipliant ses deux termes par $(\cos z'-\sqrt{-1}\sin z')$, on obtiendra (48),

$$\frac{r}{r'}[\cos(z-z')+\sqrt{-1}\sin(z-z')].$$

La fonction $(a+b\sqrt{-1})^n$ devient sur-le-champ

$$r^n(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n=r^n(\cos nz+\sqrt{-1}\sin nz),$$

et en changeant n en $\frac{1}{n}$, il vient

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{z}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{z}{n}\right).$$

80. Par la transformation précédente on introduit les lignes trigonométriques dans la recherche des racines imaginaires d'une équation algébrique quelconque. Au lieu de substituer à l'inconnue de l'équation proposée la formule $a\pm b\sqrt{-1}$ (*Complém. des Élém. d'Algèbre*), on y met $r(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z)$, et on remplace en conséquence une puissance quelconque de l'inconnue par $r^m(\cos mz\pm\sqrt{-1}\sin mz)$; ensorte que

si cette équation est représentée par

$$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} \ldots\ldots + \zeta x + \eta = 0,$$

elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l} r^n \cos nz + \alpha r^{n-1} \cos(n-1)z + \beta r^{n-2} \cos(n-2)z \ldots + \zeta r \cos z + \eta \\ \pm (r^n \sin nz + \alpha r^{n-1} \sin(n-1)z + \beta r^{n-2} \sin(n-2)z \ldots + \zeta r \sin z)\sqrt{-1} \end{array}\right\} = 0,$$

et ne pourra se vérifier qu'en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire. On obtient ainsi les deux équations

$$r^n \cos nz + \alpha r^{n-1} \cos(n-1)z + \beta r^{n-2} \cos(n-2)z \ldots + \zeta r \cos z + \eta = 0, \quad (1)$$
$$r^n \sin nz + \alpha r^{n-1} \sin(n-1)z + \beta r^{n-2} \sin(n-2)z \ldots + \zeta r \sin z = 0, \quad (2)$$

au moyen desquelles il faut déterminer les quantités r et z.

Il est à remarquer qu'elles se déduisent immédiatement de l'équation proposée, en substituant à une puissance quelconque x^m, d'abord $r^m \cos mz$, et ensuite $r^m \sin mz$, et en observant pour le dernier terme, que $r^0 \cos 0 = 1$, $r^0 \sin 0 = 0$. On les ramène à ne contenir toutes deux que des cosinus : pour cela, on multiplie d'abord la première par $\cos z$, la seconde par $\sin z$; on ajoute et on retranche les produits, en observant que

$$\cos mz \cos z \pm \sin mz \sin z = \cos(m \mp 1)z:$$

on trouve

$$r^n \cos(n-1)z + \alpha r^{n-1} \cos(n-2)z + \beta r^{n-2} \cos(n-3)z \ldots + r\zeta \qquad + \eta \cos z = 0,$$
$$r^n \cos(n+1)z + \alpha r^{n-1} \cos nz \qquad + \beta r^{n-2} \cos(n-1)z \ldots + r\zeta \cos 2z + \eta \cos z = 0,$$

et on peut alors, par les formules du n° 50, changer les cosinus des multiples de l'arc z, en puissance du cosinus de l'arc simple; par ce moyen les inconnues à trouver seront r et $\cos z$.

En prenant pour facteurs respectifs des mêmes équations (1) et (2), les quantités $\sin z$ et $\cos z$, et en opérant du reste comme ci-dessus, on transformerait ces équations en d'autres qui ne contiendraient que des sinus des arcs multiples de z; mais elles ne seraient pas plus faciles à traiter sous cette forme que sous la première, puisqu'elles conserveraient le même degré, et en effet on ne sait guère les résoudre pour d'autres cas que ceux dont nous nous sommes occupés dans les n°s 67 et 72; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

81. Nous allons examiner maintenant la forme que prennent les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, lorsqu'elles renferment des quantités imaginaires.

Soit d'abord $\mathrm{l}(a \pm b\sqrt{-1})$: en faisant $\sqrt{a^2+b^2}=r$, $\frac{a}{r}=\cos z$, $\frac{b}{r}=\sin z$, il viendra $a \pm b\sqrt{-1}=r(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)$, et par conséquent

$$\mathrm{l}(a \pm b\sqrt{-1}) = \mathrm{l}r + \mathrm{l}(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z);$$

mais

$$\mathrm{l}(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \pm z\sqrt{-1} \quad (43):$$

donc

$$\mathrm{l}(a \pm b\sqrt{-1}) = \mathrm{l}r \pm z\sqrt{-1}.$$

Les données étant seulement r, $\cos z$ et $\sin z$, on pourra prendre au lieu de l'arc z, les arcs $2\pi+z$, $4\pi+z \ldots 2i\pi \pm z$, i étant un nombre entier; ensorte qu'on aura pour $\mathrm{l}(a \pm b\sqrt{-1})$ une infinité de valeurs, comprises dans la formule $\mathrm{l}r \pm (2i\pi+z)\sqrt{-1}$.

Si on fait $b=0$, on aura $r=a$, $\sin z=0$, $z=0$ et $\mathrm{l}a=\mathrm{l}a \pm 2i\pi\sqrt{-1}$. Ce résultat, qui paraîtra d'abord paradoxal, indique qu'une quantité réelle a, pour le même module, une infinité de logarithmes, dont un seul est réel, savoir celui qu'on obtient en faisant $i=0$, et que nous distinguerons par la caractéristique L; nous écrirons donc

$$\mathrm{l}a = \mathrm{L}a \pm 2i\pi\sqrt{-1}.$$

L'équation $\pm x\sqrt{-1}=\mathrm{l}(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)$ conduit immédiatement à la même conclusion; car en y faisant successivement $x=0$, $x=2\pi$,... $x=2i\pi$, elle donne $0=\mathrm{L}1$, $\pm 2\pi\sqrt{-1}=\mathrm{l}1$,... $\pm 2i\pi\sqrt{-1}=\mathrm{l}1$, d'où on voit que l'unité a un nombre infini de logarithmes imaginaires; mais puisque $a=1\times a$, on doit avoir aussi $\mathrm{l}a=\mathrm{l}1+\mathrm{l}a$: substituant à $\mathrm{l}a$ le logarithme réel $\mathrm{L}a$, et mettant au lieu de $\mathrm{l}1$, sa valeur générale $\pm 2i\pi\sqrt{-1}$, on trouvera, de même que tout-à-l'heure,

$$\mathrm{l}a = \mathrm{L}a \pm 2i\pi\sqrt{-1}.$$

Pour bien entendre ceci, il faut se rappeler que la nature des logarithmes dépend uniquement de l'équation $\mathrm{l}(ab)=\mathrm{l}a+\mathrm{l}b$. Si on met dans cette équation pour $\mathrm{l}a$ et $\mathrm{l}b$ leurs valeurs générales $\mathrm{L}a \pm 2i\pi\sqrt{-1}$ et $\mathrm{L}b \pm 2i'\pi\sqrt{-1}$, son second membre devenant $\mathrm{L}a+\mathrm{L}b \pm 2(i+i')\pi\sqrt{-1}$, sera nécessairement un des logarithmes de ab compris dans la formule

$$l(ab) = L(ab) \pm 2i''\pi\sqrt{-1} = La + Lb \pm 2i''\pi\sqrt{-1}.$$

Quels que soient donc les logarithmes de a et de b qu'on ajoute entre eux, leur somme sera toujours égale à l'un des logarithmes du produit ab.

En faisant $x = 180° = \pi$, on a $\cos x = -1$, et mettant $(2i+1)\pi$ à la place de $2i\pi$, on trouvera $l(-1) = \pm(2i+1)\pi\sqrt{-1}$; ce qui nous fait voir que tous les logarithmes de -1 sont imaginaires : il en sera de même de ceux de $-a$; car $-a = a \times -1$ et $l(-a) = La + l(-1)$; donc $l(-a) = La \pm (2i+1)\pi\sqrt{-1}$.

82. C'est à l'aide des considérations précédentes qu'Euler a résolu la difficulté sur les logarithmes des nombres négatifs, qui avait été l'objet d'une très-longue discussion entre Leibnitz et Jean Bernoulli. Le premier soutenait que ces logarithmes étaient imaginaires; le second, qu'ils étaient réels, et les mêmes que ceux des nombres positifs. Nous ne pouvons entrer dans le détail des raisons qui furent données de part et d'autre; mais une des preuves les plus fortes qu'on apportait en faveur de la réalité des logarithmes des nombres négatifs, consistait à dire que puisque $(-a)^2 = a^2$, on devait avoir $l(-a)^2 = la^2$, $2l-a = 2la$, et enfin $l-a = l+a$. La théorie d'Euler confirme la première conséquence, et prouve que les deux autres sont fausses.

En effet, on a $l(-a)^2 = 2l-a = 2La \pm 2(2i+1)\pi\sqrt{-1}$; et à cause que le nombre $2(2i+1)$ est pair, cette expression se trouve comprise dans la formule $2La \pm 2i''\pi\sqrt{-1}$, qui représente tous les logarithmes de a^2: on a donc, dans un certain sens, $l(-a)^2 = la^2$.

Si on compare les expressions $2l-a = 2La \pm 2(2i+1)\pi\sqrt{-1}$ et $2la = 2La \pm 4i\pi\sqrt{-1}$, on verra qu'elles ne peuvent jamais rentrer l'une dans l'autre, puisque tous les nombres de la forme $4i+2$, sont essentiellement différens de la forme $4i$; mais l'expression générale des logarithmes de a^2 doit comprendre tous les logarithmes qu'on trouverait, en ajoutant indistinctement ceux des facteurs de cette quantité (n° précéd.) : elle renferme donc, outre les doubles de chacun des logarithmes de $+a$ et de $-a$, les sommes qu'on obtiendrait en ajoutant ensemble deux des premiers ou deux des seconds, qui seraient inégaux.

Ainsi $l(-a)^2 = 2La \pm 2(i+i'+1)\pi\sqrt{-1}$ et $la^2 = 2La \pm 2(i+i')\pi\sqrt{-1}$.

C'est dans ces dernières expressions que se trouvent les logarithmes qui satisfont à l'équation $\mathrm{l}(-a)^2 = \mathrm{l}\,a^2$, parce que $2(i+i')$ peut toujours désigner un nombre pair quelconque.

Bernoulli tirait encore de la quadrature de l'hyperbole une autre objection d'un grand poids, qu'Euler laissa subsister; mais on y a répondu depuis, ainsi que nous le ferons voir en parlant de la quadrature des courbes; et quoique d'Alembert, qui avait embrassé l'opinion de Bernoulli, n'ait point voulu admettre l'explication d'Euler, elle a reçu aujourd'hui l'assentiment des Analystes les plus distingués. Malgré cela, il faut convenir que la question des logarithmes des nombres négatifs, n'est peut-être pas encore exempte de nuages, surtout dans ce qui se rapporte à la considération des courbes, à cause de la difficulté de vérifier la loi de continuité, lorsqu'il y a un passage par l'infini; mais il serait néanmoins très-inutile de s'appesantir ici sur ce sujet, parce que le peu d'obscurité qu'il conserve n'entraine aucune conséquence fâcheuse à l'égard des théories utiles des Mathématiques et des principes de cette science vraiment féconds. Les usages généraux des logarithmes, et leur emploi dans le calcul numérique, les supposent essentiellement réels; dans le petit nombre de cas où l'on en considère d'imaginaires, ce n'est que pour former des expressions analogiques bien vérifiées d'ailleurs: ainsi je renvoie aux écrits cités à ce sujet dans la Table.

83. Nous avons cherché précédemment l'expression du logarithme de la quantité imaginaire $a+b\sqrt{-1} = r(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$, et nous avons obtenu pour résultat $\mathrm{l}r + (2i\pi + z)\sqrt{-1}$: en renversant la question, on voit que si le logarithme est représenté par $m+n\sqrt{-1}$, on aura $m = \mathrm{l}r$, $n = 2i\pi + z$; et en désignant par e le nombre dont le logarithme népérien est l'unité, on trouvera

$$r = e^m,\quad z = n,\quad \text{d'où}\quad \sin z = \sin n,\quad \cos z = \cos n;$$

et enfin $e^m(\cos n + \sqrt{-1}\sin n)$ sera l'expression de la quantité cherchée: cette quantité sera réelle si n est ou nulle, ou un multiple quelconque de la demi-circonférence.

84. L'expression $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ peut se mettre sous la forme $e^{(m+n\sqrt{-1})\,\mathrm{l}(a+b\sqrt{-1})}$, puisqu'en général $p^q = e^{q\,\mathrm{l}p}$, comme on peut s'en assurer en prenant les logarithmes. Si on substitue au lieu de $\mathrm{l}(a+b\sqrt{-1})$

sa valeur $1r+z\sqrt{-1}$, il en résultera

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=e^{m1r-nz+(mz+n1r)\sqrt{-1}}=e^{m1r-nz}e^{(mz+n1r)\sqrt{-1}}$$
$$=e^{m1r-nz}[\cos(mz+n1r)+\sqrt{-1}\sin(mz+n1r)];$$

et à cause que $e^{m1r}=r^m$, on aura enfin

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=r^me^{-nz}[\cos(mz+n1r)+\sqrt{-1}\sin(mz+n1r)],$$

résultat qui est de la forme $A+B\sqrt{-1}$. On se rappellera que pour donner à ce résultat toute la généralité qu'il comporte, il faut mettre $2i\pi+z$ à la place de z.

85. Supposons qu'on ait $b=0$, il viendra $r=a$, $z=0$, $\cos z=1$ et

$$a^{m+n\sqrt{-1}}=a^me^{-2in\pi}[\cos(2im\pi+n1a)+\sqrt{-1}\sin(2im\pi+n1a)].$$

Si a était une quantité négative, comme r doit toujours être positive, on prendrait $z=\pi$, d'où $\cos z=-1$, et on écrirait $(2i+1)\pi$ au lieu de $2i\pi$, ce qui donnerait

$$(-a)^{m+n\sqrt{-1}}=r^me^{-(2i+1)n\pi}\left[\cos\left((2i+1)m\pi+n1a\right)+\sqrt{-1}\sin\left((2i+1)m\pi+n1a\right)\right].$$

Lorsque a et m seront nuls, on aura

$$r=b,\quad \cos z=0,\quad z=90°=\frac{\pi}{2},\quad 2i\pi+z=\frac{(4i+1)\pi}{2}$$

et

$$(b\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}=e^{-\frac{(4i+1)}{2}n\pi}(\cos n1b+\sqrt{-1}\sin n1b);$$

si b était négatif, on prendrait $z=\frac{3\pi}{2}$ et $2i\pi+z=\frac{(4i+3)}{2}\pi$.

Cette expression deviendrait réelle, dans le cas où on supposerait $b=1$; et si l'on faisait $n=1$ et $i=0$, elle donnerait

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}=e^{-\frac{\pi}{2}}=0{,}207\ 879,$$

résultat qui, par sa singularité, mérite d'être confirmé. Pour cela, j'observe qu'en substituant $\sqrt{-1}$ à la place de u, dans la série

$$u=u-u^{-1}-\frac{1}{2}(u^2-u^{-2})+\frac{1}{3}(u^3-u^{-3})-\text{etc.},\quad (33)$$

il vient

$$1\sqrt{-1}=\sqrt{-1}-\frac{1}{\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}(-1+1)+\frac{1}{3}\left(-\sqrt{-1}+\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)-\text{etc.}$$
$$=\frac{-2}{\sqrt{-1}}\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}\right\}.$$

La série comprise entre les accolades exprime la valeur de l'arc de 45° dans un cercle dont le rayon $=1$ (43 et 53); ainsi

$$1\sqrt{-1}=\frac{-2}{\sqrt{-1}}\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{2\sqrt{-1}}=\frac{\pi\sqrt{-1}}{2};$$

mais puisque $u^u=e^{u\,1u}$, on aura

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}=e^{-\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{1.2.4}-\frac{\pi^3}{1.2.3.8}+\text{etc.}$$

On remarquera que l'équation $1\sqrt{-1}=\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}$, à laquelle nous venons de parvenir, donne $\pi=\frac{2\,1\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ et $2\pi=\frac{4\,1\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$. Cette expression de la circonférence du cercle, qui se déduit aussi de l'équation $x\sqrt{-1}=1(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)$, en y faisant $x=\frac{\pi}{2}$, et qui a été trouvée par Jean Bernoulli, n'est qu'un symbole abrégé représentant une suite infinie (42).

86. Soit la fonction circulaire $\sin(a\pm b\sqrt{-1})$; on aura

$$\sin(a\pm b\sqrt{-1})=\sin a\cos(b\sqrt{-1})\pm\cos a\sin(b\sqrt{-1}).$$

Pour obtenir $\sin(b\sqrt{-1})$ et $\cos(b\sqrt{-1})$, on mettra $b\sqrt{-1}$ au lieu de x, dans les formules du n° 41; et il en résultera

$$\sin(b\sqrt{-1})=\frac{e^{-b}-e^{b}}{2\sqrt{-1}}=\left(\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\right)\sqrt{-1},\quad\cos(b\sqrt{-1})=\frac{e^{-b}+e^{b}}{2}.$$

Substituant ces valeurs, on aura

$$\sin(a\pm b\sqrt{-1})=\left(\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\right)\sin a\pm\sqrt{-1}\left(\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\right)\cos a.$$

On trouverait aussi

$$\cos(a\pm b\sqrt{-1})=\left(\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\right)\cos a\mp\sqrt{-1}\left(\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\right)\sin a;$$

et l'on parviendrait de même aux expressions des autres fonctions circulaires, telles que la tangente, la sécante, etc.

Lorsque $a = 2i\pi \pm \frac{\pi}{2} = \frac{(4i \pm 1)\pi}{2}$, il en résulte $\sin a = \pm 1$, $\cos a = 0$ et $\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \pm \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})$; la supposition de $a = i\pi$ donne aussi $\cos(a \pm b\sqrt{-1}) = \pm \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})$, parce que dans ce cas $\sin a = 0$ et $\cos a = \pm 1$, selon que i est pair ou impair: il y a donc des arcs imaginaires dont le sinus, ou le cosinus, a une valeur réelle. Il faut observer cependant que cette valeur est en contradiction avec la nature du cercle; car tant que b n'est pas nul, auquel cas l'arc serait réel, la quantité $\frac{1}{2}(e^b + e^{-b}) = \frac{1}{2}\frac{e^{2b}+1}{e^b}$ surpasse toujours l'unité ou le rayon, ce qui ne saurait arriver à aucun sinus, ni à aucun cosinus pris dans le cercle (*).

On tirerait encore d'autres conséquences remarquables des résultats que nous avons obtenus dans cet article; et en renversant la question qui nous y a conduits, on parviendrait à l'expression des arcs imaginaires, qui répondent à des sinus ou à des cosinus imaginaires, ou bien à des sinus ou à des cosinus réels plus grands que le rayon: mais nous renverrons pour ces détails, au Mémoire d'Euler, cité dans la Table.

87. Les résultats des n^os 79, 81, 83, 84 et 86, prouvent que *toutes les fonctions explicites, soit algébriques, logarithmiques, exponentielles ou circulaires, peuvent, lorsqu'elles sont imaginaires, se ramener à la forme* $A \pm B\sqrt{-1}$.

(*) On verra dans la suite que l'existence de ces sinus et de ces cosinus appartenant à des arcs imaginaires, tient à la nature de l'hyperbole équilatère, courbe, dont les propriétés ont la plus grande analogie avec celles du cercle.

TRAITÉ

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DU CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

Exposition analytique des principes du Calcul différentiel.

Il serait fort difficile d'expliquer clairement la nature du *Calcul différentiel* à ceux qui n'en ont pas les premières notions. Ce n'est pas qu'on ne puisse définir rigoureusement ce calcul; mais on ne saurait le faire sans emprunter des idées qui ne se rencontrent point dans les circonstances ordinaires de la vie, ni dans les parties des Mathématiques qui sont l'objet des études précédentes. Heureusement rien n'oblige à commencer un Traité par des définitions, qui, comme le disait Pascal, ne consistent que dans l'imposition d'un nom aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus. Nous exposerons donc d'abord les idées préliminaires qui donnent naissance au Calcul différentiel; et par là nous ferons voir sa liaison avec le développement des fonctions, dont nous nous sommes occupés dans l'Introduction.

Des changemens qu'éprouve une fonction de x, lorsque x devient $x+h$.

1. L'Algèbre proprement dite, a pour sujet la quantité considérée en elle-même, et rapportée à un état de grandeur fixe et déterminé : les relations que des quantités assujéties à des conditions données doivent avoir entre elles, sont l'objet des questions qu'on y traite.

Dans la partie de l'Analyse qui va nous occuper, on suppose, au contraire, que la quantité passe par différens états de grandeur; et on considère les changemens qui en résultent dans ses fonctions.

Les quantités envisagées comme changeant de grandeur, ou pouvant en changer, sont appelées *variables;* et on donne le nom de *constantes* à celles qui conservent toujours la même valeur dans le cours du calcul. On voit, d'après cela, que c'est la nature de la question proposée qui détermine quelles sont les quantités qu'on doit regarder comme variables ou comme constantes.

Si une quantité variable x reçoit un accroissement représenté par h, pour trouver ce que deviennent alors les fonctions de cette quantité, il faut écrire $x+h$ au lieu de x dans leur expression : prenant pour exemple x^2, x^3 et $\frac{ax}{a^2+x^2}$, il viendra

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2,$$
$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3,$$
$$\frac{a(x+h)}{a^2+(x+h)^2} = \frac{ax+ah}{a^2+x^2+2xh+h^2}.$$

Dans le cas où x aurait éprouvé une diminution au lieu d'un accroissement, il faudrait substituer $x-h$ au lieu de x, ou donner à h le signe $-$.

2. La recherche précédente n'aura, comme on voit, aucune difficulté, toutes les fois qu'il s'agira d'une fonction dont la composition sera connue, c'est-à-dire d'une fonction explicite : elle ne paraît pas même au premier coup-d'œil devoir conduire à des résultats bien

intéressans ; mais cependant si on développe dans une série, ordonnée suivant les puissances de h, l'expression de la nouvelle valeur de la fonction proposée, elle se présente alors sous une forme qui mérite une attention particulière. On pourrait établir tout de suite cette forme sur des considérations générales ; mais dans un Ouvrage dont le but principal est de faire connaître l'esprit et l'enchaînement des méthodes, il vaut mieux saisir d'abord le fil de l'induction : c'est pourquoi nous traiterons successivement, comme il vient d'être dit, les différens genres de fonctions dont nous nous sommes occupés dans l'Introduction.

1°. Si dans la fonction x^n on met $(x+h)$ au lieu de x, il viendra

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}h^3 + \text{etc.}$$

Il faut remarquer que ce développement a pour premier terme la fonction proposée x^n, et qu'il donne naissance à une suite de fonctions $\frac{n}{1}x^{n-1}$, $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}$, etc., qui multiplient les différentes puissances de h. Ces fonctions doivent être regardées comme dérivées de la fonction proposée par la transformation qu'on lui a fait subir ; et leur considération est absolument indépendante de la valeur de h.

Toute fonction *rationnelle et entière* de x, qui ne peut être que de la forme $Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots\ldots$ conduit à un résultat semblable ; car en substituant $x+h$ à x, on trouve

$$A(x+h)^\alpha + B(x+h)^\beta + C(x+h)^\gamma + \ldots\ldots$$

et en développant,

$$\left.\begin{matrix} Ax^\alpha \\ +Bx^\beta \\ +Cx^\gamma \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +\frac{\alpha}{1}Ax^{\alpha-1} \\ +\frac{\beta}{1}Bx^{\beta-1} \\ +\frac{\gamma}{1}Cx^{\gamma-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} h \left.\begin{matrix} +\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\,.\,2}Ax^{\alpha-2} \\ +\frac{\beta(\beta-1)}{1\,.\,2}Bx^{\beta-2} \\ +\frac{\gamma(\gamma-1)}{1\,.\,2}Cx^{\gamma-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} h^2 + \text{etc.}$$

La partie indépendante de h, dans cette expression, est encore la fonction proposée ; si on la représente par u, et qu'on désigne par p, q, r, etc, les coefficiens des puissances successives de h, il viendra

$$u + ph + qh^2 + rh^3 + \text{etc.}$$

On ramènera facilement à cette forme, le résultat que donne la puissance n du polynome $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots\ldots$, lorsque x se change en $x+h$. En effet, ce polynome étant représenté par u, il devient lui-même, d'après ce qui précède,

$$u + ph + qh^2 + rh^3 + \text{etc.};$$

on a par conséquent à développer $(u + ph + qh^2 + rh^3 + \text{etc.})^n$, suivant les puissances de h; mais quelle que soit n, les formules du n° 19 de l'*Introduction* conduiront à une expression de la forme

$$u^n + Ph + Qh^2 + Rh^3 + \text{etc.},$$

P, Q, R, etc. étant des fonctions de x indépendantes de h.

La fonction *rationnelle et fractionnaire* $\dfrac{A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \ldots\ldots}{Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots\ldots}$ peut être écrite comme il suit :

$$(A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \ldots\ldots)(Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots\ldots)^{-1};$$

mais en substituant $x+h$ à x, le second facteur devient

$$(u + ph + qh^2 + rh^3 + \text{etc.})^{-1},$$

et son développement prend la forme

$$u^{-1} + Ph + Qh^2 + Rh^3 + \text{etc.};$$

quant au premier, on le représentera dans son nouvel état, par

$$u' + p'h + q'h^2 + r'h^3 + \text{etc.},$$

p', q', r', etc. étant des fonctions analogues à celles que désignent les lettres p, q, r, etc. : la fonction proposée deviendra donc

$$(u' + p'h + q'h^2 + r'h^3 + \text{etc.})\,(u^{-1} + Ph + Qh^2 + Rh^3 + \text{etc.}).$$

Si on fait la multiplication indiquée, on trouvera

$$u'u^{-1} + \left.\begin{matrix} u'P \\ + u^{-1}p' \end{matrix}\right\} h + \left.\begin{matrix} u'Q \\ + p'P \\ + u^{-1}q' \end{matrix}\right\} h^2 + \text{etc.}$$

mais $u'u^{-1}$ est la même chose que $\dfrac{u'}{u}$, ou la fonction proposée; par conséquent le résultat qu'on vient d'obtenir rentre dans la forme du précédent.

2°. Les fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires conduisent aussi à des développemens semblables, lorsqu'on y change x en $x+h$.

a^x devient dans ce cas $a^{x+h}=a^x\times a^h$; or, d'après la formule du n° 22 de l'*Introduction*,

$$a^h=1+\frac{l'a}{1}h+\frac{(l'a)^2}{1.2}h^2+\frac{(l'a)^3}{1.2.3}h^3+\text{etc.}:$$

on a donc

$$a^{x+h}=a^x+a^x(l'a)h+\frac{a^x(l'a)^2}{2}h^2+\frac{a^x(l'a)^3}{2.3}h^3+\text{etc.}$$

$l'(x)$ se change en $l'(x+h)=l'x+l'\left(1+\frac{h}{x}\right)$, et, en vertu du n° 29 de l'*Introduction*,

$$l'\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\text{etc.};$$

par conséquent

$$l'(x+h)=l'x+\frac{1}{x}h-\frac{1}{2x^2}h^2+\frac{1}{3x^3}h^3-\text{etc.}$$

En mettant $x+h$ pour x, dans $\sin x$, on trouve par les formules connues,

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h;$$

mais (*Introd.* 39)

$$\cos h=1-\frac{h^2}{1.2}+\frac{h^4}{1.2.3.4}-\text{etc.},$$

$$\sin h=h-\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{h^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}:$$

il suit de là que

$$\sin(x+h)=\sin x+\frac{\cos x}{1}h-\frac{\sin x}{1.2}h^2-\frac{\cos x}{1.2.3}h^3+\text{etc.}$$

Enfin $\cos(x+h)$ devient $\cos x\cos h-\sin x\sin h$; et en mettant pour $\cos h$ et $\sin h$ leur valeur en série, on aura

$$\cos(x+h)=\cos x-\frac{\sin x}{1}h-\frac{\cos x}{1.2}h^2+\frac{\sin x}{1.2.3}h^3+\text{etc.}$$

L'analogie doit nous porter à conclure de ce qui précède, que si u

représente une fonction quelconque de x, et qu'on écrive dans cette fonction $x+h$ au lieu de x, son développement doit prendre la forme $u+Ph+Qh^2+Rh^3+$ etc. : on verra dans la suite que cette proposition est effectivement générale. Nous laisserons donc de côté tout ce qui regarde la valeur absolue du changement qu'éprouve la fonction primitive u, en vertu de l'accroissement de la variable x dont elle dépend, pour ne nous occuper que des fonctions P, Q, R, etc., qu'elle engendre lorsqu'on la développe dans son nouvel état.

3. Nous allons d'abord chercher à déterminer les relations que les fonctions P, Q, R, etc. ont avec la proposée; et pour y parvenir plus facilement, nous commencerons par considérer un cas particulier, celui de la fonction x^n, qui, lorsque x devient $x+h$, donne

$$(x+h)^n = x^n + \frac{nx^{n-1}}{1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{1\,.\,2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{1\,.\,2\,.\,3}h^3 + \text{etc.}$$

Si on examine avec attention les coefficiens des différentes puissances de h, en faisant abstraction de leur dénominateur, on verra bientôt qu'il est facile de les déduire tous de x^n par une suite d'opérations semblables. En effet le coefficient de h, dans le développement de $(x+h)^n$, étant nx^{n-1}, le même coefficient dans celui de

$$\left.\begin{array}{r} n(x+h)^{n-1} \\ n(n-1)(x+h)^{n-2} \\ n(n-1)(n-2)(x+h)^{n-3} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{sera} \left\{\begin{array}{l} n(n-1)x^{n-2} \\ n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Il suit donc de là qu'on trouvera chacune des fonctions

$$x^n,\quad nx^{n-1},\quad n(n-1)x^{n-2},\quad n(n-1)(n-2)x^{n-3},\quad \text{etc.}$$

(excepté la première, qui est la fonction proposée), en substituant $x+h$ à x dans celle qui la précède, et en prenant le coefficient qui multiplie la première puissance de h dans le développement qui naîtra de cette substitution.

La fonction $Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots\ldots$ devenant

$$A(x+h)^\alpha + B(x+h)^\beta + C(x+h)^\gamma + \ldots\ldots,$$

on pourra appliquer au développement des différens termes qui la composent, la remarque qui vient d'être faite sur celui de $(x+h)^n$, et par conséquent chacune des fonctions

$$\left.\begin{matrix}Ax^{\alpha}\\+Bx^{\beta}\\+Cx^{\gamma}\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}\alpha Ax^{\alpha-1}\\+\beta Bx^{\beta-1}\\+\gamma Cx^{\gamma-1}\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}\\+\beta(\beta-1)Bx^{\beta-2}\\+\gamma(\gamma-1)Cx^{\gamma-2}\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)Ax^{\alpha-3}\\+\beta(\beta-1)(\beta-2)Bx^{\beta-3}\\+\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)Cx^{\gamma-3}\end{matrix}\right\}, \text{ etc.}$$

se tirera de celle qui la précède, en y changeant x en $x+h$, et en prenant le coefficient de la première puissance de h dans le développement du résultat; mais en les divisant respectivement par 1, 1.2, 1.2.3, etc., à partir de la seconde, on a les coefficiens des puissances de h dans $A(x+h)^{\alpha}+B(x+h)^{\beta}+C(x+h)^{\gamma}+\ldots$: ces coefficiens dériveront donc encore les uns des autres, de la même manière dans le cas actuel que dans le cas précédent.

Il est aisé de voir que la même chose doit avoir lieu pour toutes les fonctions explicites de celles qui ont été considérées dans l'Introduction, et qui peuvent être mises sous la forme $Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\text{etc.}$, en les développant en série; mais comme il en résulte de nouvelles séries pour les coefficiens des puissances de h, lors même qu'ils peuvent être exprimés par un nombre limité de termes, je ne m'arrêterai à cette preuve particulière, que pour faire observer dès à présent, qu'il y a du moins une multitude de fonctions qui jouissent de la propriété énoncée ci-dessus, à l'égard de la fonction x^n, et que par conséquent il peut n'être pas sans intérêt pour l'Analyse, de considérer plus particulièrement les nouvelles fonctions p, q, r, s, etc., engendrées par le développement du second état que prend la fonction u, lorsque la variable dont elle dépend reçoit un accroissement. En effet, pour peu qu'on ait réfléchi sur les procédés analytiques, on a dû remarquer que chaque opération introduite dans le calcul, fait naître des relations qui lui sont propres, et qui conduisent à de nouvelles propriétés de la *grandeur*.

4. On remarque d'abord, que lorsque, par la substitution de $x+h$ au lieu de x, la fonction u s'est changée en De la différentiation des fonctions explicites d'une seule variable.

$$u+ph+qh^2+rh^3+\text{etc.},$$

elle a reçu un accroissement représenté par la série

$$ph+qh^2+rh^3+\text{etc.},$$

et que par conséquent si on désigne par u' le second état de cette fonction, la différence de ses deux états, qu'on appelle sa *différence*, sera

$$u'-u=ph+qh^2+rh^3+\text{etc.};$$

divisant les deux membres de cette équation par h, il viendra

$$\frac{u'-u}{h}=p+qh+rh^2+\text{etc.},$$

expression qui montre que le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, est susceptible d'une limite exprimée par le coefficient p (*Int.* 12): on arriverait donc immédiatement à ce coefficient par la considération des limites. C'est aussi le moyen qu'ont employé plusieurs Analystes, d'après l'indication qui en a été donnée d'abord par d'Alembert, et j'en ai fait usage dans mon *Traité élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral;* mais ici je n'envisagerai la fonction p que comme le *coefficient de la première puissance de* h, dans le développement de la différence, ordonnée par rapport à cet accroissement.

Le premier terme, où se trouve ce coefficient, n'étant qu'une portion de la différence, on l'appelle *différentielle*; et on le représente par $\mathrm{d}u$, la lettre d étant une caractéristique et non pas un coefficient de u.

Ayant posé $\mathrm{d}u=ph$, on en conclut $p=\frac{\mathrm{d}u}{h}$; mais pour faire de l'expression $\frac{\mathrm{d}u}{h}$ un type général qui montre toujours quelle est la variable à laquelle se rapporte la fonction u, il convient de substituer à la lettre h un symbole qui rappelle cette variable, et comme l'accroissement qu'elle reçoit, étant indépendant de tout autre, n'a pour développement qu'un seul terme h, il doit être considéré comme la différentielle de x: on peut donc représenter h par $\mathrm{d}x$, et écrire en conséquence

$$\mathrm{d}u=p\,\mathrm{d}x,\qquad \text{d'où}\qquad p=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Si l'on considérait une fonction z dépendante de la variable y, le coefficient du premier terme de la différence de z, se désignerait par $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

Il suit de ces conventions que *pour trouver la différentielle d'une fonction quelconque de* x, *il faut, dans l'expression de cette fonction, écrire* x+dx *au lieu de* x, *développer le résultat, en se bornant aux termes affectés de la première puissance de* dx, *et retrancher ensuite la fonction proposée.*

Le coefficient p, ou $\frac{du}{dx}$, étant le multiplicateur de la différentielle dx, je l'appellerai *coefficient différentiel* de la fonction u; et *il s'obtiendra toujours en divisant la différentielle de la fonction* u *par celle de la variable* x.

Pour éclaircir ces règles, il suffira de les appliquer à la fonction $u = x^n$. En y écrivant $x + dx$, au lieu de x, elle deviendra (*Int.* 16)

$$u' = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \text{etc.}$$

d'où retranchant la fonction primitive x^n, on en tirera

$$du = d(x^n) = nx^{n-1}\,dx;$$

et le coefficient différentiel sera

$$\frac{du}{dx} = nx^{n-1}.$$

5. Après avoir expliqué ce que l'on entend par la différentielle et par le coefficient différentiel, la dénomination du *Calcul différentiel* indique assez qu'il a pour but la recherche de ces fonctions; et comme celles-ci sont liées intimement avec la fonction primitive, on sent qu'il doit exister une opération inverse pour remonter à cette dernière, par la connaissance de sa différentielle ou de son coefficient différentiel : tel est l'objet du *Calcul intégral*. Ces définitions s'éclairciront et s'étendront à mesure que nous avancerons; car dans cette partie de l'Analyse, comme dans toutes les autres, ce n'est qu'après l'avoir parcourue en entier qu'on a une idée parfaitement claire de ses propriétés. Je vais exposer maintenant des règles pour différentier les fonctions dont l'expression est connue.

6. La formule $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, fait voir que *pour différentier une puissance quelconque d'une quantité variable, il faut la multiplier par son exposant, diminuer ensuite cet exposant d'une unité, et multiplier le résultat par la différentielle de la variable.*

La différentielle de $Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots\ldots$ se trouvera en prenant séparément celle de chacun des termes qui composent cette fonction; et on aura pour résultat

$$\alpha Ax^{\alpha-1}\,dx + \beta Bx^{\beta-1}\,dx + \gamma Cx^{\gamma-1}\,dx + \text{etc.}$$

7. Si on a plusieurs fonctions de x jointes ensemble par addition ou par soustraction, comme les suivantes $u+v-w$, la différentielle de l'expression totale sera $du+dv-dw$; c'est-à-dire qu'on l'obtiendra en prenant la différentielle de chaque terme, avec le signe dont ce terme est affecté. En effet, d'après ce qu'on a vu jusqu'à présent, la substitution de $x+dx$ au lieu de x doit changer

$$\left.\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}\right\} \text{en} \left\{\begin{array}{l} u+p\,dx+\text{etc.} \\ v+q\,dx+\text{etc.} \\ w+r\,dx+\text{etc.}; \end{array}\right.$$

et par conséquent

$$u+v-w \quad \text{deviendra} \quad u+v-w+p\,dx+q\,dx-r\,dx+\text{etc.};$$

d'où, en retranchant la fonction proposée, on tirera $p\,dx+q\,dx-r\,dx+\text{etc.}$; mais $p\,dx$, $q\,dx$, $r\,dx$ sont les différentielles propres de chacune des fonctions u, v et w: la règle ci-dessus est donc démontrée.

8. Quoiqu'il soit presqu'évident que deux fonctions égales doivent avoir des différentielles égales, je crois cependant à propos d'entrer dans quelques détails à cet égard, afin qu'il ne reste aucun doute sur un principe qui reviendra souvent dans la suite.

Lorsque deux fonctions sont égales entre elles, quelle que soit la valeur de la variable dont elles dépendent, il faut que leurs développemens, ordonnés par rapport aux puissances de cette variable ou de son accroissement, soient identiques, afin qu'en les égalant il n'en résulte aucune équation qui puisse déterminer l'une ou l'autre des quantités dont on vient de parler; par conséquent si on a $u=v$, il faut qu'en substituant $x+dx$ à x, et en développant, on ait $u+p\,dx+\text{etc.}=v+q\,dx+\text{etc.}$, quel que soit dx: donc $p\,dx=q\,dx$, c'est-à-dire $du=dv$.

L'inverse de cette proposition n'est pas généralement vraie, et on aurait tort d'affirmer que deux différentielles égales appartiennent à des fonctions égales. En effet, si on avait $a+bx$, en substituant $x+dx$, on obtiendrait $a+bx+b\,dx$, et en retranchant $a+bx$, on trouverait $b\,dx$, résultat dans lequel il ne reste aucune trace de la constante a. La différentielle $b\,dx$ appartient donc également à $a+bx$ ou à bx, et elle convient en général aux différens cas que présente la fonction $a+bx$, lorsqu'on donne à a toutes les valeurs possibles. On voit aisément par là que dans la différentiation d'une fonction quelconque, toutes les constantes combinées seulement par voie d'addition ou de soustraction disparaissent : à l'égard de celles qui le sont par la multiplication ou par la division, elles restent toujours comme coefficiéns ou comme diviseurs.

9. Passons maintenant au produit des deux fonctions u et v : puisque u se change en $u+p\mathrm{d}x+$ etc., et v en $v+q\mathrm{d}x+$ etc., le produit uv deviendra

$$\begin{aligned} uv &+ uq\mathrm{d}x + \text{etc.} \\ &+ vp\mathrm{d}x + \text{etc.}; \end{aligned}$$

soustrayant la fonction primitive uv, il reste pour la différentielle $uq\mathrm{d}x+vp\mathrm{d}x$; mais $q\mathrm{d}x$ et $p\mathrm{d}x$ sont équivalens à $\mathrm{d}v$ et à $\mathrm{d}u$: donc $\mathrm{d}.uv=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$.

Il faut faire attention ici au point placé après le d; il est mis pour empêcher qu'on ne confonde $\mathrm{d}.uv$, qui est synonyme de $\mathrm{d}(uv)$, avec $\mathrm{d}uv$, qu'on pourrait prendre pour la différentielle $\mathrm{d}u$ multipliée par v. Dans tous les autres cas, le point marque de même que la caractéristique d s'étend à tout ce qui le suit.

Je n'ai pris que les deux premiers termes des développemens de u et de v, parce que les suivans ne contenant que des puissances de $\mathrm{d}x$ supérieures à la première, en auraient donné de semblables dans le produit, et qu'on ne saurait les admettre dans la différentielle, d'après sa définition. Il est à propos de bien saisir cette remarqué; car dans tout ce qui va suivre nous n'aurons égard, par la même raison, qu'aux deux termes $u+p\mathrm{d}x$.

La formule $\mathrm{d}.uv=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$, nous apprend que *pour avoir la différentielle du produit de deux fonctions, il faut multiplier chacune d'elles par la différentielle de l'autre, et ajouter ensemble les deux résultats.*

Si on divise les deux membres de l'équation $\mathrm{d}.uv=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$ par la fonction primitive uv, on trouvera $\frac{\mathrm{d}.uv}{uv}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}v}{v}$, ce qui nous conduira facilement à l'expression de la différentielle d'un produit composé d'autant de facteurs qu'on voudra. Pour cela, supposons que $v=ts$, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{\mathrm{d}.ts}{ts}=\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

et par conséquent

$$\frac{d.uts}{uts}=\frac{du}{u}+\frac{dt}{t}+\frac{ds}{s}:$$

on trouvera de la même manière, que

$$\frac{d.utsr....etc.}{utsr....etc.}=\frac{du}{u}+\frac{dt}{t}+\frac{ds}{s}+\frac{dr}{r}+\text{etc.}$$

Cette règle donne immédiatement la différentielle de x^n, lorsque l'exposant n est entier; car on a

$$\frac{d.x^n}{x^n}=\frac{d.xxxx....}{xxxx....}=\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+......$$

le nombre des facteurs du premier membre étant n, le second sera composé d'un pareil nombre de termes tous égaux, et il se réduira par conséquent à $\frac{ndx}{x}$; on aura donc $\frac{d.x^n}{x^n}=\frac{ndx}{x}$, et l'on en tirera facilement $d.x^n=nx^{n-1}dx$.

Si on fait évanouir les dénominateurs dans l'équation

$$\frac{d.uts}{uts}=\frac{du}{u}+\frac{dt}{t}+\frac{ds}{s},$$

on trouvera $d.uts=tsdu+usdt+utds$, et on verra aisément par là, que *quel que soit le nombre des facteurs, la différentielle de leur produit sera égale à la somme des produits de la différentielle de chacun d'eux, multipliée par tous les autres.*

10. Soit la fraction $\frac{u}{v}$; en faisant $\frac{u}{v}=t$, il vient $u=vt$, et d'après ce qui précède, $du=vdt+tdv$: prenant la valeur de dt, et substituant au lieu de t, la fraction $\frac{u}{v}$, on aura

$$dt=\frac{du}{v}-\frac{udv}{v^2},$$

résultat qu'on peut écrire comme il suit,

$$d.\frac{u}{v}=\frac{du}{v}-\frac{udv}{v^2}=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Sa traduction nous apprend que *pour trouver la différentielle d'une* *fraction, il faut multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur, retrancher de ce produit celui du numérateur par la différentielle du dénominateur, et diviser le tout par le quarré du dénominateur.*

Soit en général une fraction $\frac{rstu\ldots}{r's't'u'\ldots}$ dont le numérateur et le dénominateur renferment chacun autant de facteurs qu'on voudra; si on la représente par V, on aura $\frac{rstu\ldots}{r's't'u'\ldots}=V$, et en faisant disparaître le dénominateur, on trouvera $rstu\ldots = Vr's't'u'\ldots$; mais en vertu du n° précédent, on a

$$\frac{\mathrm{d}.rstu\ldots}{rstu\ldots}=\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}s}{s}+\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}u}{u}+\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}.Vr's't'u'\ldots}{Vr's't'u'\ldots}=\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}r'}{r'}+\frac{\mathrm{d}s'}{s'}+\frac{\mathrm{d}t'}{t'}+\frac{\mathrm{d}u'}{u'}+\ldots;$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}s}{s}+\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}u}{u}+\ldots=\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}r'}{r'}+\frac{\mathrm{d}s'}{s'}+\frac{\mathrm{d}t'}{t'}+\frac{\mathrm{d}u'}{u'}+\ldots:$$

et par conséquent

$$\mathrm{d}V=V\left\{\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}s}{s}+\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}u}{u}+\ldots-\frac{\mathrm{d}r'}{r'}-\frac{\mathrm{d}s'}{s'}-\frac{\mathrm{d}t'}{t'}-\frac{\mathrm{d}u'}{u'}-\ldots\right\}.$$

Il sera facile maintenant de tirer de ce résultat la différentielle de la fraction proposée.

11. Les règles énoncées dans les nos 6, 7, 9, 10, suffisent pour trouver la différentielle d'une fonction algébrique quelconque; et pour les enchaîner dans un ordre convenable, il faut prendre l'inverse de celui qu'on devrait suivre pour mettre en nombre l'expression proposée, c'est-à-dire que l'on commencera la différentiation par la dernière des opérations numériques indiquées dans cette expression.

A ce qui précède, il faut encore ajouter le procédé pour différentier une fonction u qui n'est pas exprimée immédiatement par la variable x dont elle dépend, mais par une autre variable z, qui elle-même est une fonction donnée de x.

Supposons que lorsque x se change en $x+h$, la fonction z devienne

$$z+ph+qh^2+\text{etc.},$$

et que u, quand z se change en $z+k$, devienne lui-même

$$u+p'k+q'k^2+\text{etc.},$$

en mettant au lieu de k la série $ph+qh^2+$ etc., qui représente l'accroissement de z, le développement du second état de u prendra la forme

$$u+pp'h+(p'q+q'p^2)h^2+\text{etc.};$$

mais d'après la définition du n° 4, pp' sera le coefficient différentiel de u, regardé comme fonction de x, ou $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, tandis que p' est celui de u, regardé comme fonction de z, ou $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$, et que p est $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$: on aura donc

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x};$$

et par ce moyen, si l'on sait différentier l'expression de u en z, et celle de z en x, on obtiendra la différentielle de u exprimée immédiatement en x.

Comme il est nécessaire de se familiariser avec l'application de ces règles, je vais placer ici quelques exemples sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

12. Soit 1°. $u=a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x}$; on prend séparément la différentielle de chaque terme de cette fonction (7) : le premier disparaît parce qu'il est constant (8); le second étant mis sous la forme $bx^{\frac{1}{2}}$, donne, par l'application de la règle du n° 6, $\frac{1}{2}bx^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{d}x$, ou $\frac{b\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$; le troisième, $-\frac{c}{x}$ est la même chose que $-cx^{-1}$, et par conséquent on en tire $-c\times-x^{-1-1}\mathrm{d}x$, ou $cx^{-2}\mathrm{d}x$, ou enfin $\frac{c\mathrm{d}x}{x^2}$. Réunissant les résultats partiels, on trouvera $\mathrm{d}u=\left(\frac{b}{2\sqrt{x}}+\frac{c}{x^2}\right)\mathrm{d}x$, et le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{b}{2\sqrt{x}}+\frac{c}{x^2}$.

2°. $u=a+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{e}{x^2}$; en écrivant cette fonction comme il suit : $u=a+bx^{-\frac{2}{3}}-cx^{-1-\frac{1}{3}}+ex^{-2}$, l'application de la première règle donnera

$$du = -\frac{2}{3}bx^{-\frac{2}{3}-1}dx + \left(1+\frac{1}{3}\right)cx^{-2-\frac{1}{3}}dx - 2ex^{-3}dx.$$

En réduisant les coefficiens numériques, et en faisant passer au dénominateur les termes affectés d'exposans négatifs, il viendra

$$du = -\frac{2}{3}\frac{bdx}{x^{\frac{5}{3}}} + \frac{4}{3}\frac{cdx}{x^{\frac{7}{3}}} - \frac{2edx}{x^3},$$

et en remplaçant les exposans fractionnaires par des radicaux,

$$du = -\frac{2bdx}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4cdx}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2edx}{x^3}.$$

Ces exemples ne comprenant que des monomes, chacun de leurs termes pouvait recevoir immédiatement l'application des règles établies ci-dessus; lorsque cette circonstance n'a pas lieu, on transforme la fonction proposée de manière qu'elle ne présente que des monomes à différentier.

3°. $u = (a+bx^m)^n$: on fera $a+bx^m = z$; la fonction proposée se changera en z^n, dont la différentielle est $nz^{n-1}dz$; mais en différentiant aussi $a+bx^m = z$, on aura (11) $mbx^{m-1}dx = dz$; mettant pour z et dz leur valeur en x et dx, il viendra

$$du = nmbx^{m-1}(a+bx^m)^{n-1}dx.$$

4°. $u = \sqrt{a+bx+cx^2}$: on fera $a+bx+cx^2 = z$; il en résultera $bdx + 2cxdx = dz$ et $\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{z}$; mais $d\sqrt{z} = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$; donc $du = \frac{bdx+2cxdx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

5°. $u = \sqrt[4]{\left[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right]^3}$: on fera

$$\frac{b}{\sqrt{x}} = y, \quad \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2} = z,$$

ce qui donnera pour la fonction proposée,

$$\sqrt[4]{(a-y+z)^3} = (a-y+z)^{\frac{3}{4}};$$

mais

$$d.(a-y+z)^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}(a-y+z)^{\frac{3}{4}-1}(-dy+dz)=\frac{-3dy+3dz}{4\sqrt[4]{a-y+z}};$$

de plus

$$dy=d\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right)=-\frac{bdx}{2x\sqrt{x}},$$

$$dz=d.(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}-1}\times-2xdx=\frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}}:$$

en substituant ces valeurs ainsi que celles de y et de z, on trouve

$$du=\frac{\dfrac{3bdx}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{4xdx}{\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{4\sqrt[4]{a-\dfrac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}.$$

6°. $u=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$: en appliquant à cet exemple la règle du n° 9, on trouve

$$du=[(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}]dx+[x\sqrt{a^2-x^2}]d(a^2+x^2)+[x(a^2+x^2)]d\sqrt{a^2-x^2};$$

puis en effectuant les différentiations indiquées,

$$du=dx(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}+2x^2dx\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2dx(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

et en réduisant,

$$du=\frac{(a^4+a^2x^2-4x^4)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

7°. $u=\dfrac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}$: la règle donnée (10) pour différentier les fractions, conduit sur-le-champ à

$$du=\frac{(a^4+a^2x^2+x^4)d(a^2-x^2)-(a^2-x^2)d(a^4+a^2x^2+x^4)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2};$$

d'où on tire

$$du=\frac{-2x(2a^4+2a^2x^2-x^4)dx}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}.$$

On peut conclure de ce qui précède, que toutes les différentielles d'une fonction algébrique sont elles-mêmes des fonctions algébriques; car pour y parvenir il ne faut exécuter qu'un nombre limité d'opérations algébriques.

13. Après les fonctions algébriques viennent les fonctions transcendantes; nous ne nous occuperons ici que de celles qui ont été traitées dans l'Introduction, et nous commencerons par les fonctions logarithmiques, parce qu'elles donnent des facilités pour différentier les fonctions exponentielles.

Soit 1°. $u = 1x$; en substituant $x + dx$ à x, on trouve

$$1(x+dx) = 1x + 1\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = 1x + M\left\{\frac{dx}{x} - \text{etc.}\right\} \text{ (\textit{Introd.}, 34.)};$$

on aura donc $1(x+dx) - 1x = M\left\{\frac{dx}{x} - \text{etc.}\right\}$, et par conséquent $d.1x = \frac{Mdx}{x}$: c'est-à-dire que *la différentielle du logarithme est égale au produit du module par la différentielle de la quantité, divisé par la quantité même.*

Dans le cas des logarithmes néperiens dont le module est 1, on a $d.1'x = \frac{dx}{x}$.

Désormais, lorsque nous emploierons les logarithmes, ce sera toujours ceux du système néperien, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire; c'est pourquoi nous omettrons l'accent affecté à la caractéristique 1, et lorsque nous prendrons la différentielle d'un logarithme, nous diviserons simplement la différentielle de la quantité à laquelle il appartient, par cette quantité même. Il est bon d'être prévenu que la différentielle du logarithme d'une quantité s'appelle aussi la *différentielle logarithmique* de cette quantité.

2°. $u = 1\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$: on fera $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = z$, et on aura $du = \frac{dz}{z}$; mais

$$dz = \frac{dx\sqrt{a^2+x^2} - \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} = \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc $du = \frac{a^2dx}{x(a^2+x^2)}$.

3°. $u = 1\{(a+x)^n(a'+x)^{n'}(a''+x)^{n''}\}$; on aura, par la nature des logarithmes, $u = n1(a+x) + n'1(a'+x) + n''1(a''+x)$, et on tirera de là

$$du = \frac{ndx}{a+x} + \frac{n'dx}{a'+x} + \frac{n''dx}{a''+x}.$$

Si on réduit ces fractions au même dénominateur, on trouvera

$$du=\left\{\frac{(n+n'+n'')x^2+[n(a'+a'')+n'(a+a'')+n''(a+a')]x+na'a''+n'aa''+n''aa'}{x^3+(a+a'+a'')x^2+(aa'+aa''+a'a'')x+aa'a''}\right\}dx,$$

expression qui est de la forme $\left\{\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+A'x^2+B'x+C'}\right\}dx$, $-a$, $-a'$ et $-a''$ étant les racines de l'équation $x^3+A'x^2+B'x+C'=0$.

On voit aisément que si on avait pris un plus grand nombre de facteurs, on serait encore tombé sur une expression analogue à la précédente, mais d'un degré plus élevé; ensorte que toute fonction du genre de la proposée a pour coefficient différentiel une fraction rationnelle.

Si les quantités a, a' et a'' étaient égales entre elles, on aurait alors $u=l(a+x)^{n+n'+n''}$, et il en résulterait $du=\frac{(n+n'+n'')dx}{a+x}$. Ces remarques serviront, dans la suite, à éclaircir un point important du Calcul intégral.

4°. $u=l\left\{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right\}$: on fera $\left.\begin{array}{l}\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=y\\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=z\end{array}\right\}$, ce qui donnera

$$u=l\left(\frac{y}{z}\right)=ly-lz \quad \text{et} \quad du=\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z};$$

mais on a

$$\left.\begin{array}{l}dy=\frac{dx}{2\sqrt{1+x}}-\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}=\frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\}=\frac{-zdx}{2\sqrt{1-x^2}}\\ dz=\frac{dx}{2\sqrt{1+x}}+\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}=\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\}=\frac{ydx}{2\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right\},$$

d'où on tire

$$\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}=\frac{-zdx}{2y\sqrt{1-x^2}}-\frac{ydx}{2z\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(y^2+z^2)dx}{2yz\sqrt{1-x^2}};$$

et en observant que $\left.\begin{array}{r}y^2+z^2=4\\ yz=2x\end{array}\right\}$, on trouvera

$$du=-\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Cet exemple est remarquable par les réductions qu'éprouve la différentielle, et sa simplicité, eu égard à la fonction dont elle dérive :

il sera facile maintenant d'effectuer les calculs des suivans, dont nous ne donnerons ici que les résultats.

5°. $u = \mathrm{l}\{x + \sqrt{1+x^2}\}$; $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

6°. $u = \frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{l}\{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\}$; $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7°. $u = \mathrm{l}.\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right\}^{\frac{1}{2}}$; $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

8°. Si on avait $u = (\mathrm{l}x)^n$, en faisant $\mathrm{l}x = z$, on trouverait $(\mathrm{l}x)^n = z^n$, et à cause de $\mathrm{d}.z^n = nz^{n-1}\mathrm{d}z$, il viendrait

$$\mathrm{d}.(\mathrm{l}x)^n = n(\mathrm{l}x)^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

9°. Soit enfin $u = \mathrm{l}.\mathrm{l}x$, c'est-à-dire le logarithme du logarithme de x : posant comme ci-dessus $\mathrm{l}x = z$, on aura d'abord $u = \mathrm{l}z$, et par conséquent $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}z}{z}$; puis mettant au lieu de z et de $\mathrm{d}z$, leur valeur en x et $\mathrm{d}x$, on trouvera $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x\,\mathrm{l}x}$.

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs, et nous passerons maintenant aux fonctions exponentielles.

14. Soit 1°. $u = a^x$: en prenant le logarithme de chaque membre, on aura $\mathrm{l}u = x\,\mathrm{l}a$, et par conséquent $\frac{\mathrm{d}u}{u} = \mathrm{d}x\,\mathrm{l}a$, d'où on tirera $\mathrm{d}u = u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{l}a$, ou, en mettant au lieu de u sa valeur, $\mathrm{d}.a^x = a^x\mathrm{d}x\,\mathrm{l}a$; et le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}.a^x}{\mathrm{d}x}$ sera $a^x\mathrm{l}a$.

On peut arriver immédiatement à ce résultat sans avoir recours aux logarithmes, en faisant usage du développement de la fonction a^x, donné dans l'Introduction (22). En effet, on a $a^{x+\mathrm{d}x} = a^x.a^{\mathrm{d}x}$; mais par l'article cité, $a^{\mathrm{d}x} = 1 + (\mathrm{l}a)\mathrm{d}x +$ etc.: donc $a^{x+\mathrm{d}x} = a^x + a^x(\mathrm{l}a)\mathrm{d}x$, ce qui donne $a^{x+\mathrm{d}x} - a^x = a^x\mathrm{d}x\,\mathrm{l}a +$ etc. et $\mathrm{d}.a^x = a^x\mathrm{d}x\,\mathrm{l}a$.

2°. $u = z^y$, z et y étant deux fonctions quelconques de x; si on prend le logarithme de chaque membre, on aura $\mathrm{l}u = y\,\mathrm{l}z$; en différentiant, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = y\frac{\mathrm{d}z}{z} + \mathrm{d}y\,\mathrm{l}z,$$

ou bien

$$\mathrm{d}u = u\left(\frac{y\mathrm{d}z}{z} + \mathrm{d}y\,\mathrm{l}z\right),$$

et en mettant pour u sa valeur,

$$\mathrm{d}.z^y = z^y\left(\frac{y\mathrm{d}z}{z} + \mathrm{d}y\,\mathrm{l}z\right).$$

On pourrait parvenir à cette différentielle sans employer les logarithmes, en écrivant :

$$\left.\begin{array}{l} u + p\mathrm{d}x \\ y + q\mathrm{d}x \\ z + r\mathrm{d}x \end{array}\right\} \text{au lieu de} \left\{\begin{array}{l} u \\ y \\ z. \end{array}\right.$$

Il viendrait alors $u + p\mathrm{d}x = (z + r\mathrm{d}x)^{y+q\mathrm{d}x}$, en observant de s'arrêter dans le développement du second membre aux termes affectés de la première puissance de $\mathrm{d}x$; mais on trouvera d'abord, par la formule du binome,

$$z^{y+q\mathrm{d}x} + (y + q\mathrm{d}x)z^{y+q\mathrm{d}x-1}r\mathrm{d}x + \text{etc.},$$

résultat auquel on peut donner la forme suivante :

$$z^y\{z^{q\mathrm{d}x} + (y + q\mathrm{d}x)z^{q\mathrm{d}x-1}r\mathrm{d}x + \text{etc.}\};$$

or

$$\left.\begin{array}{l} z^{q\mathrm{d}x} = \quad 1 + (\mathrm{l}z)q\mathrm{d}x + \text{etc.} \\ z^{q\mathrm{d}x-1} = \frac{z^{q\mathrm{d}x}}{z} = \frac{1}{z}[1 + (\mathrm{l}z)q\mathrm{d}x + \text{etc.}] \end{array}\right\}. \; (\textit{Introd.}, 22.)$$

Substituant ces valeurs et rejetant tous les termes affectés des puissances de $\mathrm{d}x$ supérieures à la première, comme ne devant pas entrer dans la différentielle, on trouvera

$$u + p\mathrm{d}x = z^y\left(1 + q\mathrm{d}x\,\mathrm{l}z + y\frac{r\mathrm{d}x}{z}\right).$$

Si on retranche de part et d'autre z^y ou u, il viendra

$$p\mathrm{d}x = z^y\left(q\mathrm{d}x\,\mathrm{l}z + \frac{y}{z}r\mathrm{d}x\right);$$

c'est-à-dire, $\mathrm{d}u = z^y\left(\mathrm{d}y\,\mathrm{l}z + \frac{y}{z}\mathrm{d}z\right)$, comme ci-dessus.

3°. $u = a^{b^x}$: on fera $b^x = y$ et on aura $u = a^y$, $\mathrm{d}u = a^y\mathrm{d}y\,\mathrm{l}a$; mais $\mathrm{d}y = b^x\mathrm{d}x\,\mathrm{l}b$, par conséquent $\mathrm{d}u = a^{b^x}b^x\mathrm{d}x\,\mathrm{l}a\,\mathrm{l}b$: on poursuivra aisément ce calcul pour les cas les plus compliqués.

4°. $u = z^{t^v}$: on fera $t^v = y$, il viendra

$$u = z^y, \quad \mathrm{d}u = z^y\left(\frac{y\mathrm{d}z}{z} + \mathrm{d}y\,\mathrm{l}z\right);$$

mettant au lieu de y et dy leur valeur en t et s, on obtiendra

$$du = z^{t^s}t^s\left(\frac{dz}{z} + \frac{sdtlz}{t} + dsltlz\right).$$

A l'aide de ces formules, on trouvera facilement la différentielle d'une fonction exponentielle quelconque : occupons-nous donc maintenant des fonctions circulaires.

15. Soit 1°. $u = \sin x$: en substituant $x + dx$ à x, la fonction proposée se changera en $\sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx$; mais on a

$$\left.\begin{array}{l} \cos dx = 1 \quad -\text{etc.} \\ \sin dx = dx - \text{etc.} \end{array}\right\} (\textit{Introd.},\ 39.)$$

donc $\sin(x + dx) = \sin x + dx \cos x - \text{etc.}$, et par conséquent $d.\sin x = dx \cos x$.

Il suit de là *que la différentielle du sinus est égale à celle de l'arc, multipliée par le cosinus.*

2°. $u = \cos x$: on a $\cos(x + dx) = \cos x \cos dx - \sin x \sin dx$, et, en mettant pour $\cos dx$ et $\sin dx$ leur valeur, $\cos(x + dx) = \cos x - dx \sin x - \text{etc.}$; donc $d.\cos x = -dx \sin x$: c'est-à-dire que *la différentielle du cosinus est égale à celle de l'arc, prise avec un signe négatif et multipliée par le sinus.*

Quant au sinus verse, sa différentielle est la même, au signe près, que celle du cosinus; car on a

$$\text{s.v.}x = 1 - \cos x; \quad \text{donc} \quad d.\text{s.v.}x = dx \sin x.$$

3°. $u = \operatorname{tang} x$: à cause de $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on aura

$$d.\operatorname{tang} x = \frac{\cos x\, d.\sin x - \sin x\, d.\cos x}{\cos x^2} = \frac{(\cos x^2 + \sin x^2)\,dx}{\cos x^2};$$

mais $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$: donc $d.\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos x^2}$.

4°. $u = \cot x$: à cause de $\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}$, on a

$$d.\cot x = -\frac{d.\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x^2} = -\frac{dx}{\operatorname{tang} x^2 \cos x^2} = -\frac{dx}{\sin x^2}.$$

5°. $u = \text{séc}\,x$: à cause de $\text{séc}\,x = \frac{1}{\cos x}$, on a

$$\text{d}.\text{séc}\,x = -\frac{\text{d}.\cos x}{\cos x^2} = \frac{\text{d}x \sin x}{\cos x^2} = \text{d}x \tan x \,\text{séc}\,x.$$

6°. $u = \text{coséc}\,x$: à cause de $\text{coséc}\,x = \frac{1}{\sin x}$, on a

$$\text{d}.\text{coséc}\,x = -\frac{\text{d}.\sin x}{\sin x^2} = -\frac{\text{d}x \cos x}{\sin x^2} = -\text{d}x \cot x \,\text{coséc}\,x.$$

Avec ces formules on peut trouver la différentielle d'une expression renfermant d'une manière quelconque des sinus, cosinus, tangentes, etc.; il faudra pour cela différentier, en regardant ces dernières comme des fonctions particulières, et mettre au lieu de leurs différentielles les résultats ci-dessus : nous n'en donnerons pour exemple que la fonction $u = \cos x^{\sin x}$. On fera $\cos x = z$, $\sin x = y$; on aura $u = z^y$ et

$$\text{d}u = \text{d}.z^y = z^y\left(\text{d}y\,\text{l}z + y\frac{\text{d}z}{z}\right) = \text{d}x \cos x^{\sin x}\left(\cos x\,\text{l}.\cos x - \frac{\sin x^2}{\cos x}\right).$$

Formation du développement général de $f(x+h)$, ou *théorème de Taylor.*

16. Les calculs effectués depuis le n° 12 jusqu'ici, ont dû bien faire concevoir la possibilité de déduire d'une fonction quelconque u la nouvelle fonction désignée sous le nom de *coefficient différentiel;* et dans tous les exemples que nous avons considérés, cette dernière fonction s'étant toujours présentée sous une forme susceptible de l'application des règles de la différentiation, doit avoir nécessairement son propre coefficient différentiel, lequel pourrait être différentié à son tour, et donner lieu à une troisième fonction, dérivée de la seconde comme celle-ci l'est de la première, comme la première l'est de la proposée, ainsi de suite. Nous allons aussi retrouver ce même enchaînement de fonctions dans le développement entier de l'accroissement que reçoit une fonction quelconque de x, lorsqu'on y change x en $x+h$; nous emploierons pour cela une analyse bien élégante, trouvée en 1772 par M. Lagrange, et complétée depuis par des remarques très-ingénieuses de M. Poisson.

17. Soit u' ce que devient u lorsqu'on y substitue $x+h$ au lieu de x, et ne supposons d'abord au développement de u' que cette forme générale :

$$u' = N + Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + Sh^{\delta} + \text{etc.},$$

N, P, Q, R, S, etc. étant des fonctions inconnues de x, et α, β, γ, δ, etc. des exposans indéterminés.

Il est d'abord évident que tous ces exposans doivent être positifs; car des termes de la forme $Sh^{-\delta}$ deviendraient infinis par l'hypothèse de $h=0$, qui doit au contraire rendre u' égal à u.

On voit aussi par là qu'en supposant $h=0$ dans le second membre de l'équation ci-dessus, ce qui change u' en u, on en tire $u=N$; et le développement cherché, ayant pour premier terme la fonction proposée u, devient en conséquence

$$u'=u+Ph^{\alpha}+Qh^{\beta}+Rh^{\gamma}+Sh^{\delta}+\text{etc.}$$

Cela posé, si l'on change h en $h+k$ et qu'on désigne le résultat par u'', il viendra

$$u''=u+P(h+k)^{\alpha}+Q(h+k)^{\beta}+R(h+k)^{\gamma}+S(h+k)^{\delta}+\text{etc.}; \quad (a)$$

mais on peut aussi parvenir à la même quantité u'', en substituant dans u', $x+k$ à x; car si on désigne u par $\mathrm{f}(x)$, suivant la notation du n° 16 de l'*Introduction*, u' sera $\mathrm{f}(x+h)$; et soit qu'on y écrive $h+k$ au lieu de h, ou $x+k$ au lieu de x, on obtiendra également $\mathrm{f}(x+h+k)$, quantité composée avec le trinome $x+h+k$, comme la fonction proposée l'est avec le monome x. A présent il est visible que substituer $x+k$ à x dans u', c'est donner à x un accroissement k, dans toutes les fonctions u, P, Q, etc. qui entrent dans le développement de u', et en supposant que par ce changement

$$\begin{array}{l}
u \text{ devienne } u+Pk^{\alpha}+\text{etc.},\\
P\ldots\ldots\ldots P+P'k^{\alpha'}+\text{etc.},\\
Q\ldots\ldots\ldots Q+Q'k^{\alpha''}+\text{etc.},\\
R\ldots\ldots\ldots R+R'k^{\alpha'''}+\text{etc.},\\
S\ldots\ldots\ldots S+S'k^{\alpha^{\text{IV}}}+\text{etc.},\\
\text{etc.}
\end{array}$$

on aura pour le second développement de u'',

$$u''=\left.\begin{array}{l}
u+Ph^{\alpha}+Qh^{\beta}+Rh^{\gamma}+Sh^{\delta}+\text{etc.}\\
+Pk^{\alpha}+P'h^{\alpha}k^{\alpha'}+Q'h^{\beta}k^{\alpha''}+R'h^{\gamma}k^{\alpha'''}+S'h^{\delta}k^{\alpha^{\text{IV}}}+\text{etc.}\\
+\text{etc.}+\text{etc.}+\text{etc.}+\text{etc.}+\text{etc.}+\text{etc.}
\end{array}\right\} \quad (b)$$

Faisons pour un moment $k = h$, les équations (a) et (b) prendront respectivement les formes :

$$u' = u + P.2^{\alpha}h^{\alpha} + Q.2^{\beta}h^{\beta} + \text{etc.}, \ldots\ldots\ldots (a')$$

$$\left.\begin{array}{l} u' = u + Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + \text{etc.} \\ \quad + Ph^{\alpha} + P'h^{\alpha+\alpha'} + Q'h^{\beta+\alpha''} + \text{etc.} \\ \quad + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} \end{array}\right\}, \ldots\ldots\ldots (b')$$

et ne pourront être identiques, tant que les termes affectés de la même puissance de h ne seront pas égaux ; il faut donc que le terme $P.2^{\alpha}h^{\alpha}$ de la première soit le même que la somme des deux termes Ph^{α} contenus dans la seconde : on doit donc avoir

$$P.2^{\alpha}h^{\alpha} = 2Ph^{\alpha}, \quad \text{d'où} \quad 2^{\alpha} = 2, \quad 2^{\alpha-1} = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = 1.$$

Il est donc démontré que, *quelle que soit la fonction* u, *le second terme du développement de* u′ *doit être seulement de la forme* Ph, *et que ce terme est par conséquent ce qu'on a désigné par la différentielle de* u (4); d'où il suit que $P = \frac{du}{dx}$.

18. En appliquant ce théorème au développement des fonctions P, Q, R, S, etc., on verra que

$$P' = \frac{dP}{dx}, \quad Q' = \frac{dQ}{dx}, \quad R' = \frac{dR}{dx}, \quad S' = \frac{dS}{dx}, \quad \text{etc.},$$

et l'équation (b) deviendra

$$\left.\begin{array}{l} u' = u + Ph + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + Sh^{\delta} + \text{etc.} \\ \quad + \frac{du}{dx}k + \frac{dP}{dx}hk + \frac{dQ}{dx}h^{\beta}k + \frac{dR}{dx}h^{\gamma}k + \frac{dS}{dx}h^{\delta}k + \text{etc.} \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right\}, \ldots (b'')$$

qu'il faudra comparer avec l'équation (a), dans laquelle on se bornera à développer les deux premiers termes de chaque puissance du binome $h + k$, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} u' = u + Ph + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + Sh^{\delta} + \text{etc.} \\ \quad + Pk + \beta Qh^{\beta-1}k + \gamma Rh^{\gamma-1}k + \delta Sh^{\delta-1}k + \text{etc.} \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (a'')$$

Ces dernières équations ont leur première ligne composée des mêmes termes ; mais les secondes ne sauraient devenir identiques, indépendamment des valeurs de h et de k, à moins que les exposans de h dans les termes correspondans, ne soient égaux ; il faut par conséquent que

$$\beta - 1 = 1, \quad \gamma - 1 = \beta, \quad \delta - 1 = \gamma, \quad \text{etc.}$$

En égalant ensuite les coefficiens des mêmes termes, on obtient

$$P = \frac{du}{dx}, \quad \beta Q = \frac{dP}{dx}, \quad \gamma R = \frac{dQ}{dx}, \quad \delta S = \frac{dR}{dx}, \quad \text{etc.}$$

On tire des premières équations

$$\beta = 2, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 4, \quad \text{etc.},$$

et substituant dans les secondes, il vient

$$P = \frac{du}{dx}, \quad Q = \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}, \quad R = \frac{1}{3}\frac{dQ}{dx}, \quad S = \frac{1}{4}\frac{dR}{dx}, \quad \text{etc.}$$

Il suit de là que *le second état de la fonction* u *peut, en général, se développer dans une série de la forme*

$$u + Ph + Qh^2 + Rh^3 + Sh^4 + etc.,$$

et que les coefficiens P, Q, R, S, *etc. se déduisent de la fonction proposée, par des différentiations répétées* (*).

(*) Ce qu'on vient de lire ne suppose pas la démonstration de la formule du binome de Newton, mais seulement que l'on sache que le second terme de $(h+k)^m$ est de la forme $Mh^{m-1}k$, et que $M=m$, lorsque m est un nombre entier positif. M. Poisson vérifie la première condition, après avoir prouvé que

$$u' = u + Ph + \text{etc.},$$

en observant qu'il suit de là que

$$(x+h)^m = x^m + Ph + \text{etc.},$$

et que si l'on divise les deux membres de cette équation par x^m, il vient

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^m = 1 + \frac{P}{x^m}h + \text{etc.};$$

19. Pour indiquer l'utilité de ce théorème, dû au géomètre anglais Taylor, et dont M. Lagrange a fait depuis la base du calcul différentiel, nous allons en présenter quelques applications.

Soit d'abord $u = x^m$, on aura (6)

$$P = \frac{du}{dx} = mx^{m-1},$$
$$Q = \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} = \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2},$$
$$R = \frac{1}{3}\frac{dQ}{dx} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\;.\;3}x^{m-3},$$
$$S = \frac{1}{4}\frac{dR}{dx} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\;.\;3\;.\;4}x^{m-4},$$
etc.

et par conséquent

$$u' = (x+h)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1\;.\;2}x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\;.\;2\;.\;3}x^{m-3}h^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}x^{m-4}h^4 + \text{etc.}$$

Ceci forme une démonstration du binome qui est très-complète ; car ne reposant que sur la différentiation de la fonction x^m, elle n'exige que la connaissance du second terme du développement cherché, terme qui s'obtient très-facilement *à priori*, soit comme on l'a vu dans le n° 16 de l'Introduction, soit par des considérations analogues.

Soit encore $u = a^x$, on aura (14), en faisant $la = A$,

$$P = \frac{du}{dx} = Aa^x,$$
$$Q = \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} = \frac{A^2}{2}a^x,$$
$$R = \frac{1}{3}\frac{dQ}{dx} = \frac{A^3}{2.3}a^x,$$
$$S = \frac{1}{4}\frac{dR}{dx} = \frac{A^4}{2.3.4}a^x,$$
etc.

---

or en faisant $\frac{h}{x} = z$, on trouve

$$(1 + z)^m = 1 + \frac{P}{x^{m-1}}z + \text{etc.},$$

et puisque le premier membre ne contient plus x, il faut que le second en soit délivré, ou que l'on ait $P = x^{m-1}$.

d'où il résulte

$$a^{x+h} = a^x \left\{1 + \frac{Ah}{1} + \frac{A^2h^2}{1.2} + \frac{A^3h^3}{1.2.3} + \frac{A^4h^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right\},$$

série qui fournirait elle-même le moyen de déterminer A, s'il était encore inconnu, puisqu'en faisant $x = 0$ et $h = \frac{1}{A}$, on retombe sur l'équation

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

déjà traitée dans le n° 22 de l'*Introd.* On doit voir par là que le théorème de Taylor conduit sans peine aux développemens des fonctions exponentielles et logarithmiques. Il en serait de même à l'égard des fonctions circulaires ; ensorte que ce théorème, ne supposant que la détermination du second terme du développement, pourrait remplacer tout ce qui a été fait de plus dans l'Introduction.

20. La notation différentielle offre le moyen d'exprimer immédiatement, par la fonction u, les coefficiens P, Q, R, S, etc. ; car P étant $\frac{du}{dx}$, dP sera $d\left(\frac{du}{dx}\right)$, et comme dx est une quantité constante, il suffira de différentier le numérateur du, ce qui s'indiquera en écrivant $d(du)$, et mieux encore d^2u, où l'exposant 2 n'indique pas une puissance de la lettre d, mais désigne combien de fois on a dû faire successivement l'opération marquée par la caractéristique d. D'après cette convention, dP devient $\frac{d^2u}{dx}$, et $\frac{dP}{dx} = \frac{d^2u}{dx \times dx}$, ou $\frac{d^2u}{dx^2}$; car pour marquer le quarré, le cube, ou une puissance quelconque de l'accroissement dx, on écrit dx^2, $dx^3 \ldots dx^n$, expression équivalente à $(dx)^2$, $(dx)^3, \ldots (dx)^n$, et qu'il ne faut par conséquent pas confondre avec $d.x^2$, $d.x^3 \ldots d.x^n$, qui représentent $d(x^2)$, $d(x^3) \ldots d(x^n)$.

D'après les conventions ci-dessus et la valeur de Q, il vient

$$Q = \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Il suit de là que $dQ = \frac{1}{2}d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$; et comme on ne doit encore différentier que le numérateur, il faudra écrire $\frac{d(d^2u)}{dx^2}$, ou $\frac{d^3u}{dx^2}$, d'où il résultera

$$dQ = \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d^3u}{dx^3}, \quad R = \frac{1}{3}\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{2.3}\frac{d^3u}{dx^3}.$$

On trouvera semblablement que

$$dR = \frac{1}{1.2.3}d\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^4u}{dx^3},$$

et que par conséquent

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^4u}{dx^4}, \quad S = \frac{1}{4}\frac{dR}{dx} = \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4u}{dx^4}.$$

Avec ces expressions, la dernière formule du n° 18 est représentée par

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{etc.};$$

d'où l'on conclut que la différence des deux états de la fonction proposée est.

$$u' - u = \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

21. On voit par ce qui précède, que chacune des quantités du, d^2u, d^3u, d^4u, etc. est la différentielle de celle qui la précède; c'est pour cela que

du étant la *différentielle première* de u,
d^2u, différentielle de la différentielle, est la *différentielle seconde*,
d^3u, différentielle de la différentielle seconde, est la *différentielle troisième*,
d^4u, différent^elle^ de la différent^elle^ troisième, est la *différentielle quatrième*,
etc.;

ensorte que l'exposant de la caractéristique d, marque l'ordre de la différentielle, par rapport à la fonction u.

En se rappelant le procédé de la différentiation, on voit que chaque différentielle doit avoir pour facteur une puissance de dx du même degré que l'exposant de l'ordre de cette différentielle. En effet, soit $du = pdx$, p ne contiendra pas dx, et en différentiant on obtiendra $d^2u = dpdx$, puisque dx est invariable; mais dp aura la forme qdx, q ne contenant pas dx; donc $d^2u = qdx^2$. En différentiant de nouveau, il viendra $d^3u = dq dx^2$; puis faisant $dq = r dx$, on aura $d^3u = r dx^3$, et ainsi de suite; de manière qu'à un ordre quelconque on trouvera $d^n u = t dx^n$, t ne contenant pas dx.

Réciproquement les fonctions $p, q, r \ldots t$, se concluent des différentielles successives, puisque

$$\begin{array}{llll} du = p dx & \text{donne} & p = \dfrac{du}{dx}, \\ d^2u = q dx^2 & \ldots\ldots\ldots & q = \dfrac{d^2u}{dx^2}, \\ d^3u = r dx^3 & \ldots\ldots\ldots & r = \dfrac{d^3u}{dx^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ d^n u = t dx^n & \ldots\ldots\ldots & t = \dfrac{d^n u}{dx^n}; \end{array}$$

et d'après la définition de la première de ces fonctions (4), on nomme aussi toutes les autres *coefficiens différentiels*, en les distinguant par l'ordre de la différentielle à laquelle ils appartiennent; r, ou $\frac{d^3u}{dx^3}$, par exemple, est le *coefficient différentiel du troisième ordre* de la fonction u.

22. Il n'est pas besoin de nouvelles règles pour trouver ces coefficiens différentiels : il suffit de l'application répétée des procédés enseignés dans la recherche des différentielles premières.

En prenant la fonction ax^n pour exemple, on trouvera

$$\begin{array}{ll} d.ax^n = nax^{n-1}dx, & \dfrac{d.ax^n}{dx} = nax^{n-1}, \\ d^2.ax^n = n(n-1)ax^{n-2}dx^2, & \dfrac{d^2.ax^n}{dx^2} = n(n-1)ax^{n-2}, \\ d^3.ax^n = n(n-1)(n-2)ax^{n-3}dx^3, & \dfrac{d^3.ax^n}{dx^3} = n(n-1)(n-2)ax^{n-3}, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

On voit qu'au bout d'un nombre m de différentiations, l'exposant n sera diminué de m unités, et que le coefficient numérique sera $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$, ce qui montre que la fonction ax^n, lorsque n est un nombre entier positif, ne saurait avoir qu'un nombre de différentielles égal à son exposant, et que la dernière étant

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 1.adx^n,$$

est constante et donne pour coefficient différentiel de l'ordre n la quantité invariable

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots.1.a.$$

Si on prenait $u=e^x$, on trouverait (14), à cause de $le=1$,

$$\frac{du}{dx}=e^x, \quad \frac{d^2u}{dx^2}=e^x, \quad \frac{d^3u}{dx^3}=e^x, \quad \text{etc.},$$

c'est-à-dire que la fonction e^x jouit de la propriété remarquable de se reproduire elle-même dans chacun de ses coefficiens différentiels, dont le nombre est infini.

23. Les différentielles peuvent servir seules à former l'expression du théorème de Taylor; il suffit pour cela de changer l'accroissement déterminé h, dans l'accroissement indéterminé dx, dont les mêmes puissances multiplieront et diviseront en même temps chaque terme de la suite, qui deviendra

$$u'=u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\frac{d^4u}{1.2.3.4}+\text{etc.},$$

on en tirera

$$u'-u=\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\frac{d^4u}{1.2.3.4}+\text{etc.},$$

formule très-simple par laquelle on voit comment la différence de u, correspondante à l'accroissement quelconque dx, se compose avec les différentielles des divers ordres, relatives au même accroissement.

24. Pour ne rien laisser à desirer dans la démonstration du théorème de Taylor (18), qui est fondée sur le même principe que celle du binome (*Introd.*, 15), il faut prouver que ce ne sont pas seulement les deux premières lignes de l'équation (a'') qui deviennent identiques avec celles de l'équation (b''), mais qu'il en est de même de toutes les autres: c'est ce que je vais faire.

Par le premier changement de x en $x+h$, on a d'abord

$$u'=u+\frac{du}{dx}h+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots\ldots\ldots+\frac{d^mu}{dx^m}\frac{h^m}{1.2\ldots m}+\text{etc. (20)};$$

et pour passer de là au développement de u'', correspondant à l'équation (b''), en changeant x en $x+k$, il faut observer que suivant la loi exprimée par le théorème de Taylor,

$$u \quad \text{devient} \quad u + \frac{du}{dx}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{k^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$$\frac{du}{dx} \;\ldots\ldots\; \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{k^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^mu}{dx^m} \;\ldots\ldots\; \frac{d^mu}{dx^m} + \frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}}\frac{k}{1} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^{m+n}u}{dx^{m+n}}\frac{k^n}{1.2\ldots n} + \text{etc.}$$

Substituant le terme général de cette dernière série, dans celui de u', on trouvera que le terme général de u'' est

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^{m+n}}\frac{h^mk^n}{1.2\ldots m \times 1.2\ldots n};$$

mais en écrivant simplement $h+k$ au lieu de h, dans u', on obtient pour le développement de u'', correspondant à l'équation (a''), la série

$$u'' = u + \frac{du}{dx}\frac{(h+k)}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{(h+k)^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{(h+k)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

dans laquelle le terme affecté de h^mk^n, qui fait évidemment partie du développement de

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^{m+n}}\frac{(h+k)^{m+n}}{1.2\ldots.(m+n)},$$

est exprimé par

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^{m+n}}\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots.n}\cdot\frac{h^mk^n}{1.2\ldots.(m+n)};$$

et en effaçant les facteurs $(m+n)\,(m+n-1)\ldots.(m+1)$, communs au numérateur et au dénominateur, il vient, de même que ci-dessus,

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^{m+n}}\cdot\frac{h^mk^n}{1.2\ldots m \times 1.2\ldots n}.$$

25. Occupons-nous maintenant des fonctions qui dépendent de deux variables, et prenons d'abord un exemple. Soit $u = x^my^n$; les quantités x et y n'étant assujéties à aucune relation entre elles, la seconde peut rester la même, quoique la première ait changé, et réciproquement. Il résulte de là que la valeur de la fonction proposée peut varier de plusieurs manières, 1°. en conséquence d'un changement arrivé à x seul ou à y seul; 2°. par le concours de ces deux circonstances.

De la différentiation des fonctions de deux variables.

En n'ayant d'abord égard qu'au changement de x, si on substitue $x+h$ au lieu de cette variable, dans la fonction proposée, on trouvera

$$(x+h)^m y^n = x^m y^n + \frac{m}{1} x^{m-1} y^n h + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} x^{m-2} y^n h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} x^{m-3} y^n h^3 + \text{etc.}$$

Si l'on fait varier y seul, en écrivant $y+k$ au lieu de y, on aura

$$x^m (y+k)^n = x^m y^n + \frac{n}{1} x^m y^{n-1} k + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} x^m y^{n-2} k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} x^m y^{n-3} k^3 + \text{etc.}$$

Enfin si on suppose que les deux changemens précédens aient lieu à-la-fois, la fonction proposée deviendra $(x+h)^m (y+k)^n$; et on en obtiendrait le développement en multipliant celui de $(x+h)^m$ par celui de $(y+k)^n$. Mais on peut arriver au même but d'une manière plus simple, en substituant $y+k$ pour y dans le développement de $(x+h)^m y^n$ trouvé ci-dessus, ou bien $x+h$ pour x dans celui de $x^m(y+k)^n$. En effectuant la première opération, il viendra

$$(x+h)^m (y+k)^n = \left\{ \begin{array}{lll} x^m y^n & + \frac{m}{1} x^{m-1} y^n h & + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} x^{m-2} y^n h^2 \\ + n x^m y^{n-1} k & + \frac{mn}{1\;1} x^{m-1} y^{n-1} hk & + \frac{m(m-1)n}{1\,.\,2\;\;1} x^{m-2} y^{n-1} h^2 k \\ + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} x^m y^{n-2} k^2 & + \frac{mn(n-1)}{1\;1\,.\,2} x^{m-1} y^{n-2} hk^2 & + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{n(n-1)}{1\,.\,2} x^{m-2} y^{n-2} h^2 k^2 \\ + \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.} \end{array} \right.$$

Ce développement nous présente la fonction primitive $x^m y^n$, plus une suite de fonctions de x et de y qui multiplient les différentes puissances des accroissemens h et k, ainsi que les produits de ces puissances. On trouverait des développemens analogues pour toute autre fonction, et quel que soit le nombre de variables qui entrent dans sa composition : nous allons faire voir en général que ces développemens donnent lieu à de nouvelles fonctions, qu'on peut dériver de la proposée par des différentiations successives, comme celles qu'on obtient dans le cas d'une seule variable.

26. Représentons par $f(x, y)$ une fonction quelconque de x et de y;

supposons d'abord que la variable x change seule et devienne $x+h$: il faudra regarder y comme une constante et traiter la fonction proposée de même qu'une fonction de x; on aura donc par le théorème du n° 20, en faisant pour abréger $\mathrm{f}(x,y)=u$,

$$\mathrm{f}(x+h,y)=u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si on voulait trouver ce que devient la fonction proposée lorsque y seul prend un accroissement, on regarderait x comme une constante, et $\mathrm{f}(x, y)$, ou u, comme une fonction de y; par là on aurait

$$\mathrm{f}(x, y+k)=u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{k}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Supposons maintenant que les quantités x et y varient en même temps, et deviennent $x+h$ et $y+k$; comme on n'a assigné aucune forme particulière à la fonction $\mathrm{f}(x, y)$, il n'est pas possible d'y faire à-la-fois les deux substitutions indiquées; mais il est aisé de sentir qu'on parviendra au même résultat en changeant d'abord x en $x+h$, et en mettant ensuite $y+k$ pour y, dans le développement qu'on aura obtenu par la première opération.

On a déjà $\mathrm{f}(x+h,y)=u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$, u représentant $\mathrm{f}(x, y)$. Pour développer les coefficiens des différens termes de cette série, en ayant égard au changement arrivé à y, j'observerai d'abord que dans chacun d'eux, x doit être regardé comme une quantité constante, et qu'on doit les traiter par conséquent comme des fonctions de la seule variable y. D'après cela, $\mathrm{f}(x, y)$, ou u, deviendra

$$u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{k}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si dans ce développement on écrit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ au lieu de u, on aura pour résultat ce que devient la fonction $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, lorsque y se change en $y+k$; c'est-à-dire,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y}\frac{k}{1}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.};$$

mais il est aisé de voir que l'expression $\frac{\mathrm{d}.\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y}$ indique deux différentiations faites successivement sur la fonction proposée, la première en ayant égard à la variabilité de x seul, et la seconde en ne considérant que celle de y; nous la mettrons sous une forme plus simple en l'écrivant comme il suit : $\frac{d^2u}{dydx}$. Nous représenterons de même $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}$ par $\frac{d^3u}{dy^2dx}$: en général, il faudra entendre par $\frac{d^{n+m}u}{dy^ndx^m}$, le coefficient différentiel de l'ordre n relatif à la fonction $\frac{d^mu}{dx^m}$, en n'y supposant que y variable; tandis que cette fonction est elle-même le coefficient différentiel de l'ordre m de la fonction proposée, en n'y supposant que x variable.

Cela posé, la substitution de $y+k$ au lieu de y changera

$$\frac{du}{dx} \text{ en } \frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{k}{1}+\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^4u}{dy^3dx}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ en } \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^3u}{dydx^2}\frac{k}{1}+\frac{d^4u}{dy^2dx^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^5u}{dy^3dx^2}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$
$$\frac{d^3u}{dx^3} \text{ en } \frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^4u}{dydx^3}\frac{k}{1}+\frac{d^5u}{dy^2dx^3}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^6u}{dy^3dx^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$
etc.

En substituant ces valeurs dans le développement de $f(x+h, y)$, et en ordonnant de manière que tous les termes dans lesquels les exposans de h et de k font une même somme, soient placés dans une même colonne, il viendra

$$\left.\begin{aligned}f(x+h, y+k)=u&+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\&+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{k}{1}\frac{h}{1}+\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2}{1.2}\frac{h}{1}+\text{etc.}\\&\qquad+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dydx^2}\frac{k}{1}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}\\&\qquad\qquad+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\&\qquad\qquad\qquad+\text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

27. Nous avons obtenu le développement précédent en mettant d'abord $x+h$ au lieu de x, et ensuite $y+k$ au lieu de y; mais on aurait pu procéder dans un ordre inverse, et commencer par la substi-

tution relative à y : alors $f(x, y)$ serait devenue

$$f(x, y+k) = u + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

La substitution de $x+h$ au lieu de x, dans cette série, aurait changé

$$u \quad \text{en} \quad u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et ensuite

$$\frac{du}{dy} \text{ en } \frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dx^3dy}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} \text{ en } \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1} + \frac{d^4u}{dx^2dy^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^5u}{dx^3dy^2}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^3u}{dy^3} \text{ en } \frac{d^3u}{dy^3} + \frac{d^4u}{dxdy^3}\frac{h}{1} + \frac{d^5u}{dx^2dy^3}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^6u}{dx^3dy^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

etc.

on aurait eu par conséquent

$$\left.\begin{aligned} f(x+h, y+k) = u &+ \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\ &+ \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}\frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}\frac{k}{1} + \text{etc.} \\ &+ \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}\frac{k^2}{1.2} + \text{etc.} \\ &+ \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

Il est évident que ce second développement doit être identique avec le premier; car il est indifférent de changer d'abord x en $x+h$ et ensuite y en $y+k$, ou de faire les mêmes substitutions dans un ordre inverse, puisque d'une manière ou de l'autre on obtient également $f(x+h, y+k)$.

Si on compare dans ces deux développemens les termes qui sont affectés des mêmes puissances de h et de k, on trouvera cette suite d'équations :

$$\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy},$$
$$\frac{d^3u}{dydx^2} = \frac{d^3u}{dx^2dy},$$
$$\frac{d^3u}{dy^2dx} = \frac{d^3u}{dxdy^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m} = \frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n},$$
etc. etc.

La première nous apprend que le coefficient différentiel du second ordre d'une fonction de deux variables, pris en différentiant par rapport à l'une d'elles et ensuite par rapport à l'autre, reste le même, quel que soit l'ordre qu'on ait suivi dans les différentiations. Soit, par exemple, $u = x^m y^n$; si on différentie d'abord en regardant x seul comme variable, on a $\frac{du}{dx} = mx^{m-1}y^n$; différentiant ensuite ce résultat, et ne faisant varier que y, on obtient $\frac{d^2u}{dydx} = mnx^{m-1}y^{n-1}$: en opérant dans un ordre inverse, on trouve $\frac{du}{dy} = nx^m y^{n-1}$ et $\frac{d^2u}{dxdy} = mnx^{m-1}y^{n-1}$; et on voit que le dernier résultat est le même dans les deux cas.

28. Les autres équations rapportées ci-dessus ne sont que des conséquences de la première : en effet, d'après la notation adoptée, $\frac{d^3u}{dy\,dx^2}$ est la même chose que $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dydx}$, et à cause qu'on peut intervertir l'ordre de ces différentiations consécutives, la même chose encore que $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dxdy} = \frac{d^3u}{dxdydx}$. On a aussi $\frac{d^3u}{dx^2dy} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)}{dx}$, et en changeant l'ordre des deux premières différentiations indiquées, il vient $\frac{d\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)}{dx} = \frac{d^3u}{dxdy\,dx}$, résultat conforme au précédent.

On trouvera semblablement

$$\frac{d^3u}{dy^2dx} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)}{dy} = \frac{d^3u}{dy\,dx\,dy},$$
$$\frac{d^3u}{dx\,dy^2} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dy}\right)}{dxdy} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dy}\right)}{dy\,dx} = \frac{d^3u}{dy\,dx\,dy}.$$

En général, *on peut déranger comme on voudra l'ordre des différentiations indiquées; pourvu qu'elles restent les mêmes et en même nombre, le résultat ne changera pas.*

Pour le prouver, soit $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$; il est facile de voir, d'après les conventions faites dans les nos 20 et 26, qu'on peut décomposer cette expression comme il suit: $\frac{d^{m-1}\left(\frac{d^2\left(\frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right)}{dxdy}\right)}{dx^{m-1}}$; mais en intervertissant l'ordre des deux différentiations isolées, ce qui est permis, on a $\frac{d^{m-1}\left(\frac{d^2\left(\frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right)}{dydx}\right)}{dx^{m-1}}$; et en réunissant sous un même signe toutes les opérations indiquées, il vient, au lieu de la formule proposée, l'expression équivalente $\frac{d^{m+n}u}{dx^{m-1}dydxdy^{n-1}}$. Si on décomposait encore cette dernière, on y pourrait faire de nouvelles permutations dans l'arrangement des dy et dx; nous devons donc regarder la proposition ci-dessus comme démontrée.

29. En retranchant $f(x, y)$, ou u, de $f(x+h, y+k)$, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
f(x+h, y+k) - f(x, y) = {} & \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \\
& + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dydx}\frac{k}{1}\frac{h}{1} + \text{etc.} \\
& + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \text{etc.} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}\right\}$$

Si on étend aux fonctions de deux variables la définition que nous avons donnée (4) de la différentielle des fonctions d'une seule, on verra que celle de $f(x, y)$, ou de u, est comprise dans les deux termes qui forment la première colonne du développement précédent; et changeant h en dx et k en dy, nous aurons $df(x, y) = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$. Il suit de là que la différentielle d'une fonction de deux variables renferme deux parties, savoir: $\frac{du}{dx}dx$, ou la différentielle prise en regardant x comme seule variable, et $\frac{du}{dy}dy$, ou la différentielle prise en regardant y comme seule variable.

On peut donc appliquer aux fonctions de deux variables les règles données (6 et suiv.) pour la différentiation de celles qui dépendent d'une seule, et pour cela *on différentiera la fonction proposée, d'abord par rapport à l'une des variables, et ensuite par rapport à l'autre : la somme des deux résultats sera la différentielle cherchée.*

On voit sur-le-champ, d'après cette règle, que
$$\left.\begin{aligned} d(x+y) &= dx+dy \\ d.xy &= ydx+xdy \\ d.\frac{x}{y} &= \frac{ydx-xdy}{y^2} \end{aligned}\right\}.$$

30. Nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire de donner beaucoup d'exemples relatifs à la différentiation des fonctions de deux variables, puisqu'elle rentre dans celle des fonctions qui n'en contiennent qu'une ; nous nous bornerons donc aux suivans :

1°. $u = x^m y^n$; on a $\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx}dx &= mx^{m-1}y^n dx \\ \frac{du}{dy}dy &= nx^m y^{n-1}dy \end{aligned}\right\}$;

donc

$$du = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1}dy = x^{m-1}y^{n-1}(mydx+nxdy).$$

2°. $u = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$; on a $\frac{du}{dx}dx = -\frac{ayxdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{du}{dy}dy = \frac{ady}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc

$$du = \frac{-ayxdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ady}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou en réduisant, $du = \frac{-ayxdx + ax^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3°. $u = \text{l.tang}\,\frac{x}{y}$: pour différentier cette expression, dans laquelle la quantité $\frac{x}{y}$ est enveloppée successivement sous deux fonctions transcendantes, on fera $\frac{x}{y} = z$, et on cherchera, d'après le n^os 13 et 15, la différentiel de l. tang z. Il viendra pour résultat

$$du = \frac{d.\tang z}{\tang z} = \frac{dz}{\tang z \cos z^2} = \frac{dz}{\sin z \cos z}.$$

En mettant au lieu de z et de dz leurs valeurs, on trouvera

$$du = \frac{\frac{ydx - xdy}{y^2}}{\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}} = \frac{ydx - xdy}{y^2 \sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}.$$

31. La manière dont on écrit les différentielles des fonctions qui dépendent de plusieurs variables, donne lieu à des remarques importantes. Il ne faut pas confondre alors $\frac{du}{dx}dx$ avec du, comme on pourrait le faire si u ne renfermait que la seule variable x. En effet, dans ce dernier cas, du n'étant que le premier terme du développement de la différence entre les deux états consécutifs de la fonction proposée, si on divise cette quantité par l'accroissement dx, on a le coefficient différentiel; mais lorsque u renferme deux variables, la différentielle est composée de deux termes, et l'expression $\frac{du}{dx}$ a dans ce cas un sens particulier; elle désigne le coefficient différentiel pris dans l'hypothèse de x seul variable, ou le premier terme du développement de la différence prise dans cette hypothèse, divisé par l'accroissement dx: il en est de même de $\frac{du}{dy}$, par rapport à y.

Les quantités $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ sont appelées ordinairement *différences partielles* du premier ordre de la fonction u; et en général $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$ représente une de celles de l'ordre $m+n$, prise en différentiant m fois par rapport à x, et n fois par rapport à y.

Je crois devoir faire observer que la dénomination de *différence partielle* n'est pas exacte; car les formules qu'on désigne ainsi n'expriment point la différence entre deux quantités. Les vraies *différences partielles* de u sont,

$$f(x+h,y)-f(x,y), \qquad f(x,y+k)-f(x,y),$$

la première étant prise en n'ayant égard qu'au changement de x, et la seconde en ne supposant que celui de y. Les expressions

$$\frac{du}{dx}h,\quad \frac{du}{dy}k,\quad \text{ou}\quad \frac{du}{dx}dx,\quad \frac{du}{dy}dy,$$

qui sont les premiers termes des développemens de ces différences, doivent être nommées *différentielles partielles*, tandis que $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$ est la *différentielle totale*, et $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ resteront toujours les *coefficiens différentiels* du premier ordre de la fonction proposée; mais il faut remarquer qu'une fonction d'une seule variable n'a dans chaque ordre qu'un coefficient différentiel, tandis qu'une fonction de deux variables a deux coefficiens différentiels pour le premier ordre, trois pour le second, quatre pour le troisième, etc.

32. Voici comment on peut trouver ces divers coefficiens, en partant des deux premiers.

On a d'abord

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy;$$

prenant ensuite la différentielle des fonctions $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, qui doivent être traitées comme des fonctions de deux variables, il vient

$$d\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dydx}dy,$$
$$d\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{d^2u}{dxdy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy;$$

et parce que la différentielle seconde n'est autre chose que la différentielle de la différentielle première, on aura

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2,$$

en regardant dx et dy comme des constantes, et en observant que les coefficiens différentiels dont les dénominateurs ne présentent que les différens arrangemens d'un même produit en dx et dy, sont identiques.

Si on différentie les coefficiens qui se trouvent dans le résultat précédent, il viendra

$$d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \frac{d^3u}{dx^3}dx + \frac{d^3u}{dydx^2}dy,$$
$$d\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = \frac{d^3u}{dx^2dy}dx + \frac{d^3u}{dydxdy}dy,$$
$$d\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \frac{d^3u}{dxdy^2}dx + \frac{d^3u}{dy^3}dy,$$

et par conséquent

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + \frac{3d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{3d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3.$$

On continuera facilement cette formation, et on remarquera sans doute l'analogie qui règne entre les résultats auxquels nous sommes parvenus, et les développemens des puissances du binome. Pour s'assurer qu'elle a lieu à quelqu'ordre qu'on pousse la différentiation, il suffit de chercher la loi qui règne entre deux différentielles consécutives.

Supposons donc qu'on ait.

$$d^nu = \frac{d^nu}{dx^n}dx^n + A\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + B\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + C\frac{d^nu}{dx^{n-3}dy^3}dx^{n-3}dy^3 + \text{etc.},$$

A, B, C, etc. étant des coefficiens numériques indépendans de x et de y; si on différentie chacun des termes du second membre de cette équation par rapport à x et par rapport à y successivement, qu'on réunisse ensuite les résultats semblables, on trouvera

$$d^{n+1}u = \left\{\begin{aligned}&\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}dx^{n+1} + (A+1)\frac{d^{n+1}u}{dx^ndy}dx^ndy + (B+A)\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2}dx^{n-1}dy^2\\ &+ (C+B)\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-2}dy^3}dx^{n-2}dy^3\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

Soit maintenant

$$(x+y)^n = x^n + A'x^{n-1}y + B'x^{n-2}y^2 + C'x^{n-3}y^3 + \text{etc.};$$

on aura

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) = x^{n+1} + (A'+1)x^ny + (B'+A')x^{n-1}y^2 + (C'+B')x^{n-2}y^3 + \text{etc.};$$

d'où on voit que dans le passage de n à $n+1$, les coefficiens du développement de $(x+y)^n$ éprouvent les mêmes changemens que ceux de d^nu; et comme les premiers sont respectivement égaux aux seconds, lorsque $n=1$, cette égalité doit encore avoir lieu pour toute autre valeur entière de n: on peut donc écrire en général

$$d^nu = \frac{d^nu}{dx^n}dx^n + \frac{n}{1}\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + \text{etc.}$$

Il suit de là qu'on formera la différentielle d^nu en développant le binome $(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^n$, et en multipliant les différens termes du résultat par les coefficiens différentiels analogues, ensorte que celui qui est affecté de $\mathrm{d}x^{n-m}\mathrm{d}y^m$ ait pour multiplicateur $\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^{n-m}\mathrm{d}y^m}$.

33. Le développement de $\mathrm{f}(x+h, y+k)$ peut aussi se déduire de celui des différentes puissances du binome; car en réduisant au même dénominateur les termes dans lesquels les exposans de h et de k font une même somme, il prendra la forme suivante:

$$\begin{aligned}
&u\\
&+\frac{1}{1}\left\{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}k\right\}\\
&+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}h^2+2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}hk+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}k^2\right\}\\
&+\frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}h^3+3\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}h^2k+3\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}hk^2+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}k^3\right\}\\
&+\frac{1}{1.2.3.4}\left\{\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}h^4+4\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^3\mathrm{d}y}h^3k+6\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y^2}h^2k^2+4\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^3}hk^3+\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}y^4}k^4\right\}\\
&+\text{etc.};
\end{aligned}$$

et alors on voit évidemment qu'il se déduit de la suite

$$u+\frac{1}{1}(h+k)+\frac{1}{1.2}(h+k)^2+\frac{1}{1.2.3}(h+k)^3+\frac{1}{1.2.3.4}(h+k)^4+\text{etc.},$$

comme les différentielles $\mathrm{d}u$, d^2u, d^3u, etc. se déduisent des puissances $(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$, $(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2$, $(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^3$, etc.

Nous ne nous bornerons pas à l'induction qu'on peut tirer de la comparaison des premiers termes des formules précédentes, et il ne nous sera pas difficile de prouver que l'analogie que nous avons fait remarquer a lieu dans toute l'étendue de ces formules.

Considérons le terme général de $\mathrm{f}(x+h, y+k)$; il est évident qu'il doit dériver de celui de $\mathrm{f}(x+h, y)$ en y substituant $y+k$ au lieu de y; mais à cause de

$$\mathrm{f}(x+h, y)=u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

ce dernier sera $\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}x^m}\frac{h^m}{1.2\ldots.m}$; faisant dans la fonction $\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}x^m}$, le changement indiqué par rapport à y, on aura pour résultat une suite de termes

$$\frac{d^m u}{dx^m} + \frac{d^{m+1} u}{dx^m dy}\frac{k}{1} + \frac{d^{m+2} u}{dx^m dy^2}\frac{k^2}{1.2} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^n}\frac{k^n}{1.2\ldots.n};$$

et par conséquent le terme général demandé sera exprimé par

$$\frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^n} \times \frac{h^m k^n}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.n}.$$

Mais le produit $h^m k^n$ est homogène à h^{m+n} et k^{m+n}, qui auront l'un et l'autre pour coefficient numérique $\frac{1}{1.2\ldots(m+n)}$; multipliant donc par $1.2\ldots.(m+n)$, les deux termes de la fraction $\frac{1}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}$, on trouvera $\frac{1}{1.2\ldots(m+n)} \times \frac{1.2\ldots(m+n)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}$, et en prenant $\frac{1}{1.2\ldots(m+n)}$ pour facteur commun de tous les termes homogènes à $h^m k^n$, il restera pour le coefficient propre de ce terme $\frac{1.2\ldots(m+n)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}$; c'est-à-dire le même que celui dont il serait affecté dans le développement de $(h+k)^{m+n}$.

34. Si on change h en dx et k en dy, dans le développement de $f(x+h, y+k)$ que nous venons de considérer, on y retrouvera alors, en faisant abstraction du dénominateur, les différentielles de tous les ordres de la fonction u, savoir : la différentielle première dans les termes où les accroissemens ne montent qu'au premier degré, la différentielle seconde, dans ceux où ils ne montent qu'au second, la différentielle troisième, dans ceux où ils ne montent qu'au troisième, etc. : on aura donc ainsi

$$f(x+dx, y+dy) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \frac{d^4u}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

résultat semblable à celui que l'on a obtenu dans le n° 23. La série précédente convient donc également aux fonctions d'une et deux variables, pourvu qu'on prenne les différentielles d'une manière convenable dans chacun de ces cas : nous montrerons bientôt qu'elle a lieu quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction proposée ; et elle réunit à cette généralité, l'avantage d'être facile à retenir.

35. Les différentielles successives nous ont fourni les moyens d'ex-

primer le développement d'une fonction par rapport aux accroissemens des variables dont elle dépend. On peut aussi déduire de ce développement, s'il est connu d'ailleurs, les différentielles elles-mêmes. Il suffit, pour cela, de rassembler tous les termes homogènes par rapport aux accroissemens : ceux du premier degré donneront la différentielle première divisée par 1; ceux du second, la différentielle seconde divisée par 1.2; ceux du troisième, la différentielle troisième divisée par 1.2.3, et ainsi de suite : ensorte que si on avait

$$\left.\begin{array}{l} u + P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ \quad + R\mathrm{d}x^2 + S\mathrm{d}x\mathrm{d}y + T\mathrm{d}y^2 \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

on en tirerait

$$\frac{\mathrm{d}u}{1} = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{1.2} = R\mathrm{d}x^2 + S\mathrm{d}x\mathrm{d}y + T\mathrm{d}y^2,$$

etc.

On voit que cela revient à comparer le développement donné avec la série $u + \frac{\mathrm{d}u}{1} + \frac{\mathrm{d}^2u}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3u}{1.2.3} + \text{etc.}$, en regardant les termes du premier, dans lesquels la somme des exposans des accroissemens $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ est la même, comme homogènes au terme de la seconde, dans lequel l'exposant de la caractéristique d est égal à cette somme.

36. Pour ne pas tomber dans des calculs trop compliqués, nous n'appliquerons ce procédé qu'à la fonction $u = (a + bx + cx^2)^r$. En y substituant $x + \mathrm{d}x$ au lieu de x, elle deviendra

$$\{a + bx + cx^2 + b\mathrm{d}x + 2cx\mathrm{d}x + c\mathrm{d}x^2\}^r;$$

faisant pour abréger,

$$a + bx + cx^2 = p, \qquad b + 2cx = q,$$

on aura

$$(p + q\mathrm{d}x + c\mathrm{d}x^2)^r;$$

développant cette expression comme un binome dont $p + q\mathrm{d}x$ formerait le premier terme, on trouvera

$$(p + q\mathrm{d}x)^r + \frac{r}{1}(p + q\mathrm{d}x)^{r-1}c\mathrm{d}x^2 + \frac{r(r-1)}{1.2}(p + q\mathrm{d}x)^{r-2}c^2\mathrm{d}x^4$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}(p + q\mathrm{d}x)^{r-3}c^3\mathrm{d}x^6 + \text{etc.}$$

Il ne s'agit plus maintenant que de développer les diverses puissances de $p+q\mathrm{d}x$; mais pour obtenir la différentielle de l'ordre n de la fonction proposée, il suffit de rassembler les termes qui seraient affectés de $\mathrm{d}x^n$ dans le résultat final, savoir :

1°. Celui qui est multiplié par $\mathrm{d}x^n$ dans le développement de $(p+q\mathrm{d}x)^r$.
2°. Celui qui l'est par $\mathrm{d}x^{n-2}$ dans.................... $(p+q\mathrm{d}x)^{r-1}$.
3°. Celui qui l'est par $\mathrm{d}x^{n-4}$ dans.................... $(p+q\mathrm{d}x)^{r-2}$.
4°. Celui qui l'est par $\mathrm{d}x^{n-6}$ dans.................... $(p+q\mathrm{d}x)^{r-3}$.
etc.

En nommant A, B, C, D, etc. les coefficiens respectifs de ces puissances de $\mathrm{d}x$, il viendra

$$\left\{A+\frac{r}{1}Bc+\frac{r(r-1)}{1\,.\,2}Cc^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}Dc^3+\text{etc.}\right\}\mathrm{d}x^n=\frac{\mathrm{d}^nu}{1.2\ldots n};$$

on verra aisément que

$$A=\frac{r(r-1)\ldots\ldots(r-n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots n}p^{r-n}q^n,$$

$$B=\frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-n+2)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots(n-2)}p^{r-n+1}q^{n-2}=A\frac{n(n-1)}{r(r-n+1)}\frac{p}{q^2},$$

$$C=\frac{(r-2)(r-3)\ldots(r-n+3)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots(n-4)}p^{r-n+2}q^{n-4}=A\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{r(r-1)(r-n+1)(r-n+2)}\frac{p^2}{q^4},$$

$$D=\frac{(r-3)(r-4)\ldots(r-n+4)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots(n-6)}p^{r-n+3}q^{n-6}=A\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{r(r-1)(r-2)(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3)}\frac{p^3}{q^6},$$

etc.

substituant donc au lieu de A, B, C, D, etc. leur valeur, on trouvera, après les réductions,

$$\mathrm{d}^nu=r(r-1)\ldots(r-n+1)p^{r-n}q^n\mathrm{d}x^n\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{n(n-1)}{1.(r-n+1)}\dfrac{cp}{q^2}+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(r-n+1)(r-n+2)}\dfrac{c^2p^2}{q^4}\\[2ex] \quad+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3)}\dfrac{c^3p^3}{q^6}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à remettre à la place de p et de q les quantités qu'ils expriment.

57. La forme du résultat précédent n'est pas la plus simple sous laquelle puisse se présenter d^nu; car on peut obtenir pour cette diffé-

rentielle, une expression qui ne contiendrait p que comme un facteur commun à tous ses termes.

On transformera $(p+q\mathrm{d}x+c\mathrm{d}x^2)^r$ en $p^r\left(1+\frac{2q}{2p}\mathrm{d}x+\frac{4pc}{4p^2}\mathrm{d}x^2\right)^r$; et en évaluant le produit $4pc$, on trouvera $4ac+4bcx+4c^2x^2$: si on retranche de cette quantité q^2, ou $(b+2cx)^2$, il viendra $4pc-q^2=4ac-b^2$, résultat indépendant de p. Faisant donc pour abréger, $4ac-b^2=e$, on aura $4pc=e+q^2$, ce qui changera la fonction proposée en:

$$p^r\left(1+\frac{2q}{2p}\mathrm{d}x+\frac{q^2+e}{4p^2}\mathrm{d}x^2\right)^r=p^r\left\{\left(1+\frac{q}{2p}\mathrm{d}x\right)^2+\frac{e}{4p^2}\mathrm{d}x^2\right\}^r;$$

et en mettant q', e' pour $\frac{q}{2p}$, $\frac{e}{4p^2}$, elle deviendra

$$p^r\{(1+q'\mathrm{d}x)^2+e'\mathrm{d}x^2\}^r,$$

expression qui donne d'abord, par un premier développement,

$$p^r\left\{\begin{array}{r}(1+q'\mathrm{d}x)^{2r}+\frac{r}{1}(1+q'\mathrm{d}x)^{2r-2}e'\mathrm{d}x^2+\frac{r(r-1)}{1\,.\,2}(1+q'\mathrm{d}x)^{2r-4}e'^2\mathrm{d}x^4\\ +\frac{r(r-1)(r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(1+q'\mathrm{d}x)^{2r-6}e'^3\mathrm{d}x^6+\text{etc.}\end{array}\right\}:$$

prenant ensuite dans chacune des puissances de $1+q'\mathrm{d}x$, le terme qui serait multiplié par $\mathrm{d}x^n$ dans le développement final, on trouvera

$$p^r\left\{\begin{array}{r}\frac{2r(2r-1)\ldots(2r-n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots n}q'^n+\frac{r}{1}\frac{(2r-2)(2r-3)\ldots(2r-n+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(n-2)}q'^{n-2}e'\\ +\frac{r(r-1)}{1\,.\,2}\frac{(2r-4)(2r-5)\ldots(2r-n+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(n-4)}q'^{n-4}e'^2+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Mais

$$\begin{aligned}q'^n&=\frac{q^n}{2^np^n},\\ q'^{n-2}e'&=\frac{q^{n-2}}{2^{n-2}p^{n-2}}\times\frac{e}{2^2p^2}=\frac{q^{n-2}e}{2^np^n}=\frac{q^n}{2^np^n}\times\frac{e}{q^2},\\ q'^{n-4}e'^2&=\frac{q^{n-4}}{2^{n-4}p^{n-4}}\times\frac{e^2}{2^4p^4}=\frac{q^{n-4}e^2}{2^np^n}=\frac{q^n}{2^np^n}\times\frac{e^2}{q^4},\end{aligned}$$
etc.

substituant ces valeurs dans l'expression précédente, et faisant dans la forme des coefficiens des changemens analogues à ceux qu'on a développés ci-dessus (page 183), on trouvera

$$\mathrm{d}^n u = 2r(2r-1)\ldots(2r-n+1)\left(\frac{q}{2}\right)^n p^{r-n}\mathrm{d}x^n\left\{1+\frac{r}{1}\,\frac{n(n-1)}{2r(2r-1)}\,\frac{e}{q^2} + \frac{r(r-1)}{1\,.\,2}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}\,\frac{e^2}{q^4} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2r(2r-1)\ldots(2r-5)}\,\frac{e^3}{q^6} + \text{etc.}\right\}$$

Prenons pour cas particulier la fonction $u=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dont Euler s'est occupé, et sur laquelle nous aurons occasion de revenir dans la suite ; nous ferons alors

$$r=-\tfrac{1}{2},\quad a=1,\quad b=0,\quad c=-1,$$

d'où

$$p=1-x^2,\quad q=-2x,\quad e=-4,$$

et il viendra

$$\mathrm{d}^n.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1\,.\,2\ldots n x^n \mathrm{d}x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{1\,.\,2x^2}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4x^4} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6x^6}+\text{etc.}\right\}$$

Tel est le résultat auquel Euler est parvenu par la voie de l'induction, dans son *Traité du Calcul différentiel*, et que M. Lagrange a trouvé directement par le procédé que nous venons d'exposer.

Différentiation des fonctions renfermant un nombre quelconque de variables.

38. Les fonctions qui dépendent de trois ou d'un plus grand nombre de variables ne nous occuperont pas long-temps, parce qu'il est facile de généraliser ce qui a été dit dans les numéros précédens, relativement aux fonctions de deux variables. On voit, en effet, que dans le cas où u représenterait une fonction des trois variables x, y et z, on tomberait d'abord sur le développement donné n° 26, en n'ayant égard qu'aux changemens de x et de y ; pour trouver ensuite ce qu'il devient lorsque z reçoit un accroissement représenté par l, il ne s'agit plus que de traiter les quantités u, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}$, etc. comme des fonctions de z seul, et de les remplacer par les séries qu'on obtiendra en faisant usage du théorème de Taylor (n° 20). Celle qu'il faudrait substi-

tuer au coefficient différentiel $\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$, aura pour terme général

$$\frac{d^{p+n+m}u}{dz^p dy^n dx^m}\frac{l^p}{1.2\ldots p},$$

et à cause que $\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$ est affecté du produit $\frac{k^n h^m}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots m}$, on trouvera que le terme général du développement de la fonction u, dans le cas où les trois variables dont elle dépend, changent à-la-fois, est exprimé par

$$\frac{d^{p+n+m}u}{dz^p dy^n dx^m}\frac{l^p k^n h^m}{1.2\ldots p\times 1.2\ldots n\times 1.2\ldots m}.$$

En multipliant et en divisant ce résultat par le produit $1.2\ldots(p+n+m)$, on pourra lui donner la forme suivante :

$$\frac{1}{1.2\ldots(p+n+m)}\frac{d^{p+n+m}u}{dz^p dy^n dx^m}\frac{1.2\ldots(p+n+m)\,l^p k^n h^m}{1.2\ldots p\times 1.2\ldots n\times 1.2\ldots m};$$

or la dernière partie de cette expression est le terme général du développement de $(l+k+h)^{p+n+m}$ (*Introd.*, 24) : on formera donc le développement du nouvel état de u, en multipliant chaque terme de celui de

$$u+\frac{(l+k+h)}{1}+\frac{(l+k+h)^2}{1.2}+\frac{(l+k+h)^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

par le coefficient différentiel analogue aux puissances des accroissemens dont ce terme est affecté.

59. On doit voir maintenant que si u représente une fonction d'un nombre quelconque de variables x, y, z, t, etc., et qu'on y substitue $x+h$, $y+k$, $z+l$, $t+g$, etc. à la place de ces variables, elle pourra être développée dans une suite de termes représentés en général par

$$\frac{d^{m+n+p+q+\text{etc.}}u}{dx^m dy^n dz^p dt^q\text{ etc.}}\frac{h^m k^n l^p g^q\text{ etc.}}{1.2\ldots m\times 1.2\ldots n\times 1.2\ldots p\times 1.2\ldots q\times\text{etc.}},$$

ou, ce qui revient au même, par

$$\frac{d^{m+n+p+q+\text{etc.}}u}{dx^m dy^n dz^p dt^q}\frac{Mh^m k^n l^p g^q\text{ etc.}}{1.2\ldots(m+n+p+q+\text{etc.})},$$

M désignant le coefficient de $h^m k^n l^p g^q$ dans le polynome $h+k+l+g+$etc. élevé à la puissance $m+n+p+q+$etc. (*Introd.*, 24).

On passera encore du développement de la série

$$u+\frac{(h+k+l+g+\text{etc})}{1}+\frac{(h+k+l+g+\text{etc.})^2}{1\,.\,2}+\text{etc.},$$

à celui du nouvel état de la fonction proposée, en multipliant les termes du premier, par les coefficiens différentiels qui leur sont respectivement analogues.

Il est à propos de remarquer que la valeur du coefficient $\frac{d^{m+n+p+q+\text{etc.}}u}{dx^m dy^n dz^p dt^q \text{ etc.}}$ ne change point, dans quelqu'ordre que se succèdent les différentiations indiquées; l'expression $\frac{d^{n+m+p+q+\text{etc.}}u}{dy^n dx^m dz^p dt^q \text{ etc.}}$, par exemple, revient au même que la précédente. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'on peut passer de $f(x, y, z, t,$ etc.) à $f(x+h, y+k, z+l, t+g,$ etc.), en faisant varier successivement les quantités x, y, z, dans tel ordre qu'on voudra, pourvu qu'on ait égard au changement que chacune d'elles a éprouvé en particulier: ceci est assez évident, d'après l'exemple donné sur les fonctions de deux variables, n° 27.

La même chose peut encore se démontrer en partant de l'équation $\frac{d^2u}{dydx}=\frac{d^2u}{dxdy}$; car en développant la formule $\frac{d^{m+n+p+q+\text{etc.}}u}{dx^m dy^n dz^p dt^q \text{ etc.}}$, comme dans le n° 28, de manière à isoler deux différentiations consécutives, parmi celles qui sont indiquées, on pourra les permuter entre elles; et en répétant cette opération, on fera changer comme on voudra, l'ordre des différentiations dans le coefficient proposé.

40. En donnant à m, n, p, q, etc. toutes les valeurs possibles, en nombres entiers, on formera les différens termes du développement de la fonction proposée; et en se bornant à ceux où les accroissemens ne passent pas le premier degré, on aura

$$u+\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}l+\frac{du}{dt}g+\text{etc.};$$

changeant h, k, l, g, etc. en dx, dy, dz, dt, etc., et retranchant la fonction primitive u, le résultat sera la différentielle première de cette fonction : on aura donc

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \frac{du}{dt}dt + \text{etc.};$$

d'où il suit que *la différentielle d'une fonction d'un nombre quelconque de variables, est égale à la somme des différentielles partielles relatives à chacune de ces variables.*

Quant aux différentielles des ordres supérieurs, on les déduira successivement les unes des autres et de la première, et on trouvera entre elles et les puissances du polynome $dx + dy + dz + dt +$ etc., la même analogie qu'on a remarquée (32) entre les différentielles des fonctions de deux variables et les puissances du binome $dx + dy$. Il suit de cette analogie, que tous les termes seront homogènes en dx, dy, dz, dt, etc., et du degré marqué par l'exposant de leur ordre, et que si on substitue dx, dy, dz, dt, etc. à h, k, l, g, etc., on aura encore pour le développement de u, dans cette hypothèse,

$$u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ce qui fait voir que les remarques du n° 35 doivent être étendues aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Nous terminerons ici ce qui regarde les fonctions explicites, pour passer à la recherche des différentielles des fonctions *implicites*, ou données seulement par des équations.

Différentiation des équations où il n'entre que des fonctions d'une seule variable.

41. Si on a entre les deux inconnues x et y, l'équation $f(x, y) = 0$, il est évident que la valeur de l'une d'elles étant donnée, ou prise arbitrairement, celle de l'autre sera déterminée : la seconde est donc une fonction de la première, et réciproquement. Il suit de là que si x, par exemple, reçoit un accroissement représenté par h, y doit aussi éprouver un changement subordonné à celui de x. En désignant par k ce changement, qui ne peut être qu'une augmentation ou une diminution, il viendra $y \pm k$ au lieu de y; mais comme le calcul redresse toujours les fausses suppositions faites dans les signes, nous écrirons seulement $y + k$, parce que dans le cas où la valeur de y diminuerait lorsque celle de x augmente, on trouverait alors k négatif.

Cela posé, les quantités $x + h$ et $y + k$ étant de nouvelles valeurs correspondantes de x et de y, elles doivent satisfaire aussi à l'équation proposée, c'est-à-dire qu'on doit avoir encore $f(x+h, y+k)=0$; mais par l'hypothèse, x et y satisfont à l'équation primitive $f(x,y)=0$: la précédente ne renferme donc réellement que deux inconnues, h et k, dont l'une sera déterminée lorsqu'on aura assigné une valeur à l'autre.

La formule du n° 33 offre le moyen de développer cette équation suivant les puissances de h et de k; et faisant, pour abréger $f(x, y)=u$, on obtient l'équation

$$\left.\begin{array}{l} u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{du}{dy}\frac{k}{1} \\ +\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+\frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\} \\ +\text{ etc.} \end{array}\right\}=0;$$

mais y étant fonction de x, son accroissement k sera représenté par une série de la forme

$$\frac{ph}{1}+\frac{qh^2}{1.2}+\frac{rh^3}{1.2.3}+\text{ etc.},$$

p, q, r désignant les coefficiens différentiels de y (20 et 21). En substituant cette valeur dans l'équation précédente, et ordonnant par rapport à h, on obtiendra un résultat de la forme

$$u+\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}p\right)h+Qh^2+Rh^3+\text{ etc.}=0,$$

dans lequel h pourra être pris arbitrairement; il faudra donc que l'on ait séparément

$$\begin{gathered} u=0, \\ \frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}p=0, \\ Q=0, \\ R=0, \\ \text{etc.} \end{gathered}$$

La première de ces équations n'est que la proposée elle-même; la seconde fait connaître p, et les autres détermineraient successivement les coefficiens différentiels des ordres supérieurs; car il est aisé de voir que celui du second ordre, q, ne commence à paraître, et au premier degré seulement, que dans l'équation $Q=0$; qu'il en est de même de r, dans l'équation $R=0$, et ainsi de suite; mais avant de nous occuper de ces dernières, nous allons faire remarquer la formation de l'équation $\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}p=0$.

Si l'on y écrit $\frac{dy}{dx}$ au lieu de p, elle devient d'abord

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=0;$$

puis en multipliant par dx

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0,$$

et sous cette forme elle se confond avec la différentielle première de la fonction u (29).

Il suit de là que *pour trouver le coefficient différentiel du premier ordre d'une fonction implicite* y, *donnée par une équation entre deux variables* x *et* y, *il faut différentier cette équation comme si les variables étaient indépendantes l'une de l'autre, égaler ensuite à zéro le résultat qu'on obtiendra et prendre la valeur de* $\frac{dy}{dx}$.

42. Au lieu de calculer immédiatement l'équation $Q=0$, j'observe que la valeur de p ne contenant que y et x, sera, en vertu de l'équation $f(x,y)=0$, une fonction implicite de x; et en la représentant toujours par p, le changement de x en $x+h$ lui fera prendre la forme $p+qh+$etc., q étant son coefficient différentiel (21); le même changement transformera y en $y+ph+$etc. Cela posé, l'équation

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}p=0, \qquad (1)$$

qui n'est autre chose qu'une fonction de x, y et p, égalée à zéro, que je représenterai par $u'=0$, deviendra, d'après la formule du n° 40,

$$\left.\begin{array}{l} u'+\frac{du'}{dx}h+\frac{du'}{dy}k+\frac{du'}{dp}l \\ +\text{ etc.}\end{array}\right\}=0,$$

lorsque les variables x, y, p prendront respectivement les accroissemens h, k et l; en substituant aux lettres k et l les séries

$$ph+\text{etc.},\qquad qh+\text{etc.},$$

on formera l'équation

$$\left.\begin{array}{l} u' + \left(\frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy}p + \frac{du'}{dp}q\right)h \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

qui, devant avoir lieu indépendamment de h, donne les équations

$$\begin{array}{l} u' = 0, \\ \frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy}p + \frac{du'}{dp}q = 0, \\ \text{etc.} \end{array} \qquad (2)$$

La première est l'équation (1), de laquelle on est parti, et la seconde conduit à la valeur de q en x, par le moyen de celles de y et de p.

En y écrivant $\frac{dy}{dx}$ au lieu de p, et $\frac{dp}{dx}$ au lieu de q, elle devient

$$\frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du'}{dp}\frac{dp}{dx} = 0,$$

puis

$$\frac{du'}{dx}dx + \frac{du'}{dy}dy + \frac{du'}{dp}dp = 0,$$

et se confond alors avec la différentielle totale de la fonction u' qui forme l'équation (1).

Ainsi *pour former l'équation qui exprime la relation entre le coefficient différentiel du premier ordre et celui du second, il faut différentier celle qui détermine le premier coefficient, en regardant ce coefficient lui-même comme une nouvelle variable, puis diviser par* dx.

L'équation (2) étant considérée comme une fonction u'' de x, y, p, q, égalée à zéro, conduira à une équation équivalente à $du'' = 0$, qui fera connaître le coefficient différentiel r de la fonction q, c'est-à-dire le coefficient différentiel du troisième ordre de la fonction proposée u.

On voit par là que *les équations qui expriment les relations des coefficiens différentiels d'une fonction implicite donnée par une équation entre deux variables, se déduisent les unes des autres, par des différentiations successives, en traitant chacun de ces coefficiens comme une nouvelle variable.*

43. Cette proposition, suffisamment prouvée par la marche du calcul, dans les cas particuliers que nous venons d'examiner, n'est que l'indication du résultat que l'on obtient en différentiant toute fonction composée d'un nombre quelconque d'autres fonctions dépendantes de la même variable. En effet, si, dans le n° 39, on suppose que les quantités y, z, t, etc. dépendent de la variable x, et que l'on substitue

aux accroissemens h, k, l, g, etc. des expressions de la forme

$$\mathrm{d}x,\quad p\mathrm{d}x + \text{etc.},\quad q\mathrm{d}x + \text{etc.},\quad r\mathrm{d}x + \text{etc.},$$

l'ensemble des termes qui ne contiendront $\mathrm{d}x$ qu'à la première puissance, se composera des termes où les accroissemens h, k, l, g, etc. ne passeront pas le premier degré et ne se multiplieront pas entre eux; on aura donc encore

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,p\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,q\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,r\mathrm{d}x + \text{etc.};$$

ou bien

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \text{etc.},$$

en remplaçant $p\mathrm{d}x$, $q\mathrm{d}x$, $r\mathrm{d}x$, etc. par les différentielles $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}t$, etc, que ces quantités représentent.

Il suit de là que *la différentielle de la fonction proposée est la somme des différentielles partielles relatives à chacune des fonctions particulières dont elle est formée, de même que si ces fonctions étaient des variables indépendantes.*

La règle du n° 9 n'est qu'un cas particulier de cet énoncé; car si on fait

$$u = xyzt \quad \text{etc.},$$

il viendra

$$\mathrm{d}u = yzt\mathrm{d}x + xzt\mathrm{d}y + xyt\mathrm{d}z + xyz\mathrm{d}t + \text{etc.}$$

44. Le coefficient différentiel du premier ordre étant représenté à l'ordinaire par $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, sa différentielle sera $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x}$, puisque $\mathrm{d}x$, tenant ici la place de l'accroissement arbitraire h, doit être regardé comme invariable. Par la même raison, la différentielle du coefficient du second ordre $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ sera $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^2}$, et ainsi des autres. Il faudra donc considérer les quantités x, y, $\mathrm{d}y$, d^2y, d^3y, etc. comme autant de variables particulières, différentier l'équation qui les contient par rapport à chacune d'elles, et prendre la somme des résultats partiels (40). Les exemples suivans achèveront d'éclaircir ces règles, et feront connaître la nature des *équations différentielles*. On appelle ainsi toute équation qui renferme des différentielles ou des coefficiens différentiels; et je nommerai *équations primitives* celles qui n'en contiennent point.

45. Soit l'équation $y^2-2mxy+x^2-a^2=0$; en différentiant le premier membre par rapport à y et par rapport à x, on trouve

$$2y\mathrm{d}y-2mx\mathrm{d}y-2my\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}x=0;$$

ou

$$(y-mx)\mathrm{d}y-(my-x)\mathrm{d}x=0,$$

en supprimant le facteur commun 2. Si on regarde y comme une fonction de x, on aura, pour l'expression de sa différentielle,

$$\mathrm{d}y=\frac{(my-x)\mathrm{d}x}{y-mx};$$

et le coefficient différentiel sera

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{my-x}{y-mx}.$$

On peut chasser y de l'un et de l'autre de ces résultats, à l'aide de l'équation proposée; car en la résolvant on a $y=mx\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}$; substituant ces valeurs dans l'expression de $\mathrm{d}y$, il viendra

$$\mathrm{d}y=\left\{\frac{-x+m^2x\pm m\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}{\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}\right\}\mathrm{d}x=m\mathrm{d}x\pm\left\{\frac{-x+m^2x}{\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}\right\}\mathrm{d}x.$$

On voit aisément que les deux valeurs de $\mathrm{d}y$ qu'on tirerait de là sont les différentielles respectives des valeurs de y contenues dans

$$y=mx\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}.$$

Si, au lieu de résoudre l'équation proposée pour en tirer la valeur de y, on avait éliminé cette variable entre les deux équations

$$y^2-2mxy+x^2-a^2=0,$$
$$(y-mx)\,\mathrm{d}y-(my-x)\,\mathrm{d}x=0,$$

on aurait eu d'abord, en vertu de la seconde,

$$y=\frac{x(m\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}y-m\mathrm{d}x};$$

substituant dans la première, il serait venu, après les réductions,

$$(x^2-a^2-m^2x^2)\mathrm{d}y^2-(2mx^2-2ma^2-2m^3x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(x^2-m^2x^2-a^2m^2)\,\mathrm{d}x^2=0.$$

Cette dernière équation étant résolue par rapport à dy, donnerait les valeurs trouvées ci-dessus. On en pourrait tirer aussi immédiatement le coefficient différentiel, il suffirait pour cela de la diviser par dx^2; on aurait alors

$$(x^2-a^2-m^2x^2)\frac{dy^2}{dx^2}-(2mx^2-2ma^2-2m^3x^2)\frac{dy}{dx}+x^2-m^2x^2-a^2m^2=0:$$

en dégageant la seconde puissance du coefficient différentiel, exprimée par $\frac{dy^2}{dx^2}$, il viendra

$$\frac{dy^2}{dx^2}-2m\frac{dy}{dx}+\frac{x^2-m^2x^2-a^2m^2}{x^2-a^2-m^2x^2}=0.$$

46. Il est facile d'appliquer ce qui précède à des exemples plus compliqués, ou dans lesquels les variables monteraient à un degré plus élevé. Supposons qu'on ait $y^3-3axy+x^3=0$; la différentiation donnera

$$3y^2dy-3axdy-3aydx+3x^2dx=0,$$

et par conséquent $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

La fonction y, dans cet exemple, étant donnée par une équation du troisième degré, doit avoir trois valeurs; et en les substituant successivement dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$, on obtiendra un pareil nombre de valeurs pour le coefficient différentiel. On voit en général que ce coefficient aura toujours un nombre de valeurs égal à celui dont la fonction y est susceptible dans l'équation proposée : il en sera de même à l'égard de la différentielle.

Si on éliminait y entre les deux équations

$$y^3-3axy+x^3=0,$$
$$y^2dy-axdy-aydx+x^2dx=0,$$

on aurait pour résultat une équation du troisième degré par rapport à dy, qui renfermerait les trois valeurs dont cette différentielle est susceptible.

47. Ayant trouvé l'expression de dy ou celle de $\frac{dy}{dx}$, on parviendra,

en différentiant de nouveau, à celles de d^2y et de $\frac{d^2y}{dx^2}$. Nous nous servirons encore de l'équation $y^3 - 3axy + x^3 = 0 \ldots (u)$ pour faire entendre ce que nous avons à dire sur ce sujet.

La différentielle première de cette équation étant, comme on l'a vu plus haut,

$$y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \ldots (du),$$

pour passer à la différentielle seconde, il faut, d'après la règle établie n° 42, différentier par rapport à dy, à y et à x. En opérant ainsi, on aura

$$y^2d^2y + 2ydy^2 - axd^2y - adydx - adxdy + 2xdx^2 = 0,$$

et en réduisant il viendra

$$(y^2 - ax)d^2y + 2ydy^2 - 2adxdy + 2xdx^2 = 0 \ldots (d^2u).$$

Telle est la différentielle seconde de l'équation proposée : si on la combine avec la différentielle première, on pourra éliminer dy, et le résultat donnera l'expression de d^2y en x, dx et y. On chassera, si on veut, la fonction y, au moyen de l'équation proposée.

En divisant l'équation (d^2u) par dx^2, elle prend la forme

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

et ne renferme plus que les coefficiens différentiels $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{dy}{dx}$. Mettant au lieu de $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, tirée de (du), il viendra

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right)^2 - 2a\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right) + 2x = 0,$$

et en réduisant au même dénominateur,

$$(y^2 - ax)^3\frac{d^2y}{dx^2} + 2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y + 2a^3xy = 0;$$

mais la quantité $2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y$, n'est autre chose que $2xy(y^3 - 3axy + x^3)$: elle est donc nulle en vertu de l'équation proposée, et par conséquent on a $(y^2 - ax)^3\frac{d^2y}{dx^2} + 2a^3xy = 0$, d'où $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}$.

En différentiant (d^2u) par rapport à d^2y, dy, y et x, on formera la différentielle troisième (d^3u), et on en tirera la valeur de d^3y, lorsqu'on aura éliminé d^2y et dy, à l'aide des équations (du) et (d^2u); divisant le résultat par dx^3, on aura l'expression du coefficient $\frac{d^3y}{dx^3}$. En continuant ainsi on parviendra aux différentielles ultérieures.

48. Quelle que soit l'équation $u=0$, sa différentielle première sera

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0,$$

et par conséquent de la forme

$$Mdx+Ndy=0;$$

sa différentielle seconde, prise par rapport à x, y et dy, et en observant que $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ ne contiennent point dy, sera

$$\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+\frac{2d^2u}{dxdy}dxdy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2+\frac{du}{dy}d^2y=0;$$

ou de la forme

$$Pdx^2+Qdxdy+Rdy^2+Nd^2y=0;$$

la différentielle troisième, prise en différentiant par rapport à x, y, dy et d^2y, sera

$$\frac{d^3u}{dx^3}dx^3+\frac{3d^3u}{dx^2dy}dx^2dy+\frac{3d^3u}{dxdy^2}dxdy^2+\frac{d^3u}{dy^3}dy^3\left.\begin{matrix}+\frac{3d^2u}{dxdy}dx\\+\frac{3d^2u}{dy^2}dy\end{matrix}\right|d^2y+\frac{du}{dy}d^3y=0,$$

ou de la forme

$$Sdx^3+Tdx^2dy+Vdxdy^2+Wdy^3\left.\begin{matrix}+Xdx\\+Ydy\end{matrix}\right|d^2y+Nd^3y=0,$$

et ainsi de suite.

Toutes ces équations sont homogènes à l'égard des différentielles de y et des puissances de dx, en comparant dy à dx, d^2y à dx^2, d^3y à dx^3, etc.; par conséquent si on les divise respectivement par dx, dx^2, dx^3, etc., on aura les relations qui existent entre les coefficiens différentiels, et il viendra alors

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} + N\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

$$S + T\frac{dy}{dx} + V\frac{dy^2}{dx^2} + W\frac{dy^3}{dx^3} + \left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + N\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

etc.

49. La remarque que nous avons faite (8) sur les constantes qui disparaissent par la différentiation des fonctions, s'applique également aux équations. Si on avait, par exemple, $y^2 = ax + b$, la différentielle $2y\mathrm{d}y = a\mathrm{d}x$ étant indépendante de b, appartiendrait à chacune des équations particulières qui résultent de la proposée, en donnant à b toutes les valeurs possibles.

Mais on peut aussi parvenir, dans le cas actuel, à une équation indépendante de a, quoique la différentiation n'ait pas fait disparaître cette constante; il suffit pour cela d'éliminer a entre les deux équations

$$y^2 = ax + b, \qquad 2y\mathrm{d}y = a\mathrm{d}x,$$

et on trouvera

$$y^2\mathrm{d}x = 2xy\mathrm{d}y + b\mathrm{d}x.$$

Quoique cette dernière équation ne soit pas la différentielle immédiate de la proposée, elle en dérive cependant de manière qu'étant divisée par $\mathrm{d}x$, elle exprime la relation qui doit exister entre la variable x, la fonction y et le coefficient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, quel que soit a.

Si la constante qu'on élimine n'est pas au premier degré dans l'équation proposée, le résultat qu'on obtiendra renfermera des puissances de $\mathrm{d}y$ et de $\mathrm{d}x$ supérieures à la première. Prenons pour exemple $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$; en différentiant on trouvera

$$y\mathrm{d}y - a\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{d'où} \qquad a = \frac{y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y};$$

et substituant dans la proposée, il viendra, après avoir ordonné par rapport à $\mathrm{d}y$ et divisé par $\mathrm{d}x^2$,

$$(x^2 - 2y^2)\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} - 4xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x^2 = 0:$$

telle est la relation qui doit exister entre la variable x, la fonction y et son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, indépendamment d'aucune valeur particulière de la constante a.

En résolvant l'équation $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$, par rapport à a, on en aurait tiré

$$a = -y \pm \sqrt{2y^2 + x^2},$$

et a étant alors dégagé des variables x et y, la différentiation seule l'aurait fait disparaître; on aurait eu

$$-dy \pm \frac{2ydy + xdx}{\sqrt{2y^2 + x^2}} = 0.$$

En faisant évanouir le radical, on s'assurera que cette équation est la même que celle que nous avons obtenue par l'élimination.

50. On peut faire disparaître autant de constantes qu'on voudra, en différentiant un nombre de fois égal à celui de ces constantes. Soit $y^2 = m(a^2 - x^2)$; on aura d'abord $ydy = -mxdx$; différentiant de nouveau, on trouvera

$$yd^2y + dy^2 + mdx^2 = 0;$$

substituant pour m sa valeur $\frac{-ydy}{xdx}$, tirée de la différentielle première; et divisant par dx^2, il viendra

$$y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy^2}{dx^2} - xy\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

résultat indépendant des constantes m et a.

Dans les différentiations successives, il arrive quelquefois que la variable qu'on regarde comme indépendante, disparaît entièrement de l'équation proposée. En effet, si cette équation était de la forme $Y = ax + b$, Y désignant une fonction de y seul, on aurait $dY = adx$, et à cause que dx est invariable, la différentielle seconde se réduirait à $d^2Y = 0$. L'équation $Y = ax^2 + bx + c$ étant différentiée trois fois de suite, donnera

$$\begin{aligned} dY &= 2axdx + bdx, \\ d^2Y &= 2adx^2, \\ d^3Y &= 0. \end{aligned}$$

On pousserait ces considérations aussi loin qu'on voudrait, sur des équations de la forme précédente.

51. On peut aussi, par des différentiations répétées, faire disparaître les fonctions irrationnelles et les fonctions transcendantes qui seraient contenues dans une équation.

Soit d'abord l'équation $y = (a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}$; si on en prend la différentielle, on trouvera

$$dy = \frac{m}{n}(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}-1} . 2x dx = \frac{m(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}}{n(a^2 + x^2)} . 2x dx;$$

et en mettant pour $(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}$ sa valeur y, il viendra

$$dy = \frac{2myx dx}{n(a^2 + x^2)},$$

résultat dans lequel l'irrationnelle $(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}$ ne se trouve plus.

Si l'équation proposée renfermait un plus grand nombre de fonctions irrationnelles, on les ferait disparaître également en différentiant plusieurs fois de suite. Ce procédé est fondé sur ce que les irrationnelles contenues dans une équation se retrouvent dans ses différentielles, mais à des puissances moindres d'une, de deux ou de trois unités, etc., et que par conséquent on peut les traiter comme des inconnues particulières et les éliminer, lorsqu'on a obtenu un nombre d'équations suffisant. Si on avait, par exemple, $P^m + aQ^n = b$, P et Q étant des fonctions irrationnelles de x et de y, on trouverait, en différentiant deux fois,

$$mP^{m-1}dP + naQ^{n-1}dQ = 0;$$
$$m(m-1)P^{m-2}dP^2 + mP^{m-1}d^2P + n(n-1)aQ^{n-2}dQ^2 + naQ^{n-1}d^2Q = 0 \text{ (*)};$$

en mettant ces équations sous la forme suivante:

$$mP^m \frac{dP}{P} + naQ^n \frac{dQ}{Q} = 0,$$
$$m(m-1)P^m \frac{dP^2}{P^2} + mP^m \frac{d^2P}{P} + n(n-1)aQ^n \frac{dQ^2}{Q^2} + naQ^n \frac{d^2Q}{Q} = 0,$$

(*) Il est évident qu'en général dP et dQ doivent contenir x, y, dx et dy; il faut donc les traiter comme de nouvelles fonctions de ces quantités, et par conséquent les différentier à leur tour.

et en les combinant avec la proposée, il sera facile d'éliminer P^m et Q^n.

52. A l'égard des fonctions transcendantes, il y en a que la différentiation fait disparaître immédiatement; l'équation $\mathrm{l}P - \mathrm{l}Q + R = 0$, par exemple, étant différentiée, donne sur-le-champ, $\frac{dP}{P} - \frac{dQ}{Q} + dR = 0$ (13), et se trouve par conséquent délivrée de transcendantes.

En général chaque différentiation fera disparaître une transcendante, soit immédiatement, soit en ayant recours à l'élimination.

Supposons qu'on ait $R \sin P + e^Q \cos P = a^2$; en différentiant il viendra (14, 15)

$$RdP \cos P + dR \sin P + e^Q dQ \cos P - e^Q dP \sin P = 0;$$

mais on pourra chasser $\cos P$ au moyen de sa valeur $\sqrt{1 - \sin P^2}$, et on éliminera ensuite $\sin P$. Le résultat qu'on obtiendra ne renfermera plus que la transcendante e^Q; et en différentiant de nouveau, on fera disparaître celle-ci comme l'autre.

53. On a vu par ce qui précède, comment une équation différentielle pouvait répondre à une infinité d'équations primitives; l'inverse a lieu également, et il existe aussi une infinité d'équations différentielles à chacune desquelles la même équation primitive peut satisfaire. En effet, si on conçoit que l'équation quelconque $u = 0$ soit résolue par rapport à y, et que la valeur de y et la différentielle de cette valeur soient substituées dans $du = 0$, cette dernière équation deviendra identique; le produit Mdu sera donc égal à zéro, quel que soit le facteur M, et on aura la nouvelle équation $Mdu = 0$. On voit encore par là que l'équation $Mdu + M'u = 0$ ne serait qu'une conséquence de la proposée; qu'on aurait de même $Md^2u + M'du + M''u = 0$, et ainsi de suite, quels que fussent les facteurs M, M', M'', etc. J'observerai cependant que dans le Calcul différentiel on ne rencontre jamais que des expressions homogènes par rapport à dx, dy, d^2x, d^2y, etc. (48), d'où il suit que si le facteur M ne contient point de différentielles, le facteur M' sera nécessairement du premier ordre, le facteur M'' du second, etc.

54. Lorsque l'on a un nombre d'équations moindre d'une unité que

celui des variables qu'elles contiennent, il y a toujours une de ces variables que l'on peut regarder comme indépendante et dont toutes les autres sont des fonctions implicites. Soient

$$u = 0, \quad v = 0,$$

deux équations quelconques entre trois variables t, x, y; on pourra, par leur moyen, déterminer la valeur de deux quelconques de ces variables, en prenant arbitrairement celle de la troisième. Si on suppose donc que la variable indépendante t devienne $t+g$, les deux autres x, y éprouveront des changemens tels qu'en les désignant par h et par k, il y aura entre les trois quantités $t+g$, $x+h$, $y+k$, les mêmes relations qu'entre t, x, y. Substituant $t+g$, $x+h$, $y+k$ dans les fonctions u et v, et développant, on aura les équations

$$\left.\begin{array}{l} u + \frac{du}{dt}g + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0, \quad \left.\begin{array}{l} v + \frac{dv}{dt}g + \frac{dv}{dx}h + \frac{dv}{dy}k \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

dans lesquelles on pourra supprimer les quantités u et v, déjà nulles en vertu des valeurs primitives t, x, y; mais lorsqu'on regarde x et y comme des fonctions de t, on a

$$h = \frac{dx}{dt}\frac{g}{1} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{g^2}{1.2} + \text{etc.},$$
$$k = \frac{dy}{dt}\frac{g}{1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{g^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Mettant donc ces valeurs dans les équations ci-dessus, puis ordonnant le résultat par rapport aux puissances de l'accroissement arbitraire g; et raisonnant comme dans le n° 42, on formera les équations qui doivent déterminer les fonctions

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ etc.} \quad \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \text{ etc.}$$

Si l'on se borne aux termes affectés de la première puissance de g, il viendra seulement

$$\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = 0,$$

équations qui ne sont autre chose que les différentielles des fonctions u et v, égalées à zéro et divisées par dt.

Pour parvenir aux équations d'où dépendent les coefficiens différentiels des ordres supérieurs au premier, il suffira, d'après des considérations analogues à celles des nos 43 et 44, de différentier d'abord les équations précédentes, en y regardant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ comme de nouvelles fonctions implicites de t, ce qui introduira les coefficiens $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, puis de différentier les nouvelles équations, en y faisant varier simultanément les coefficiens différentiels du premier et du second ordre, et ainsi de suite.

Il est aisé de généraliser ce qui vient d'être dit, et d'en conclure pour un nombre quelconque m d'équations,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \text{ etc.},$$

renfermant $m+1$ variables t, x, y, z, etc., que les coefficiens différentiels du premier ordre des variables x, y, z, etc., seront déterminés par les différentielles premières des fonctions u, v, w, etc., égalées à zéro et divisées par dt; que les coefficiens différentiels du second ordre le seront par les différentielles secondes des mêmes fonctions, prises en faisant varier dans la différentielle première, les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, etc., et ainsi de suite.

55. Donnons maintenant un exemple : soient les équations

$$\begin{aligned} y^3 + 3atx &= bc^2, \\ x^3 + 3cty &= a^2b; \end{aligned}$$

en les différentiant on obtiendra

$$\left.\begin{aligned} y^2dy + atdx + axdt &= 0, \\ x^2dx + ctdy + cydt &= 0; \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} y^2\frac{dy}{dt} + at\frac{dx}{dt} + ax &= 0, \\ x^2\frac{dx}{dt} + ct\frac{dy}{dt} + cy &= 0; \end{aligned}\right.$$

ces dernières donneront les valeurs de $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dx}{dt}$, en t, x et y; on pourra ensuite chasser x et y au moyen des proposées.

Différentiant de nouveau, pour obtenir les relations entre les coefficiens du second ordre, il viendra, en regardant dt comme constant, puisque t est la variable indépendante,

$$\begin{aligned} y^2d^2y + 2ydy^2 + atd^2x + 2adtdx &= 0, \\ x^2d^2x + 2xdx^2 + ctd^2y + 2cdtdy &= 0, \end{aligned}$$

et en divisant par dt^2, on aura

$$y^2\frac{d^2y}{dt^2}+2y\frac{dy^2}{dt^2}+at\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}=0,$$
$$x^2\frac{d^2x}{dt^2}+2x\frac{dx^2}{dt^2}+ct\frac{d^2y}{dt^2}+2c\frac{dy}{dt}=0,$$

équations qui serviront à déterminer $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$.

56. Le genre d'équations différentielles qui nous occupe maintenant est susceptible de remarques analogues à celles des n^os 49—54. On voit d'abord qu'en combinant les équations $u=0$, $v=0$, avec leurs différentielles $du=0$, $dv=0$, on pourra éliminer trois des quantités qu'elles renferment, soit constantes, soit variables. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on aurait pu chasser les constantes a, b, c, et obtenir une relation unique entre t, x, y et les coefficiens différentiels $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, indépendamment des quantités éliminées.

En joignant aux équations précédentes les deux différentielles secondes des proposées, on aura six équations entre lesquelles on pourra par conséquent éliminer cinq des quantités qu'elles renferment, et ainsi de suite.

57. Dans une équation à deux variables x et y, on peut prendre celle qu'on voudra pour fonction de l'autre. Jusqu'ici nous avons considéré y comme une fonction de x; renversons maintenant la question et regardons x comme une fonction de y. La différentielle de l'équation $u=0$ étant représentée de même que dans le n° 48, par $Mdx+Ndy=0$, on en tirera toujours, en divisant par dy, $M\frac{dx}{dy}+N=0$; mais alors $\frac{dx}{dy}$ exprimera le coefficient différentiel de la fonction x, et sa valeur sera l'inverse de celle du coefficient $\frac{dy}{dx}$, relatif à l'hypothèse de y fonction de x. Il suit de là que l'on peut prendre indifféremment la première ou la seconde des deux quantités dx et dy, pour un accroissement indépendant, et l'autre pour une différentielle : par la première hypothèse on considère y comme fonction de x, et par la seconde, x comme fonction de y. Du changement de variable indépendante dans les équations.

58. Ceci nous offre le moyen de tirer des équations différentielles

obtenues dans le n° 15, entre l'arc de cercle et les diverses lignes trigonométriques, l'expression de la différentielle de cet arc, en fonction de chaque ligne trigonométrique et de son accroissement.

L'équation

$$\mathrm{d}.\sin x = \mathrm{d}x \cos x$$

donne d'abord

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}.\sin x}{\cos x} = \frac{\mathrm{d}.\sin x}{\sqrt{1-\sin x^2}};$$

et si l'on y fait $\sin x = y$, il en résultera

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

L'équation

$$\mathrm{d}.\cos x = -\mathrm{d}x \sin x$$

conduirait de même à

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}},$$

en faisant $\cos x = y$; et on la transformerait par le sinus verse, en y posant $y = 1 - z$, puisque sin. ver. $x = 1 - \cos x$; il viendrait alors

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2z - z^2}}.$$

Par l'équation $\mathrm{d}.\mathrm{tang}\, x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos x^2}$, on a

$$\mathrm{d}x = \cos x^2 \mathrm{d}.\mathrm{tang}\, x;$$

et en observant que

$$\cos x = \frac{1}{\mathrm{séc}\, x} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tang}\, x^2}},$$

on en déduit

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}.\mathrm{tang}\, x}{1+\mathrm{tang}\, x^2} = \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2},$$

si, pour abréger, on fait $\mathrm{tang}\, x = z$.

Avec ces formules on peut différentier une fonction quelconque d'un arc de cercle et de ses lignes trigonométriques.

Soit, pour exemple,

$$x = \mathrm{arc}(\sin = 2u\sqrt{1-u^2}),$$

expression par laquelle on indique l'arc de cercle dont le sinus est $2u\sqrt{1-u^2}$, u étant la variable indépendante. On fera d'abord

$$2u\sqrt{1-u^2} = y, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}y = \frac{2\mathrm{d}u(1-2u^2)}{\sqrt{1-u^2}};$$

et comme $dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, il viendra

$$dx = \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

59. Si l'équation $Mdx + Ndy = 0$ est également la différentielle de la proposée, soit qu'on regarde y comme fonction de x, ou x comme fonction de y, parce que pour y arriver on a opéré de la même manière par rapport à chacune de ces quantités, il n'en est pas de même à l'égard de la différentielle seconde. Lorsqu'on regarde x comme dépendant de y, alors il faut différentier $Mdx + Ndy = 0$ par rapport à y, x et dx, et on peut traiter dy comme un accroissement arbitraire et constant, puisqu'il appartient à une variable indépendante. En opérant ainsi, on trouve un résultat de la forme

$$Md^2x + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0,$$

ou, en divisant par dy^2,

$$M\frac{d^2x}{dy^2} + P\frac{dx^2}{dy^2} + Q\frac{dx}{dy} + R = 0,$$

équation qui exprime la relation des coefficiens différentiels $\frac{d^2x}{dy^2}$ et $\frac{dx}{dy}$ de la fonction x. Si on la compare avec sa correspondante dans le n° 48, on verra que les trois derniers termes de l'une sont les mêmes que les trois premiers de l'autre, et que la différence ne consiste que dans les termes Md^2x et Nd^2y, dont le premier est particulier à l'hypothèse de x fonction de y, et le second à celle de y fonction de x. Les quantités M et N ne se trouvent à-la-fois que dans la différentielle première; et par conséquent si on ne connaissait pas cette différentielle, et qu'on n'eût sous les yeux qu'une des différentielles secondes, celle qui est relative à y, par exemple, il semble qu'on ne pourrait pas en déduire l'autre, puisque rien n'indiquerait le terme qui devrait remplacer Nd^2y; mais on levera cette difficulté en faisant usage de la relation qui existe entre les coefficiens différentiels pris dans l'une des hypothèses, et leurs correspondans dans l'autre.

Nommant p, q, r, etc. les coefficiens différentiels de la fonction y, et p', q', r', etc. ceux de la fonction x, nous aurons (4 et 21)

$$\left.\begin{array}{l} dy = p dx \\ dp = q dx \\ dq = r dx \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} dx = p' dy \\ dp' = q' dy \\ dq' = r' dy \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Déjà pour le premier ordre nous avons trouvé

$$\left.\begin{array}{l} M + N \frac{dy}{dx} = 0 \\ M \frac{dx}{dy} + N = 0 \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} M + Np = 0 \\ Mp' + N = 0. \end{array}\right.$$

Il suit de là que

$$p' = \frac{1}{p}, \text{ ou } p'p = 1.$$

Mais puisque p est implicitement une fonction de x, p' sera aussi une fonction de x, on aura donc $dp' = d.\frac{1}{p} = -\frac{dp}{p^2}$; mettant pour dp' et dp leurs valeurs, prises dans les équations précédentes, il viendra

$$q' dy = -\frac{q dx}{p^2},$$

d'où on tirera

$$q' = -\frac{q}{p^2}\frac{dx}{dy} = -\frac{q}{p^3},$$

à cause de $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$: on aura donc l'expression de q', lorsque celles de p et de q seront connues ; et il en résultera aussi $q = -q'p^3$. Substituant cette valeur dans la 2^e équation de la pag. 197, qui revient à

$$P + Qp + Rp^2 + Nq = 0,$$

on en déduira

$$P + Qp + Rp^2 - Nq'p^3 = 0,$$

remettant $\frac{dy}{dx}$ au lieu de p, $\frac{d^2x}{dy^2}$ au lieu de q', on trouvera

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} - N\frac{dy^3}{dx^3}\frac{d^2x}{dy^2} = 0;$$

et en multipliant par dx^2, on obtiendra

$$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 - N\frac{dy}{dx}d^2x = 0:$$

cette équation est équivalente à

$$Md^2x + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0,$$

comme on peut s'en assurer en chassant Ndy à l'aide de $Mdx+Ndy=0$.

L'équation $q'=-\frac{q}{p^3}$, nous donnera $dq'=-d.\frac{q}{p^3}$, puisque p, q et par conséquent p', sont des fonctions implicites de x. En effectuant la différentiation indiquée dans le second membre, et mettant au lieu de dq', dp, dq, leurs valeurs $r'dy$, qdx, rdx, on trouvera

$$r'=-\frac{pr-3q^2}{p^5}.$$

Cette marche est facile à continuer pour les ordres supérieurs, et on verra peut-être avec plaisir comment on peut arriver aux mêmes résultats, en partant des développemens dont les coefficiens p, q, etc., p', q', etc. tirent leur origine.

60. Il suit de la liaison qui existe entre les valeurs de x et de y, que lorsque x prend un accroissement h, y éprouve un changement k représenté par la série $\frac{ph}{1}+\frac{qh^2}{1.2}+\frac{rh^3}{1.2.3}+$ etc.; par la même raison y devenant $y+k$, x éprouvera un changement représenté par

$$\frac{p'k}{1}+\frac{q'k^2}{1.2}+\frac{r'k^3}{1.2.3}+\text{etc.};$$

on aura donc

$$k=\frac{ph}{1}+\frac{qh^2}{1.2}+\frac{rh^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$
$$h=\frac{p'k}{1}+\frac{q'k^2}{1.2}+\frac{r'k^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

selon qu'on voudra développer par rapport à k ou par rapport à h; mais en faisant usage de la méthode du retour des suites (*Introd.* 58), on déduira de la première série une valeur de h ordonnée suivant les puissances de k, et il viendra

$$h=\frac{1}{p}k-\frac{q}{p^3}\frac{k^2}{1.2}+\frac{3q^2-pr}{p^5}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Comparant ce résultat avec la seconde série, on aura

$$p'=\frac{1}{p},$$
$$q'=-\frac{q}{p^3},$$
$$r'=\frac{3q^2-pr}{p^5},$$
etc.

Au moyen de ces valeurs on trouvera tous les coefficiens différentiels relatifs à x, lorsque l'on connaîtra ceux de y; et on pourra transformer une équation différentielle formée en regardant y comme une fonction de x, en une autre où x soit regardé comme une fonction de y, et réciproquement.

61. Les calculs précédens peuvent aussi s'effectuer immédiatement avec la notation différentielle, en partant de l'équation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

et en la différentiant avec l'attention de regarder dans le premier membre dy comme constant, et dx dans le second. On trouve ainsi

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{dy}\, d\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = -\frac{dx d^2y}{dy^3},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{1}{dy}\, d\left(\frac{dx d^2y}{dy^3}\right) = \frac{3dx d^2y^2 - dx dy d^3y}{dy^5} \;(*),$$

etc.

et si on tire de là les valeurs de d^2y, d^3y, etc., on aura les expressions qu'il faut substituer à la place de ces différentielles, dans une équation, ou dans une quantité où y est regardé comme une fonction de x, pour la changer en une autre où x soit regardé comme une fonction de y.

Il viendra

$$d^2y = -\frac{dy\, d^2x}{dx},$$

$$d^3y = -\frac{dy^2 d^3x - 3dx d^2y^2}{dx dy} = \frac{3dy d^2x^2 - dx dy d^3x}{dx^2},$$

etc.

62. Les deux variables x, y, rendues dépendantes de t par les équations

---

(*) Si on a suivi l'esprit de la notation convenue dans le n° 20, on n'aura pas de peine à comprendre que d^2y^2 est la même chose que $(d^2y)^2$, et qu'en général d^ny^m indique $(d^ny)^m$.

$u=0$, $v=0$ (54), sont liées implicitement entre elles, puisque si l'on éliminait t entre ces équations, il en résulterait une relation entre x et y seulement; on peut donc regarder l'une de ces dernières comme fonction de l'autre, et chercher en conséquence ses coefficiens différentiels. Je vais montrer comment, sans faire l'élimination indiquée, on les obtient en les exprimant par les coefficiens $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc. dans lesquels t est la variable indépendante.

Concevons d'abord que cette élimination soit effectuée, et qu'au lieu des équations proposées on en ait une entre x et y, et une autre entre x et t. Par ce moyen, on pourra regarder y comme fonction de x, x comme fonction de t; et si on désigne par p, q, etc. les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. (21), pris en regardant y comme fonction de x, il viendra, d'après le n° 11,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=p\frac{dx}{dt},\quad \frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt}=q\frac{dx}{dt},\quad \text{etc.},$$

d'où

$$p=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\qquad q=\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\quad \text{etc.};$$

or $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dx}{dt}$ étant considérés comme des fonctions de t, on aura, en différentiant la fonction qui exprime p, et divisant par dt,

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx^2}{dt^2}},\qquad \text{d'où}\qquad q=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx^3}{dt^3}}.$$

Je ferai remarquer d'abord que l'on peut supprimer dt dans les expressions de p et de q, pourvu que l'on se souvienne que les différentiations indiquées sur les lettres x et y se rapportent à la variable indépendante t; et de cette manière on trouvera seulement

$$p=\frac{dy}{dx},$$

$$q=\frac{dp}{dx}=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}.$$

Il est facile de voir qu'en opérant comme ci-dessus, on obtiendra de même

$$r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left[\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}^3y - 3\mathrm{d}x\mathrm{d}^2x\mathrm{d}^2y + 3\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x^2 - \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}x^5},$$

$$s = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left\{\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left[\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]\right\};$$

et en suivant cette loi, on exprimera pour tel ordre qu'on voudra, par les coefficiens différentiels de x et de y, pris relativement à la variable t, ceux de y, pris relativement à x, en ayant l'attention de faire varier simultanément $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x$ et toutes leurs différentielles.

63. Les coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, etc., seront exprimés immédiatement en x et y, toutes les fois que les équations proposées seront de la forme

$$F(x, y) = t, \quad F'(x, y) = t,$$

puisque leurs différentielles premières étant de la forme

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = \mathrm{d}t, \quad M'\mathrm{d}x + N'\mathrm{d}y = \mathrm{d}t,$$

où M, N, M', N' ne contiennent que x et y, donneront $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, indépendamment de t.

Si on différentie les dernières équations ci-dessus, avec l'attention d'y faire varier en même temps $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$, et de regarder $\mathrm{d}t$ comme constant, les résultats seront de la forme

$$P\mathrm{d}x^2 + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y + R\mathrm{d}y^2 + M\mathrm{d}^2x + N\mathrm{d}^2y = 0,$$
$$P'\mathrm{d}x^2 + Q'\mathrm{d}x\mathrm{d}y + R'\mathrm{d}y^2 + M'\mathrm{d}^2x + N'\mathrm{d}^2y = 0,$$

et se changeront en

$$P\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} + Q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t^2} + M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + N\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

$$P'\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} + Q'\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + R'\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t^2} + M'\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + N'\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

lorsqu'on les divisera par $\mathrm{d}t^2$; il est visible qu'alors on en tirera $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$, en fonction de x, y, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$; et par conséquent en fonction de x et de y seuls, ce qui donnera pareillement des fonctions de x et de y pour les coefficiens différentiels p, q, r, etc. relatifs à x considéré comme variable indépendante.

Il est bon de remarquer que puisqu'on peut toujours chasser t de l'une des équations proposées, en la retranchant de l'autre, la forme que je leur ai donnée ci-dessus revient au fond à prendre

$$F(x, y) = 0, \qquad F'(x, y) = t.$$

64. Ceci conduit à montrer comment on peut différentier une équation quelconque à deux variables, en ne prenant point pour variable indépendante l'une d'elles, mais une fonction quelconque de toutes deux, et comment on exprime par ce moyen, tant les coefficiens différentiels relatifs à cette dernière variable, que ceux qui se rapportent à l'une des premières. Le n° précédent fournit évidemment pour cet objet la règle suivante.

Si, dans une équation $V = 0$, *entre* x *et* y, *on veut prendre pour variable indépendante une fonction quelconque* U *de* x *et de* y, *il faut considérer simultanément les équations* $V = 0$, $U = t$, *et faire varier toutes les différentielles des deux variables* x *et* y *: on chassera* dx *ou* dy, *à l'aide de l'équation* $dU = dt$, *ensuite* d^2x *ou* d^2y, *par l'équation* $d^2U = 0$, *ou, ce qui revient au même, en faisant* dU *constant ; et on poursuivra de même pour les ordres plus élevés.*

De cette manière, on ne laissera dans chaque différentielle de l'équation proposée, que les coefficiens différentiels d'une seule des fonctions x, y, pris par rapport à la nouvelle variable indépendante t, et exprimés par l'autre fonction.

Dans l'usage que l'on fait de cette transformation, on ne connaît pas toujours l'expression primitive U, mais seulement sa différentielle, ensorte qu'on n'a que l'équation $dU = dt$, qui suffit pour l'élimination des coefficiens différentiels.

Soit pour exemple

$$V = x^2 + xy + y^2 = 0, \qquad dU = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt;$$

en différentiant deux fois de suite l'équation $V = 0$, et faisant varier dx, aussi bien que dy, on obtiendra

$$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0 \qquad (1),$$

$$2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 + (2x + y)d^2x + (2y + x)d^2y = 0 \qquad (2),$$

à quoi il faudra joindre l'équation $dU = dt$ et sa différentielle première, ce qui donnera

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dt \qquad (3),$$
$$dx d^2x + dy d^2y = 0 \qquad (4).$$

La combinaison des équations (1) et (3) fournira les expressions de dx et de dy; on en tire d'abord

$$dx = -\frac{(2y+x)dy}{2x+y}, \quad dx^2 + dy^2 = dt^2,$$

d'où il résulte

$$dy = \frac{(2x+y)dt}{\sqrt{5y^2+8xy+5x^2}}; \quad dx = -\frac{(2y+x)dt}{\sqrt{5y^2+8xy+5x^2}}.$$

L'équation (4) donnant $d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx}$, change l'équation (2) en

$$2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 - (2x+y)\frac{dy\,d^2y}{dx} + (2y+x)\,d^2y = 0,$$

de laquelle on tirera

$$d^2y = \frac{2dx^3 + 2dx^2dy + 2dy^2dx}{(2x+y)\,dy - (2y+x)dx};$$

et on aura ensuite

$$d^2x = -\frac{2dx^2dy + 2dxdy^2 + 2dy^3}{(2x+y)dy - (2y+x)dx}.$$

Cela fait, si l'on substitue dans ces dernières valeurs celles de dy et de dx, qui sont de la forme $dy = ndt$, $dx = mdt$, il viendra

$$d^2y = \frac{(2m^3 + 2m^2n + 2n^2m)\,dt^2}{(2x+y)n - (2y+x)m},$$
$$d^2x = -\frac{(2m^2n + 2mn^2 + 2n^3)\,dt^2}{(2x+y)n - (2y+x)m}.$$

Ainsi les calculs précédens conduiront à exprimer, par des fonctions de x et de y, les coefficiens différentiels

$$\frac{dx}{dt}, \ \frac{dy}{dt}, \ \frac{d^2x}{dt^2}, \ \frac{d^2y}{dt^2},$$

relatifs à la variable indépendante t, donnée seulement par la relation de sa différentielle avec celles de ces mêmes fonctions.

65. Si on demandait les coefficiens différentiels de y considéré comme fonction de x, en vertu de la seule équation $V=0$, il ne serait pas nécessaire de poser $d^2x=0$ dans l'équation (2), pour la ramener à la forme des différentielles secondes, dans lesquelles on regarde une des variables comme immédiatement fonction de l'autre; il suffirait de combiner avec les équations (1) et (2) les expressions de p et de q, trouvées dans le n° 62.

On aurait en premier lieu

$$p=-\frac{2x+y}{2y+x};$$

puis l'équation

$$q=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}, \quad \text{donnant} \quad d^2y=\frac{qdx^3+dyd^2x}{dx},$$

l'équation (2), en y faisant cette substitution et rassemblant les termes multipliés par d^2x, deviendrait

$$\left.\begin{array}{l}2dx^3+2dx^2dy+2dxdy^2+(2y+x)qdx^3\\ \qquad +\{(2x+y)dx+(2y+x)dy\}d^2x\end{array}\right\}=0,$$

où le multiplicateur de d^2x s'évanouit, en vertu de l'équation (1); et divisant ensuite par dx, on trouverait

$$2dx^2+2dxdy+2dy^2+(2y+x)qdx^2=0,$$

équation qui est précisément la même que celle qu'on aurait obtenue en faisant dx constant, et en écrivant qdx^2 au lieu de d^2y.

66. Cet exemple montre qu'il n'est pas nécessaire de connaître la relation qui lie les fonctions x et y, à la variable indépendante t, pour parvenir aux coéfficiens différentiels de l'une de ces fonctions, rapportée immédiatement à l'autre; et les calculs offrent alors cette particularité remarquable, que les deux variables x et y, et leurs différentielles, y sont traitées de la même manière dans tous les ordres, ce qui rend les formules plus symétriques, ainsi qu'on le voit en comparant l'équation (2) à celles du n° 48. Quoique je ne me sois occupé ci-dessus que d'un exemple particulier, on s'assurerait par le même procédé, que la même chose a lieu à l'égard d'une équation quelconque à deux variables et dans tous les ordres.

Un avantage propre à la différentiation, où l'on fait ainsi varier les différentielles, c'est qu'elle conduit à des résultats où l'on peut établir telle hypothèse qu'on voudra sur la liaison des variables x, y, et regarder à volonté la première comme fonction de la seconde, ou celle-ci comme fonction de l'autre; seulement il faudra, pour former l'expression des coefficiens différentiels p', q', r', etc. (59) relatifs à l'hypothèse de x fonction de y, changer x en y, *et vice versâ*, dans les expressions de p, q, r, etc. du n° 62. Par ce moyen l'équation du second ordre

$$P\mathrm{d}x^2 + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y + R\mathrm{d}y^2 + M\mathrm{d}^2x + N\mathrm{d}^2y = 0,$$

par exemple, donnera q ou q', selon qu'elle sera combinée avec l'une ou l'autre des formules

$$q = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3},$$

$$q' = \frac{1}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x - \mathrm{d}x\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}y^3}.$$

67. On peut vérifier aisément que les quantités

$$q = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3}, \quad q' = \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x - \mathrm{d}x\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}y^3},$$

mises dans l'équation $q + p^3q' = 0$, obtenue dans le n° 59, la rendent identique, indépendamment des différentielles d^2y et d^2x, qui demeurent indéterminées, tant qu'on n'assigne aucune relation entre x, y et la variable indépendante t, implicitement contenue dans celles-ci. Aussi trouverait-on $\frac{0}{0}$, si l'on cherchait ce que signifient, dans cette forme de différentiation, les expressions $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, ou $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$, dont l'une marque le coefficient différentiel du second ordre de y considéré comme fonction de x, lorsque $\mathrm{d}x$ est constant, et l'autre celui de x considéré comme fonction de y, lorsque $\mathrm{d}y$ est constant.

En effet, lorsqu'on regarde x et y comme des fonctions de t, et que l'on différentie suivant cette hypothèse, les expressions

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

il vient

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} + p\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t^2} + p'\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2};$$

tirant de là les valeurs de d^2x et d^2y, et mettant q et q' pour

$\frac{dp}{dx}$ et $\frac{dp'}{dy}$, il vient

$$\left.\begin{aligned} d^2y &= \frac{q\,dx^2 + pq'\,dy^2}{1-pp'}, \\ d^2x &= \frac{q'\,dy^2 + p'q\,dx^2}{1-pp'}, \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{q+p^2q'}{1-pp'}, \\ \frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{q'+p'^2q}{1-pp'}, \end{aligned}\right.$$

expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$, en vertu des relations trouvées dans les n^{os} 59 et 60, entre p, p', q et q', desquelles il résulte

$$1-pp'=0, \qquad q+p^3q'=0, \qquad q'+p'^3q=0.$$

68. Il est visible que si l'on substitue la valeur de q du n° 66, au lieu de $\frac{d^2y}{dx^2}$, dans une équation différentielle du second ordre, où dx est supposé constant, et celle de q' au lieu de $\frac{d^2x}{dy^2}$, dans le cas où ce sera dy que l'on aura fait constant, le résultat sera équivalent à celui qu'on aurait obtenu en faisant varier à-la-fois x, y, dx, dy. L'équation

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} + N\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

par exemple, deviendra,

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} + N\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = 0.$$

On pourra ensuite établir telle dépendance qu'on voudra entre x, y et une fonction quelconque t de ces variables, et même traiter à volonté x comme fonction de y, ou y comme fonction de x; car dans le premier cas, c'est joindre à l'équation proposée l'équation auxiliaire $y = t$ (64), qui donne

$$dy = dt, \quad d^2y = 0, \quad q' = \frac{d^2x}{dy^2};$$

dans le second, c'est prendre $x = t$, d'où il résulte

$$dx = dt, \quad d^2x = 0, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2},$$

ce qui s'accorde avec les n^{os} 48 et 59.

Il en sera de même de toute équation différentielle d'un ordre quelconque, obtenue en regardant une des variables comme fonction de l'autre, et ramenée à ne contenir que des coefficiens différentiels de la première; il suffira d'y supposer

$$p = \frac{dy}{dx},$$
$$q = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right),$$
$$r = \frac{1}{dx} d\left[\frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right],$$
$$s = \frac{1}{dx} d\left\{\frac{1}{dx} d\left[\frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\right\},$$
etc.

et de faire varier simultanément, dans chacune des différentiations indiquées, dy, dx et toutes leurs différentielles (62). On pourra ensuite lier les variables x et y à telle fonction que l'on voudra, en prenant convenablement l'équation subsidiaire $dU = dt$ (64).

69. On a déjà vu dans les n°s 48 et 66, comment toute équation différentielle à deux variables dans un ordre quelconque, formée en regardant une des variables comme fonction de l'autre, pouvait se ramener à ne contenir que des coefficiens différentiels. Il est aisé de voir aussi que toute expression différentielle relative à la même hypothèse, et homogène suivant la remarque du n° 48, prendra la forme $V dx^m$, V étant une fonction des variables et des coefficiens différentiels seuls, m étant l'exposant de l'ordre de la fonction; car un terme quelconque de cette fonction étant représenté par

$$P dx^\alpha dy^\beta d^2y^\gamma d^3y^\delta \ldots \quad \text{deviendra} \quad P p^\beta q^\gamma r^\delta \ldots dx^{\alpha+\beta+2\gamma+3\delta+\ldots},$$

lorsqu'on y remplacera les différentielles

$$dy, \; d^2y, \; d^3y \ldots \quad \text{par} \quad p dx, \; q dx^2, \; r dx^3 \ldots;$$

et comme l'homogénéité de l'expression exige que la somme des exposans $\alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots$ soit la même dans tous les termes, il est évident que si on la désigne par m, la formule aura dx^m pour facteur commun à tous ses termes, qui ne contiendront en outre que les variables x, y et les coefficiens différentiels p, q, r, etc.

Il suit de là que toute expression différentielle fractionnaire, dans laquelle le numérateur est de même ordre que le dénominateur, et où l'on a fait dx ou dy constant, ne dépend implicitement que des seuls coefficiens différentiels, puisque d'après ce qu'on vient de lire, il est possible de donner à ses deux termes la forme $V dx^m$ et $V' dx^m$, ce qui la réduit à $\frac{V}{V'}$, les fonctions V et V' ne contenant plus que x, y et les coefficiens différentiels de l'une ou de l'autre de ces variables.

J'en donnerai pour exemple les expressions

$$\frac{y(dx^2+dy^2)}{xd^2y}, \qquad \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y},$$

qui deviennent respectivement

$$\frac{y(1+p^2)}{xq}, \qquad \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

lorsqu'on y fait $dy = pdx$, $d^2y = qdx^2$.

Sous cette dernière forme il est facile de les changer en d'autres où x et y étant considérés comme dépendant d'une autre variable, dx et dy varient à-la-fois. Par la substitution des valeurs de p et de q relatives à cette hypothèse (62), on obtient pour la première,

$$\frac{y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{x\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}} = \frac{ydx(dx^2+dy^2)}{x(dxd^2y-dyd^2x)},$$

et pour la seconde

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x},$$

résultat où l'on peut maintenant prendre pour constante celle qu'on voudra des deux différentielles dy et dx, ou établir telle autre dépendance que l'on jugera convenable.

70. Après avoir reconnu la possibilité de transformer en coefficiens différentiels, et de généraliser ensuite la liaison des variables, dans une équation différentielle, ou dans une fonction différentielle homogène, où l'une des deux différentielles est prise pour constante, on peut se demander si toute combinaison homogène, dans laquelle on n'aurait pris aucune différentielle pour constante, serait également susceptible d'être transformée en coefficiens différentiels de l'une des variables regardée comme fonction de l'autre : c'est ce que nous allons examiner, en commençant par les équations.

Supposons donc que l'on soit parvenu d'une manière quelconque à l'équation

$$Md^2x + Nd^2y + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0;$$

en reprenant l'équation

$$dy = pdx,$$

pour la différentier, en y faisant varier dx aussi bien que dy, suivant le point-de-vue expliqué dans le n° 67, et en supprimant les dt qui sont diviseurs communs, nous en tirerons

$$d^2y = dpdx + pd^2x = qdx^2 + pd^2x,$$

puis mettant la valeur de d^2y et celle de dy dans la proposée, nous la changerons en

$$Md^2x + Nqdx^2 + Npd^2x + Pdx^2 + Qpdx^2 + Rp^2dx^2 = 0,$$

ou bien en

$$(M + Np)d^2x + (Nq + P + Qp + Rp^2)dx^2 = 0,$$

et pour que dx et d^2x disparaissent à-la-fois de cette équation, il faut que l'on ait

$$M + Np = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Mdx + Ndy = 0,$$

condition qui peut être remplie de plusieurs manières.

1°. Lorsque l'équation $Mdx + Ndy = 0$ sera identique par elle-même: ce cas aurait lieu pour l'équation

$$xydyd^2x - xydxd^2y + ydydx^2 - xdxdy^2 = 0;$$

car elle donne $M = xydy$, $N = -xydx$, et par conséquent

$$Mdx + Ndy = xydydx - xydydx = 0.$$

2°. Lorsque la proposée sera la différentielle de $Mdx + Ndy = 0$: telle serait l'équation particulière

$$xd^2x + yd^2y + dx^2 + dy^2 = 0,$$

qui donne $Mdx + Ndy = xdx + ydy$, et qui résulte de la différentiation de $xdx + ydy = 0$.

3°. Lorsque la proposée, quoique différente en apparence de l'équation qui résulte de la différentiation de $Mdx + Ndy = 0$, s'accorde cependant avec cette dernière. Pour donner un exemple de ce cas, prenons l'équation

$$x^3d^2x + x^2yd^2y + (a^2 - y^2)dx^2 + x^2dy^2 = 0,$$

nous aurons alors

$$Mdx + Ndy = x^3dx + x^2ydy = 0, \quad \text{ou} \quad xdx + ydy = 0.$$

Si on différentie cette dernière équation, en faisant tout varier, il viendra $xd^2x + yd^2y + dx^2 + dy^2 = 0$; multipliant ensuite par x^2, afin que les deux premiers termes soient les mêmes que dans la proposée, et retranchant l'une de l'autre, on aura

$$(a^2 - y^2)dx^2 + x^2dy^2 - x^2dx^2 - x^2dy^2 = 0,$$

ou en réduisant et en divisant par dx^2, $a^2 - y^2 - x^2 = 0$, équation dont la différentielle $xdx + ydy = 0$, est précisément celle que nous avons trouvée. Si donc on fait, pour abréger, $a^2 - y^2 - x^2 = u$, on transformera facilement l'équation proposée en $\frac{1}{2}x^2d^2u - udx^2 = 0$, et on verra qu'elle doit être satisfaite par la supposition de $u = 0$, qui donne aussi $du = 0$, $d^2u = 0$ (53).

Nous ferons remarquer que pour exprimer la manière dont les équations $\frac{1}{2}x^2d^2u - udx^2 = 0$ et $u = 0$, sont liées entre elles, les Analystes disent que *la première a lieu en même temps que la seconde*. On voit par là que des équations qui ont lieu en même temps sont des conséquences les unes des autres; mais cette relation n'est pas toujours réciproque. On ne pourrait pas dire, dans l'exemple ci-dessus, que l'équation $u = 0$ a lieu en même temps que $\frac{1}{2}x^2d^2u - udx^2 = 0$; car on verra dans la suite que cette dernière, en ne considérant que les variables u et x, est plus générale et peut être satisfaite par une relation entre u et x. On peut déjà s'assurer d'une exception de ce genre sur l'équation $d^2u - udx^2 = 0$, que la supposition de $u = 0$ rend identique, mais qui le devient aussi lorsqu'on a $u = ae^x + be^{-x}$, quelles que soient d'ailleurs les constantes a et b. Il ne faut donc pas confondre dans ce qui vient d'être dit, l'équation $\frac{1}{2}x^2d^2u - udx^2 = 0$, avec

$$x^3d^2x + x^2yd^2y + (a^2 - y^2)dx^2 + x^2dy^2 = 0,$$

quoique l'une ne soit qu'une transformation de l'autre. L'équation primitive d'où dérive la première, étant prise dans toute la généralité qu'elle comporte, ne satisferait pas à la seconde.

Les trois cas dans lesquels la condition $Mdx + Ndy = 0$ peut être remplie, et pour chacun desquels il existe une équation primitive en x et y qui satisfait à la proposée, diffèrent entre eux par rapport à la généralité de cette équation; mais comme cet objet tient essentiellement au Calcul intégral, nous ne nous y arrêterons pas ici : nous terminerons cet article par un exemple dans lequel la condition $Mdx + Ndy = 0$ n'est pas remplie.

Soit l'équation

$$x^3 d^2x + y^3 d^2y + 6xy dx dy = 0;$$

elle donnera $M = x^3$, $N = y^3$, et par conséquent on en tirera

$$x^3 dx + y^3 dy = 0;$$

différentiant et retranchant de la proposée, on aura

$$6xy dx dy - 3x^2 dx^2 - 3y^2 dy^2 = 0,$$

ou

$$x^2 dx^2 - 2xy dx dy + y^2 dy^2 = 0,$$

ou enfin

$$x dx - y dy = 0:$$

il faut donc voir maintenant si les équations

$$x^3 dx + y^3 dy = 0, \quad x dx - y dy = 0,$$

peuvent s'accorder entre elles. La seconde donne $dy = \frac{x dx}{y}$; substituant dans la première, il vient $x^3 y dx + y^3 x dx = 0$; en divisant par $xy dx$, on obtient $x^2 + y^2 = 0$; différentiant encore cette nouvelle équation, on trouve $x dx + y dy = 0$, et mettant pour dy sa valeur, il vient $2xy = 0$, équation qui ne peut avoir lieu conjointement avec $x^2 + y^2 = 0$, à moins que l'on n'ait $x = 0$, $y = 0$. Ceci montre qu'il est impossible que l'équation proposée résulte de la différentiation d'une équation à deux variables seulement, mais non pas qu'elle ne puisse dériver de deux équations entre trois variables; car si l'on avait en outre une équation $dU = dt$, sa différentielle servirait pour éliminer d^2x, comme on l'a vu dans le n° 64, et alors le résultat ne contiendrait plus que des coefficiens différentiels; mais il y a cette différence entre ce cas et le précédent, que les résultats changeront avec les hypothèses que l'on fera sur l'équation subsidiaire $\mathrm{d}U = \mathrm{d}t$, tandis qu'ils demeureraient toujours les mêmes, si l'équation proposée pouvait se vérifier indépendamment de la valeur de d^2x.

71. Les mêmes choses ont lieu à l'égard des fonctions différentielles : dans les unes, les deux différentielles secondes d^2y et d^2x disparaissent à-la-fois, en y faisant

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}^2y = q\mathrm{d}x^2 + p\mathrm{d}^2x;$$

telle est $\frac{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}$, qui devient alors $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$. En y supposant

$$\mathrm{d}x = p'\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}^2x = q'\mathrm{d}y^2 + p'\mathrm{d}^2y,$$

on trouvera $-\frac{(1+p'^2)^{\frac{3}{2}}}{q'}$, résultat qui s'accorde avec le précédent, d'après les relations

$$p' = \frac{1}{p}, \quad q' = -\frac{q}{p^3} \; (59);$$

et l'on tomberait immédiatement sur chacun, en faisant

$$\mathrm{d}^2x = 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}^2y = 0.$$

D'autres fonctions, comme $\frac{x\mathrm{d}^2y + y\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$, par exemple, où l'une des deux différentielles secondes demeure, après les substitutions indiquées ci-dessus, changent en conséquence de valeur, suivant l'hypothèse établie. La première de ces substitutions conduit à

$$\frac{xq\mathrm{d}x^2 + (xp+y)\mathrm{d}^2x}{p\mathrm{d}x^2},$$

et d^2x ne saurait disparaître que dans le cas particulier où l'on aurait $p = -\frac{y}{x}$. C'est aussi ce que l'on trouve en faisant successivement d^2x et d^2y nulles ; car il vient d'abord

$$\frac{x\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{xq}{p} \quad \text{et} \quad \frac{y\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{yq'}{p'},$$

et mettant dans le second résultat les valeurs $p' = \frac{1}{p}$, $q' = \frac{-q}{p^3}$, on parvient à $\frac{-yq}{p^2}$, ce qui ne saurait s'accorder avec $\frac{xq}{p}$, que dans le cas où, comme ci-dessus, $p = -\frac{y}{x}$.

Enfin si l'on particularise la relation de x à y, en posant

$$y = x^2, \quad \text{d'où} \quad dy = 2xdx,$$

et que l'on suppose dx constant, ce qui donne $d^2y = 2dx^2$, il s'ensuit $\frac{xd^2y}{dxdy} = 1$; mais si l'on fait au contraire dy constant, on aura $0 = 2dx^2 + 2xd^2x$, et substituant la valeur de dx et celle de d^2x que fournit cette dernière équation, dans la formule $\frac{yd^2x}{dxdy}$, on obtiendra $-\frac{y}{2x^2} = -\frac{1}{2}$, résultat très-différent du premier.

En général, pour reconnaître les expressions différentielles qui supposent que l'une des variables est immédiatement fonction de l'autre, il faudra substituer aux différentielles de l'une de ces variables, de y, par exemple, les valeurs

$$\begin{aligned}
dy &= pdx,\\
d^2y &= qdx^2 + pd^2x,\\
d^3y &= rdx^3 + 3qdxd^2x + pd^3x,\\
d^4y &= sdx^4 + 6rdx^2d^2x + 4qdxd^3x + 3qd^2x^2 + pd^4x,\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

obtenues en différentiant la fonction y de la manière indiquée dans le n° 67, supprimant les dénominateurs dt, et faisant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r, \quad \frac{dr}{dx} = s, \quad \text{etc.}$$

72. Nous avons choisi d'abord t, pour variable indépendante, dans les équations $u = 0$, $v = 0$, du n° 54; mais il est possible de généraliser les différentielles de ces équations, en y regardant à-la-fois les trois variables comme liées avec une quatrième : alors les trois différentielles dt, dx et dy deviendront variables en même temps, comme étant des fonctions de z. Dans cette hypothèse, les coefficiens différentiels des variables y et x, considérées comme des fonctions de t, s'exprimeront par des formules analogues à celles du n° 62, ensorte

que ceux du second ordre, par exemple, seront

$$\frac{1}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{dtd^2y-dyd^2t}{dt^3},$$
$$\frac{1}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dtd^2x-dxd^2t}{dt^3};$$

et si on substituait ces valeurs, au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, dans les équations différentielles du n° 55, on les transformerait en d'autres où l'on pourrait établir telle hypothèse qu'on voudrait, au moyen d'une équation subsidiaire de la forme $dU=dz$. Si l'on se proposait de prendre x pour variable indépendante, il viendrait alors $dx=dz$, $d^2x=0$; les différentiations, d'abord relatives à z, se rapporteraient à x et les transformées détermineraient $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2t}{dx^2}$.

On doit remarquer ici, comme dans le n° 70, que toute équation transformée par les valeurs ci-dessus, peut être ramenée à ne contenir que des coefficiens différentiels de x et de y, par rapport à t, en y faisant

$$dx=\alpha dt,\quad d^2x=\beta dt^2+\alpha d^2t,\quad \text{etc.},$$
$$dy=\alpha' dt,\quad d^2y=\beta' dt^2+\alpha' d^2t,\quad \text{etc.},$$

valeurs dans lesquelles

$$\beta=\frac{d\alpha}{dt},\quad \beta'=\frac{d\alpha'}{dt},\quad \text{etc.}$$

Les équations où cette substitution ne ferait pas disparaître toutes les différentielles de t, en même temps que celles de x et de y, ne pourraient admettre l'hypothèse de deux variables regardées comme immédiatement dépendantes de la troisième.

Ceci s'applique aussi aux fonctions différentielles homogènes, telles que la suivante :

$$\frac{(dt^2+dx^2+dy^2)^3}{(dtd^2x-dxd^2t)^2+(dtd^2y-dyd^2t)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2},$$

qui, par les substitutions indiquées plus haut, devient

$$\frac{(1+\alpha^2+\alpha'^2)^3}{\beta^2+\beta'^2+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2}.$$

En général toutes ces transformations, qu'il est maintenant aisé d'étendre à tel ordre et à tel nombre de variables que l'on voudra, doivent être regardées, pour ainsi dire, comme les produits du mécanisme de la différentiation, puisque ce ne sont au fond que des manières diverses d'écrire le même résultat, parmi lesquelles on peut choisir celle qui paraît la plus concise ou la plus appropriée aux formes des fonctions que l'on se propose de déterminer; mais on voit aussi par là que lorsqu'on rencontre une équation différentielle, il faut, pour en connaître la signification, savoir dans quelle hypothèse elle a été formée, ou, ce qui revient au même, *quelle est la variable que l'on a regardée comme indépendante, ou dont on a pris la différentielle pour constante*: or c'est une des conventions que l'on exprime toujours au commencement d'une recherche.

De l'élimination entre les équations différentielles.

73. Lorsqu'on a un nombre m d'équations entre $m+1$ variables et leurs différentielles, on peut toujours en tirer une équation unique entre deux quelconques des variables, par un procédé que je vais exposer, sur deux équations à trois variables, et qu'il sera facile ensuite d'étendre autant que l'on voudra.

Soient $u=0$, $v=0$, ces équations, l'une de l'ordre m, et l'autre de l'ordre n, entre les variables t, x, y et leurs différentielles, et dont on veuille éliminer y; la première équation pourra contenir, outre la variable y, les différentielles dy, $d^2y, \ldots d^my$, et la seconde, dy, $d^2y, \ldots d^ny$. Comme on n'a point les équations primitives, ni toutes leurs différentielles des ordres inférieurs à ceux des proposées, il faut nécessairement se procurer de nouvelles équations pour chasser les quantités inconnues dy, d^2y, etc., et c'est ce qu'on fera en différentiant n fois l'équation $u=0$, et m fois l'équation $v=0$. On obtiendra par ce moyen $n+m$ équations nouvelles; et on en aura en tout un nombre $m+n+2$, en comptant les deux proposées: les inconnues à éliminer, savoir: y, dy, $d^2y, \ldots d^my, \ldots d^{m+n}y$, étant au nombre de $m+n+1$, il restera donc une équation finale entre x, y et leurs différentielles.

Si dy était constant, il semblerait qu'en différentiant une seule fois l'une des équations proposées, on pourrait éliminer y et dy, puisqu'on aurait alors trois équations; mais on doit observer que les différentielles d^2t, d^2x, etc., contiennent implicitement y, puisqu'alors on aurait regardé t et x comme des fonctions de cette variable (54): il faut donc toujours préparer les équations entre lesquelles on se propose d'éliminer une variable, de manière que ses différentielles ne soient pas constantes.

Je proposerai pour exemple, l'élimination de y, entre les deux équations

$$Mx + Ny + P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} = T \qquad (1),$$

$$M'x + N'y + P'\frac{dx}{dt} + Q'\frac{dy}{dt} = T' \qquad (2),$$

les lettres M, N, P, Q, T, tant simples qu'accentuées, ne contenant que la variable t; il suffira de différentier une seule fois chacune de ces équations, ce qui donnera, en divisant les résultats par dt,

$$\frac{dM}{dt}x + \frac{dN}{dt}y + \left(M + \frac{dP}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \left(N + \frac{dQ}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + P\frac{d^2x}{dt^2} + Q\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dT}{dt},$$

$$\frac{dM'}{dt}x + \frac{dN'}{dt}y + \left(M' + \frac{dP'}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \left(N' + \frac{dQ'}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + P'\frac{d^2x}{dt^2} + Q'\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dT'}{dt},$$

équations qui sont de la forme

$$M_1 x + N_1 y + P_1 \frac{dx}{dt} + Q_1 \frac{dy}{dt} + P \frac{d^2x}{dt^2} + Q \frac{d^2y}{dt^2} = T_1 \qquad (3),$$

$$M'_1 x + N'_1 y + P'_1 \frac{dx}{dt} + Q'_1 \frac{dy}{dt} + P' \frac{d^2x}{dt^2} + Q' \frac{d^2y}{dt^2} = T'_1 \qquad (4).$$

Il est visible maintenant que la combinaison des équations (3) et (4) avec les équations (1) et (2), fournit le moyen de parvenir à une équation finale, indépendante des trois fonctions inconnues y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$. Le calcul sera très-facile dans l'exemple actuel, puisque les inconnues ne s'y montrent qu'au premier degré; et il est à propos d'observer que les fonctions x, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ ne se trouveront aussi qu'au premier dans l'équation finale.

Il y aurait plusieurs remarques importantes à faire sur cette méthode d'élimination; mais comme on l'emploie rarement parce qu'elle entraîne des calculs fort longs, et qu'en donnant un résultat d'un ordre plus élevé que les proposées, elle augmente les difficultés qu'on rencontre presque toujours pour remonter des équations différentielles aux équations primitives, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter davantage: on trouvera d'ailleurs dans le Calcul intégral un procédé en quelque sorte inverse du précédent, et dont les Analystes se sont servis dans les questions de ce genre qu'ils ont eues à traiter.

De la différentiation des fonctions implicites d'un nombre quelconque de variables.

74. Lorsqu'on n'a qu'une seule équation entre trois variables, on peut toujours en prendre arbitrairement deux quelconques, et déterminer la troisième. Soit $u=0$ une équation renfermant x, y et z; si on regarde x et y comme les deux variables indépendantes, z sera une fonction de l'une et de l'autre; et lorsque x recevra un accroissement quelconque, y étant supposé constant, z éprouvera un changement subordonné à celui de x. Dans cette hypothèse, l'équation $u=0$ devra être traitée comme ne contenant que deux variables, x et z; on aura donc

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0 \quad (41),$$

et de là on tirera le coefficient différentiel de z, relativement à la *variabilité* de x. Il faut se rappeler ici, d'après la distinction établie n° 31, que dans $\frac{dz}{dx}$, dz n'est que la différentielle partielle de z, prise par rapport au changement de x seul.

Il est évident que si l'on eût fait varier y, on aurait eu, en différentiant l'équation proposée, comme ne contenant que les variables y, z,

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

Si on multiplie par dx la première des équations trouvées ci-dessus, la seconde par dy, et qu'on les ajoute ensuite, il viendra

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right)=0;$$

mais $\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, n'est autre chose que la différentielle totale de z (29) : on aura donc

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0,$$

c'est-à-dire qu'on pourra égaler à zéro la différentielle première de l'équation $u=0$, prise par rapport aux trois variables x, y, z. Cependant on ne doit pas perdre de vue que cette différentielle doit être regardée comme équivalente à deux équations; car lorsqu'on y substitue pour dz sa valeur $\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, il faut, à cause de l'indépendance des accroissemens dx et dy, que les quantités qui les multiplient, chacun en particulier, soient séparément égales à zéro.

75. Les équations qui donnent les coefficiens différentiels des ordres supérieurs, s'obtiennent en différentiant les équations

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0 \qquad (1),$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=0 \qquad (2),$$

qui, renfermant en général les trois variables x, y et z, doivent être traitées de même que la proposée, avec l'attention cependant d'y considérer comme des fonctions dépendantes à-la-fois de x et de y, non-seulement z, mais chacun de ses coefficiens différentiels.

En différentiant d'abord par rapport à x, l'équation (1), et en observant que cette opération effectuée sur $\frac{dz}{dx}$ donne naissance au coefficient du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, on aura, comme pour toute équation qui ne renfermerait que les variables x et z,

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dzdx}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}=0 \qquad (3).$$

Différentiant ensuite, soit l'équation (1), par rapport à y, soit l'équation (2), par rapport à x, et en observant que dans le premier cas, $\frac{dz}{dx}$ donne $\frac{d^2z}{dydx}$, et que dans le second, $\frac{dz}{dy}$ donne $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$ (27), on aura un résultat unique, exprimé par

$$\frac{d^2u}{dxdy}+\frac{d^2u}{dzdy}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dzdx}\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dxdy}=0 \qquad (4).$$

En effet, puisque la variable z dépend de x et de y, la fonction u elle-même peut être regardée comme ne dépendant implicitement que de ces dernières; on doit donc obtenir le même résultat, lorsqu'on la différentie successivement par rapport à chacune en particulier, quelqu'ordre qu'on établisse d'ailleurs entre les opérations.

Différentiant enfin l'équation (2) par rapport à y, en observant que $\frac{dz}{dy}$ donne alors $\frac{d^2z}{dy^2}$, on obtiendra

$$\frac{d^2u}{dy^2}+2\frac{d^2u}{dzdy}\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dy^2}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dy^2}=0 \qquad (5).$$

Les coefficiens différentiels de la fonction z étant au nombre de trois pour le second ordre, seront déterminés, chacun séparément, par l'une des équations ci-dessus, savoir :

$$\frac{d^2z}{dx^2} \text{ par l'équation } (3),$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} \text{ par l'équation } (4),$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} \text{ par l'équation } (5),$$

puisque tous les coefficiens différentiels de la fonction u, qui est explicite par rapport aux variables x, y et z, sont donnés par les différentiations indiquées.

Si on multiplie respectivement l'équation (3) par dx^2, l'équation (4) par $dxdy$, l'équation (5) par dy^2, et que l'on ajoute les résultats, en remplaçant les termes

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy, \text{ par } dz \ (29),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2, \text{ par } d^2z \ (32),$$

on trouvera la même équation que celle qu'on aurait obtenue, si l'on avait différentié l'équation

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

en y faisant varier à-la-fois les quantités x, y, z et dz, et en y regardant dx et dy comme constans, ce qui donnerait la différentielle seconde totale de u, formée d'après l'hypothèse de z fonction de x et de y.

76. On étendra sans peine ces considérations à tel ordre de différentiation, ou à tel nombre de variables qu'on voudra; car tout se réduit à déterminer celles qui sont indépendantes, ce qu'on ne peut faire que par la nature de la question qui a conduit à l'équation ou aux équations proposées; et ensuite on différentiera, par rapport à chacune de ces variables en particulier, en traitant les variables subordonnées comme des fonctions implicites des variables indépendantes.

Si, par exemple, on avait les deux équations

$$u=0, \quad v=0,$$

entre les cinq variables s, t, x, y et z, on verrait que trois de ces variables sont indépendantes. Supposons donc que y et z soient les deux variables subordonnées, ou les fonctions implicites de s, t, x, données par les équations proposées; on différentiera successivement u et v par rapport à s, par rapport à t, par rapport à x, et on aura

$$\frac{du}{ds}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{ds}=0,$$
$$\frac{du}{dt}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}=0,$$
$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0.$$

Si on multiplie respectivement ces équations par ds, dt, dx, qu'on les ajoute et qu'on mette dy au lieu de

$$\frac{dy}{ds}ds+\frac{dy}{dt}dt+\frac{dy}{dx}dx,$$

dz au lieu de

$$\frac{dz}{ds}ds+\frac{dz}{dt}dt+\frac{dz}{dx}dx,$$

il viendra

$$\frac{du}{ds}ds+\frac{du}{dt}dt+\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=du=0.$$

On tirera un résultat semblable de l'équation $v=0$; d'où il suit, qu'en différentiant les équations $u=0$ et $v=0$, par rapport à toutes les variables s, t, x, y et z, et en y substituant au lieu de dy et de dz, les expressions de ces différentielles, considérées comme appartenant à des fonctions de trois variables (40), il faudra égaler séparément à zéro le coefficient de la différentielle de chaque variable indépendante.

En regardant les coefficiens différentiels comme de nouvelles fonctions implicites des variables indépendantes, on ne saurait être arrêté dans la recherche des équations différentielles partielles ultérieures, et l'on en déterminera toujours le nombre pour chaque ordre, en concevant que les fonctions u et v, ainsi que tous leurs coefficiens différentiels, soient rapportés implicitement aux variables indépendantes s, t et x; car il est évident que sous ce point-de-vue, les fonctions u et v

auront, chacune en particulier, dans un ordre quelconque, autant de coefficiens différentiels que le développement de $(s+t+x)^n$ contient de termes (39); et ces divers coefficiens, égalés séparément à zéro, formeront les équations qui déterminent les coefficiens différentiels des fonctions proposées y et z. Ces considérations s'étendront sans peine à un nombre quelconque de variables.

De l'élimination des fonctions indéterminées ou arbitraires.

77. En combinant les deux différentielles partielles d'une équation à trois variables, avec cette équation, on peut en éliminer deux quantités, soit constantes, soit variables, et obtenir entre les deux variables indépendantes, la fonction et ses coefficiens différentiels, une relation qui ait lieu indépendamment des quantités éliminées. Ceci mène à un genre d'équations qui exprime le caractère de toutes les fonctions d'une même quantité, quelles que soient leurs formes, ce qui est très-remarquable.

Soit, par exemple, l'équation

$$z = \mathrm{f}(ax+by),$$

dans laquelle la caractéristique f désigne une fonction dont la forme est totalement inconnue; il ne faudra, pour en former les différentielles partielles, introduire qu'une nouvelle fonction inconnue, puisque si l'on fait $ax+by=t$, on aura $z=\mathrm{f}(t)$, et de quelque manière que varie t, il viendra toujours

$$\mathrm{d}z = \mathrm{f}'(t)\mathrm{d}t,$$

$\mathrm{f}'(t)$ désignant le coefficient différentiel de $\mathrm{f}(t)$. Il suit de là que

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \mathrm{f}'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y};$$

mettant pour $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ et $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$, leurs valeurs a et b, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}'(t).a, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \mathrm{f}'(t).b,$$

d'où, en éliminant $\mathrm{f}'(t)$, on déduira

$$b\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0.$$

Cette équation serait vérifiée par toutes les valeurs de z qui naîtraient des diverses formes que l'on pourrait assigner à la fonction f, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer en prenant des exemples particuliers comme

$$z = (ax+by)^2, \quad z = e^{ax+by}, \quad z = \sin(ax+by), \quad \text{etc.};$$

elle renferme donc un caractère propre à reconnaître si une expression proposée est une fonction de $ax+by$ ou non, c'est-à-dire, si cette expression, qui comprend à-la-fois les deux variables x, y, peut ou non se transformer en une autre qui ne contienne plus que la seule variable t, lorsqu'on fait $ax+by=t$.

Supposons, par exemple, que l'on ignorât l'origine du polynome

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2;$$

on l'égalerait à z, on formerait les coefficiens différentiels

$$\frac{dz}{dx} = 2a^2x + 2aby, \quad \frac{dz}{dy} = 2abx + 2b^2y,$$

et on mettrait leurs valeurs dans l'équation $b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0$. Cette substitution la rendant identique, montrerait que le polynome proposé est en effet une fonction de $ax+by$, ce qui est d'ailleurs évident, puisque

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax+by)^2.$$

Il n'est pas nécessaire que l'équation contenant la fonction indéterminée soit sous la forme $z=f(t)$; en opérant de même sur une équation $u=0$, contenant d'une manière quelconque la fonction f, on parviendra toujours à un résultat indépendant de cette fonction; car en faisant $f(t)=s$, et différentiant l'équation u, comme contenant deux fonctions z et s dépendantes des variables x et y, on trouvera

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{du}{ds}\frac{ds}{dx} = 0,$$
$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{du}{ds}\frac{ds}{dy} = 0;$$

puis mettant pour $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{dy}$, leurs valeurs $f'(t)\frac{dt}{dx}$, $f'(t)\frac{dt}{dy}$, on aura les équations

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{du}{ds}f'(t)\frac{dt}{dx} = 0,$$
$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{du}{ds}f'(t)\frac{dt}{dy} = 0,$$

qui, réunies à la proposée $u=0$, fourniront, par l'élimination, une équation finale, indépendante de $f(t)$ et de $f'(t)$. On voit en même temps que les coefficiens différentiels de la fonction z pourront s'élever au-delà du premier degré dans la nouvelle équation, si la fonction $f(t)$ passe le premier degré dans l'équation proposée. Ceci répond aux considérations exposées dans le n° 49, mais avec une plus grande généralité.

78. Lorsqu'on passe au second ordre, on se procure trois nouvelles équations différentielles partielles (75) qui, réunies avec la proposée et ses différentielles premières, forment six équations et permettent par conséquent d'éliminer cinq quantités. En s'abandonnant trop tôt à l'analogie, on avait pensé que puisqu'il était possible d'éliminer une fonction indéterminée, en passant au premier ordre, on devait pouvoir en éliminer deux en poussant jusqu'au second ordre, et ainsi de suite; de même qu'avec le secours des différentielles d'une équation à deux variables, on en élimine un nombre de constantes égal à l'exposant de l'ordre auquel on s'élève (50). On a reconnu depuis, que les équations différentielles partielles ne suivaient pas la même loi, et cela était facile à voir; car une fonction indéterminée fournissant dans chaque ordre un coefficient différentiel également indéterminé, au second ordre, on a par conséquent trois indéterminées pour une seule fonction, savoir: cette fonction, son coefficient différentiel du premier ordre, et celui du second; on en aura donc six pour deux fonctions, et comme on n'a qu'un pareil nombre d'équations, il est impossible, en général, d'obtenir par l'élimination un résultat délivré de tout ce qui tient aux fonctions indéterminées comprises dans l'équation proposée. Il faut que cette équation se trouve dans des circonstances particulières qui fassent disparaître en même temps plusieurs des fonctions indéterminées.

Pour le faire voir par des exemples simples, je prendrai d'abord l'équation

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

dans laquelle les lettres φ et ψ sont les caractéristiques de fonctions dont la composition est inconnue. Pour abréger, je représenterai par une seule lettre les coefficiens différentiels de la fonction z, et je ferai

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t;$$

quant aux fonctions indéterminées, je poserai

$$\frac{y}{x}=u, \quad \mathrm{d}.\varphi(u)=\varphi'(u)\mathrm{d}u, \quad \mathrm{d}.\psi(u)=\psi'(u)\mathrm{d}u,$$

d'où on conclura les coefficiens différentiels, comme dans le n° précédent. Avec ces notations on trouvera pour les deux différentielles partielles du premier ordre de la proposée, les équations

$$p=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{-y}{x^2}+\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{-y}{x^2},$$
$$q=x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x},$$

qui reviennent à

$$p=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$q=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

La fonction $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ n'ayant point de multiplicateur variable, n'est point passée dans les équations ci-dessus; et pour en débarrasser le calcul, il suffira d'éliminer $\psi'\left(\frac{y}{x}\right)$, ce qui s'effectue en multipliant la première de ces équations par x, la seconde par y, et en ajoutant les résultats: il vient l'équation

$$px+qy=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

qui ne contient plus que la seule fonction indéterminée $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Si l'on en prend les deux différentielles partielles, on aura, d'après les conventions établies plus haut,

$$p+xr+ys=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{-y}{x^2},$$
$$xs+q+yt=x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}.$$

En réduisant et en éliminant $\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$, on en déduira ce résultat:

$$px+qy+x^2r+2xys+y^2t=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

que l'équation $px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ réduit à

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0,$$

et qui revient à

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2xy\frac{d^2z}{dxdy} + y^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0.$$

En cherchant à éliminer les fonctions indéterminées de l'équation

$$z = \varphi(x+y) + xy\psi(x-y),$$

qui n'est guère plus compliquée que celle dont je viens de m'occuper, on est conduit au-delà du second ordre, par le calcul que je vais indiquer, en n'écrivant, pour abréger, que φ, ψ au lieu de $\varphi(x+y)$ et $\psi(x-y)$, et posant pour la fonction φ les dénominations

$$d.\varphi(u) = \varphi'(u)du, \quad d.\varphi'(u) = \varphi''(u)du,$$

et pour la fonction ψ,

$$d.\psi(v) = \psi'(v)dv, \quad d.\psi'(v) = \psi''(v)dv.$$

Cela fait, la formation de toutes les différentielles partielles, tant du premier que du second ordre, fournit les six équations

$$\begin{aligned}
z &= \varphi + xy\psi,\\
p &= \varphi' + xy\psi' + y\psi,\\
q &= \varphi' - xy\psi' + x\psi,\\
r &= \varphi'' + xy\psi'' + 2y\psi',\\
s &= \varphi'' - xy\psi'' + (x-y)\psi' + \psi,\\
t &= \varphi'' + xy\psi'' - 2x\psi'.
\end{aligned}$$

La seconde et la troisième donnent d'abord, en les retranchant l'une de l'autre,

$$p - q = 2xy\psi' + (y-x)\psi. \qquad (a)$$

La fonction φ est éliminée; mais parce qu'il reste encore les fonctions ψ et ψ', si l'on voulait procéder comme dans l'exemple précédent, on introduirait par la différentiation de cette dernière équation la fonction ψ'', et l'on aurait par conséquent trois fonctions ψ, ψ' et ψ'', et seulement trois équations. En s'aidant des trois équations du second ordre, on élimine φ'', et en faisant les combinaisons indiquées ci-dessous,

$$r - t = 2(y + x)\psi', \qquad (b),$$
$$r - 2s + t = 4xy\psi'' + 4(y - x)\psi' - 2\psi, \qquad (c),$$

il reste encore à éliminer les trois fonctions ψ, ψ' et ψ'', entre les trois équations (a), (b) et (c), ce qui est impossible.

Si l'on passait au troisième ordre, en différentiant de nouveau, par rapport à x et à y, les valeurs de r, s, t, qui représentent respectivement

$$\frac{d^2z}{dx^2}, \ \frac{d^2z}{dxdy}, \ \frac{d^2z}{dy^2},$$

on aurait quatre nouvelles équations, résultant des valeurs de

$$\frac{d^3z}{dx^3}, \ \frac{d^3z}{dydx^2}, \ \frac{d^3z}{dy^2dx}, \ \frac{d^3z}{dy^3},$$

ce qui ferait en tout dix équations; mais en suivant la notation déjà établie, on ferait

$$d.\varphi''(u) = \varphi'''(u)du, \qquad d.\psi''(u) = \psi'''(u)du;$$

on n'introduirait par conséquent que deux nouvelles fonctions indéterminées, ce qui en ferait en tout huit: il resterait donc, après leur élimination, deux équations différentielles partielles du troisième ordre.

Si l'on veut par conséquent arriver à un résultat compris dans une seule équation, il faudra se borner à prendre la différentielle totale de l'une des équations (b) ou (c), de la première, par exemple, à cause qu'elle est la plus simple, et il viendra

$$dr - dt = 2(dy + dx)\psi' + 2(y + x)(dx - dy)\psi'' \qquad (d),$$

l'élimination de ψ, ψ', ψ'' étant faite entre les quatre équations (a), (b), (c), (d), conduira à une équation où il entrera des différentielles totales mêlées avec des différentielles partielles. Il est évident qu'une semblable équation équivaut à deux différentielles partielles du troisième ordre; car les coefficiens différentiels r, t et s, ayant leurs différentielles de la forme

$$\frac{dr}{dx}dx + \frac{dr}{dy}dy, \quad \frac{ds}{dx}dx + \frac{ds}{dy}dy, \quad \frac{dt}{dx}dx + \frac{dt}{dy}dy,$$

si on substitue ces expressions dans l'équation dont il s'agit, on pourra égaler séparément à zéro, les quantités qui multiplient les différentielles dx et dy, des variables indépendantes.

79. On peut prévoir aisément à quel ordre doit s'élever l'équation résultante de l'élimination d'un nombre m de fonctions arbitraires contenues dans une équation primitive. Supposons, par exemple, que cette équation ne renferme que trois variables; elle fournira deux équations au premier ordre, trois au second, quatre au troisième; et par conséquent le nombre total des équations obtenues jusqu'au $n^{ième}$ ordre inclusivement, en y comprenant aussi la proposée, sera exprimé par

$$1+2+\ldots\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)\,(n+2)}{2};$$

mais d'un autre côté, chaque différentiation introduit dans le calcul une nouvelle fonction arbitraire, ensorte que le nombre des inconnues augmente de m en passant d'un ordre quelconque à celui qui le suit, et que par conséquent ce nombre sera $m(n+1)$ au $n^{ième}$ ordre : il faudra donc, pour que l'élimination devienne possible, que l'on ait,

$$m(n+1)<\frac{(n+1)\,(n+2)}{2},\quad \text{ou}\quad 2m<n+2,\quad \text{ou}\quad n>2m-2,$$

c'est-à-dire qu'il faudra pousser les différentiations jusqu'à l'ordre marqué par $2m-1$: le nombre des équations restantes après l'élimination sera $\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}-m(n+1)$. Si l'on fait $m=3$, l'on aura $n=5$, et on obtiendra trois équations finales entre les coefficiens différentiels du cinquième ordre.

C'est par de semblables considérations que l'on calculerait l'ordre auquel peut s'élever l'équation résultante de l'élimination d'une fonction quelconque, commune à deux équations différentielles partielles de tel ordre qu'on voudra. S'il fallait, par exemple, éliminer entre deux équations différentielles partielles de l'ordre m, la fonction z, dépendante des trois variables s, t et x (76), on verrait que cette fonction ayant trois coefficiens au premier ordre, six au second, dix au troisième, etc., le nombre des inconnues, lorsqu'on sera parvenu à l'ordre n, s'élevera à

$$1+3+6+10\ldots\ldots+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\,.\,3};$$

(Voyez le *Compl. des Élém. d'Alg.*); mais en prenant les différentielles de chacune des proposées, depuis l'ordre $m+1$ jusqu'à l'ordre n inclusivement, on se procurera un nombre d'équations exprimé par

$$2\left[1+3+6\ldots+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}\right]=\frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{3},$$

et pour que l'élimination puisse avoir lieu, il faudra que l'on ait

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}<(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3).$$

Il faut bien remarquer que l'ordre calculé par ces formules, sera le plus élevé, auquel puisse atteindre l'équation finale, dans le cas général, mais que par l'effet des relations particulières qui peuvent se trouver entre les termes des équations proposées, on obtiendra quelquefois des résultats plus simples.

On pourrait se proposer la détermination des diverses formes d'équations primitives qui offrent de ces relations; mais de semblables recherches n'ont d'intérêt que lorsqu'il s'agit de remonter des équations différentielles partielles aux équations primitives dont elles sont dérivées, ce qui est l'objet du calcul intégral; et ce que l'on vient de voir suffit pour montrer qu'à l'égard des équations à trois variables, la loi de la disparition des fonctions n'a pas généralement, avec l'ordre des différentiations, la même analogie, que la disparition des constantes dans les équations à deux variables.

80. Ce qui précède me paraît renfermer les principes fondamentaux du calcul différentiel, envisagé dans toute son étendue, en ne l'appuyant que sur des considérations purement analytiques et indépendantes de toute hypothèse sur la valeur et la nature des accroissemens, qui ne se montrent dans le calcul que pour marquer la trace des opérations par lesquelles on est parvenu aux fonctions appelées *coefficiens différentiels*, dont la détermination est le véritable objet de cette branche de l'Analyse. Léibnitz, à qui nous en devons la connaissance, l'a présentée d'une manière moins rigoureuse en apparence, mais cependant bien commode dans les applications, et souvent utile par cette raison. Il suppose que les quantités variables prennent des accroissemens infiniment petits et tels qu'on doit les négliger vis-à-vis des grandeurs finies, ensorte que ces accroissemens ne peuvent jamais être comparés qu'entre eux; il forme ensuite cette demande, *qu'on puisse prendre à volonté*,

Réflexions sur la métaphysique du calcul différentiel et sur sa notation.

l'une pour l'autre, deux grandeurs qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite; d'où il résulte qu'il faut supprimer dans le développement des accroissemens des fonctions, toutes les puissances de dx, dy, etc. supérieures à la première. Ainsi pour obtenir la différentielle de xy, ayant développé le produit

$$(x+dx)(y+dy)=xy+xdy+ydx+dxdy,$$

et retranché ensuite la fonction primitive xy, il rejette le terme $dxdy$, comme étant infiniment petit à l'égard des deux autres, ce qui donne

$$d.xy=xdy+ydx.$$

En effet, $dxdy$ peut être considéré comme le quatrième terme de cette proportion : $1 : dx :: dy : dxdy$; donc si dx est infiniment petit par rapport aux grandeurs finies de la même espèce que l'unité, c'est-à-dire, s'il est contenu un nombre infini de fois dans l'unité, $dxdy$ sera contenu de même un nombre infini de fois dans dx, ou dans dy.

La règle de la différentiation de xy conduit, ainsi qu'on l'a vu n^os^ 9 et 10, aux différentielles de toutes les fonctions algébriques; et pour les fonctions transcendantes, la supposition des accroissemens infiniment petits lève beaucoup de difficultés : dans le cas des fonctions circulaires, par exemple, elle permet de considérer l'arc comme ne différant point de son sinus, et le cosinus comme égal au rayon.

L'homogénéité des expressions différentielles est une suite nécessaire de la méthode de Leibnitz ; car d'après la remarque faite ci-dessus, à l'égard de $dxdy$, il ne peut rester que des termes du degré le moins élevé, tous les autres devant être négligés vis-à-vis de ceux-ci.

En passant au second ordre, Leibnitz regarde les différentielles secondes comme infiniment petites par rapport aux différentielles premières, et par conséquent comme homogènes ou comparables aux quarrés de celles-ci. Il est aisé de voir que cette supposition est une conséquence nécessaire de celle qui a été faite à l'égard des différentielles du premier ordre ; car si dans $Mdx+Ndy$, par exemple, on fait varier en même temps que dx et dy, les x et les y contenus dans M et dans N, on aura un résultat de la forme

$$Md^2x+Nd^2y+Pdx^2+Qdxdy+Rdy^2;$$

mais dx^2, $dxdy$ et dy^2 sont infiniment petits à l'égard de dx et de dy : il faut donc, pour l'homogénéité, que d^2x et d^2y soient infiniment petits par rapport à dx et à dy.

Il suit de là que *pour trouver les différentielles secondes, troisièmes, etc., il faut regarder les différentielles comme de nouvelles variables qui ont elles-mêmes leurs différentielles placées dans l'ordre supérieur, et rejeter du résultat tous les termes qui seraient d'un ordre plus élevé que celui-là.*

C'est de ce petit nombre de règles que se déduisent les divers procédés de la différentiation; et on voit qu'elles renferment toutes celles que nous avons déjà données.

La succession indéfinie de quantités infiniment petites les unes à l'égard des autres, parut, à plusieurs Géomètres, bien difficile à accorder; et, à la vérité, fut souvent bien mal expliquée par des commentateurs maladroits; car l'embarras ne consiste que dans l'énonciation. En s'attachant à montrer que dans les applications du calcul différentiel, on n'emploie jamais que les rapports des différentielles, il suffit de rappeler que ces quantités, rapportées à l'accroissement indéterminé de la variable indépendante x, sont de la forme

$$p\mathrm{d}x, \quad q\mathrm{d}x^2, \quad r\mathrm{d}x^3, \quad \text{etc.} \quad (21),$$

pour faire concevoir que les rapports de chacune avec toutes celles qui la précèdent, et en général, avec toute expression qui ne contiendrait que des puissances inférieures de $\mathrm{d}x$ (*Int.* 14) s'évanouissent lorsqu'on fait $\mathrm{d}x = 0$. Tel est l'esprit des principes sur lesquels D'Alembert et Euler ont fondé la métaphysique du calcul différentiel; mais le premier mit plus de précision dans les termes de sa théorie, déduite de la considération des limites, que j'ai déjà indiquée (4).

81. Je ne parlerai point ici de la théorie que Newton, qui partage avec Leibnitz la gloire d'avoir découvert le Calcul différentiel et le Calcul intégral, a donnée de ces calculs, parce qu'elle tient à la considération du mouvement, qui est étrangère à l'analyse et à la géométrie, et qui d'ailleurs ne saurait, par elle-même, dispenser de considérer des quantités évanouissantes. (Voyez à ce sujet le *Discours préliminaire.*)

Landen, compatriote de Newton, paraît être le premier qui ait pensé à ramener le Calcul différentiel à des notions purement algébriques. Ses écrits sur l'*Analyse des résidus* (*The residual analysis*), publiés vers 1760, présentent ce calcul comme ayant pour premier objet de trouver le développement du quotient de la différence de deux fonctions pareilles des quantités x et x', divisée par la différence de ces quantités, c'est-à-dire, le développement de l'expression

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x};$$

et lorsque ce quotient est obtenu de manière à ne conserver aucune trace du diviseur $x' - x$, on y fait $x' = x$, ensorte que le dernier but du calcul est de parvenir à une valeur particulière (*speoial value*) du rapport ci-dessus. Je n'entrerai pas ici dans le détail des procédés imaginés par Landen, pour former les développemens dont il a besoin; on peut en prendre une idée dans le *Complément des Élémens d'Algèbre*, par l'usage que j'en fais pour démontrer la formule du binome, et développer les fonctions exponentielles et logarithmiques.

Il est bien facile de s'appercevoir que la recherche du développement considéré par Landen, rentre dans celle de la limite du rapport des accroissemens des quantités x et $f(x)$, et ne dépend que de la possibilité de développer, suivant les puissances de l'accroissement de x, le second état de $f(x)$. En effet, si l'on pose

$$x' = x + h,$$
$$f(x') = f(x+h) = f(x) + Ph + Qh^2 + Rh^3 + \text{etc.},$$

on aura

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{Ph + Qh^2 + Rh^3 + \text{etc.}}{h}$$
$$= P + Qh + Rh^2 + \text{etc.};$$

le dernier résultat n'étant plus divisé par h, on y pourra faire $h = 0$, c'est-à-dire $x' = x$, et on tombera sur la fonction que j'ai nommée *coefficient différentiel*, qui, comme on le voit, est identique avec celle que Landen appelle *valeur spéciale*.

Il est évident que l'existence de cette valeur, relativement à une fonction quelconque, tient à la possibilité (démontrée dans le n° 17) de développer $f(x+h)$ suivant les puissances de h, dans la forme assignée, car dans toute autre il resterait, soit au dividende, soit au diviseur, des puissances de h, et le rapport de $f(x') - f(x)$ à $x' - x$, deviendrait nul ou infini, par la supposition de $x' = x$. Cette difficulté, commune à la recherche des coefficiens différentiels, par la considération des limites, aussi bien qu'à la théorie de Landen, ne s'est présentée ni à ce Géomètre, ni à D'Alembert, parce que n'ayant en vue que de parvenir aux coefficiens différentiels des fonctions algébriques et des fonctions transcendantes connues, et les obtenant par l'application de leurs méthodes, ils ne pouvaient concevoir aucun doute sur l'existence de ces coefficiens (*). C'est Euler qui, en récapitulant les formes que

---

(*) L'existence de la limite du rapport $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$, peut être prouvée immédiatement d'une manière fort simple. Voici la démonstration qu'en a donnée M. Binet aîné, professeur de Mathématiques transcendantes au Lycée de Rennes.

Soit $x'-x=h$; si on conçoit l'intervalle h, partagé en un nombre n d'intervalles égaux, et que l'on prenne successivement pour x' et pour x deux valeurs consécutives dans la série

$$x, \quad x+\frac{h}{n}, \quad x+\frac{2h}{n}, \quad x+\frac{3h}{n}, \ldots\ldots x+\frac{nh}{n},$$

le rapport $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$, pour chacun de ces derniers intervalles, recevra les valeurs

$$\frac{f\left(x+\frac{h}{n}\right)-f(x)}{\frac{h}{n}}, \quad \frac{f\left(x+\frac{2h}{n}\right)-f\left(x+\frac{h}{n}\right)}{\frac{h}{n}}, \quad \frac{f\left(x+\frac{3h}{n}\right)-f\left(x+\frac{2h}{n}\right)}{\frac{h}{n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{f\left(x+\frac{nh}{n}\right)-f\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right)}{\frac{h}{n}}, \quad (A)$$

qui seront de même signe, si la fonction proposée est toujours croissante, ou toujours décroissante, depuis x jusqu'à x', ce qui ne saurait manquer d'arriver en prenant la différence $x'-x$ d'une petitesse convenable; et dans cette hypothèse, la somme des valeurs ci-dessus, en y effaçant les termes de signes contraires, se réduit à

$$\frac{f(x+h)-f'x)}{\frac{h}{n}}=n\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}=n\left\{\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\right\};$$

Il suit de là que, quelque grand que soit le nombre n, et par conséquent quelque petite que soit la différence $\frac{h}{n}$ entre deux valeurs consécutives de x et de x', les quantités (A) ne sauraient être toutes plus petites ou toutes plus grandes que $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$; puisque dans le premier cas, un nombre n de ces quantités ne sauraient former une somme aussi grande que $n\left\{\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\right\}$, et dans le second cas, une somme aussi petite que cette même quantité. Mais la grandeur étant assujétie, dans ses changemens, à la loi de continuité, ne peut s'évanouir sans devenir d'abord aussi petite que l'on voudra, ou passer à l'infini, sans devenir auparavant aussi considérable qu'on prenait l'accroissement des fonctions connues, lorsqu'on le développait en série, a énoncé le premier, comme un théorème général, que pour toute fonction, cet accroissement était de la forme

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{etc.},$$

ω désignant l'accroissement de x.

Frappé de l'origine lumineuse et féconde que cette énonciation donnait au calcul différentiel, et par laquelle toutes les branches de ce calcul paraissaient beaucoup mieux liées qu'elles ne l'avaient été jusques-là, M. Lagrange, comme je l'ai déjà dit, en fit, dès 1772, la base d'une exposition purement analytique des principes du calcul différentiel; mais il ne s'engagea point alors dans les considérations qui pouvaient justifier le théorème d'Euler, établi seulement par induction : ce n'est que dans la *Théorie des fonctions analytiques*, qu'il s'en est occupé pour la première fois, et s'est attaché à écarter non-seulement du calcul différentiel en lui-même, mais encore de son application à la Géométrie et à la Mécanique, toute idée d'infiniment petits et de limites; et il introduisit à cet effet des signes nouveaux. En partageant avec toute l'Europe, le respect attaché au nom et aux travaux de M. Lagrange, j'oserai néanmoins n'être pas de l'avis de cet homme si justement célèbre, sur les motifs qui paraissent le porter à introduire une nouvelle manière d'écrire les résultats du calcul différentiel; car je crois qu'il est facile de prouver que l'ancienne n'a point en elle-même l'*inconvénient de rappeler continuellement l'idée fausse des infiniment petits*.

82. On a vu jusqu'ici comment les circonstances les plus compliquées dans la dérivation des coefficiens différentiels, peuvent s'exprimer en n'employant que la caractéristique proposée par Leibnitz, et adoptée partout, excepté en Angleterre; il me semble pourtant que ceux qui auront bien saisi l'esprit du n° 4, et les formes de calcul qui en résultent, ne pourront trouver aucune contradiction entre la notation et le point-de-vue sous lequel, d'après M. Lagrange, nous avons présenté le Calcul différentiel. Sur quelques notions préliminaires que l'on s'ap-

---

le voudra : donc toutes les valeurs de $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$, ne peuvent être ni nulles, ni infinies, dans l'intervalle de x' à x, quelque petit qu'on le suppose : donc ce rapport est susceptible d'une limite assignable.

puie, la fonction que j'ai nommée *coefficient différentiel*, sera toujours le multiplicateur de la première puissance de l'accroissement de la variable, dans le développement de celui de la fonction primitive; et tant que l'on attachera au mot *différence* la signification qu'on lui donne, même en Arithmétique, le mot *différentielle* ne fera naître aucune difficulté; car, quelle que soit la raison pour laquelle on ne considère que le premier terme de la différence, toujours est-il vrai qu'en se bornant à ce terme, on n'aura qu'une différence tronquée, *une différentielle*, et cela *sans rien prononcer sur sa grandeur absolue, sans rappeler en aucune manière l'idée d'infiniment petit.*

Le changement de métaphysique ne saurait donc conduire à un changement de notation, si, comme il est aisé de s'en convaincre, la notation ancienne a des avantages marqués sur celles que l'on voudrait lui substituer.

Il faut d'abord observer qu'elle doit être débarrassée des parenthèses qu'Euler employait. En effet, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, sont aussi clairs que $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, quand on est prévenu que z est une fonction de deux variables indépendantes x et y, ce que l'énoncé de la question, ou le sens dont il est susceptible, indique toujours; et l'on ne peut plus confondre alors $\frac{dz}{dx}$ avec la différentielle totale de z, divisée par dx, c'est-à-dire avec

$$\frac{\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy}{dx},$$

expression qui, se réduisant à

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

ne signifie quelque chose qu'autant que l'on regarde, au moins implicitement, y comme une fonction de x. MM. Lagrange et Legendre avaient déjà depuis long-temps supprimé les parenthèses dans leurs calculs, et j'ai cru pouvoir, sans inconvénient, suivre l'exemple qu'ils avaient donné. Fontaine, qui, le premier, appliqua la notation de Leibnitz aux différentielles naturelles, proposa de désigner par $\frac{1}{dx}d\mu$ le rapport de dx à la différentielle totale de μ, afin de le distinguer du coefficient de dx, dans cette différentielle, ce qui est assurément fort simple, et peut servir dans un cas assez important : c'est lorsque l'on établit entre plusieurs des variables contenues dans la fonction, une nouvelle dépendance, qui fait varier en même temps plusieurs de ces quantités, qui avaient été d'abord différentiées isolément. Il naît de là de nouveaux coefficiens différentiels qu'il ne faut pas confondre avec les premiers.

On pourrait encore adapter à ce cas, une notation déjà mise en usage, sous un autre point-de-vue, par les premiers Géomètres de notre siècle, et qui me paraît très-expressive. Comme il n'arrive que par la réduction implicite du nombre de variables indépendantes, on écrirait au bas de la fonction les variables auxquelles elle est rapportée, laissant la fonction simple pour les circonstances où l'on y fait varier séparément toutes les quantités qui entrent explicitement dans sa composition. Par exemple, u désignant une fonction des variables x, y, z, dans laquelle on regarde z comme dépendante de x et de y, ce qui réduit u en fonction implicite de x et de y, on pourrait écrire

$$\frac{du_{x,y}}{dx} \text{ au lieu de } \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx},$$

ou bien si les différentielles relatives aux variations explicites se présentaient plus rarement que les autres, on retiendrait $\frac{du}{dx}$ pour le coefficient différentiel relatif à la variation de tout ce qui dépend de x, et on mettrait $\frac{du_x}{dx}$, $\frac{du_y}{dy}$, $\frac{du_z}{dz}$, pour les trois coefficiens différentiels relatifs aux variables considérées comme indépendantes; mais il serait encore plus simple d'appliquer un accent au d, ou de lui donner une forme particulière, comme celle-ci : ∂, ou enfin d'employer un δ, etc. pour marquer les différentielles relatives aux variations implicites. Ces conventions, faciles à imaginer et à saisir, montrent qu'on peut trouver aisément des ressources pour exprimer, sans sortir de l'esprit de la notation générale, les circonstances passagères dans lesquelles on peut avoir besoin d'abréger les développemens qu'elle exigerait.

Après avoir montré que la notation de Leibnitz satisfait à tout, jetons un coup-d'œil sur les autres, en commençant par celles qui sont employées dans la *Théorie des fonctions analytiques*. La première, qui se rapporte aux fonctions d'une seule variable, consiste à substituer à la variable y, regardée comme fonction de x, par exemple, le symbole $f(x)$, et à représenter les coefficiens différentiels

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \text{etc.}$$

par $\mathrm{f}'(x)$, $\mathrm{f}''(x)$, $\mathrm{f}'''(x)$, etc.;

mais les accens ne peuvent servir seuls que lorsqu'il ne s'agit encore que des fonctions de deux variables, en affectant les accens supérieurs aux variations de l'une, et les accens inférieurs aux variations de l'autre. C'est ainsi que M. Lagrange a d'abord exprimé les coefficiens différentiels

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dy^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy},$$

d'une fonction de deux variables, par

$$\mathrm{f}'(x, y), \quad \mathrm{f}_{\prime}(x, y), \quad \mathrm{f}''(x, y), \quad \mathrm{f}_{\prime\prime}(x, y), \quad \mathrm{f}'_{\prime}(x, y).$$

Pour aller au-delà, cet illustre Géomètre écrit entre des parenthèses, après le signe de la fonction, la quantité, ou les quantités, qu'il regarde comme variables, et désigne par

$$\mathrm{f}'(x), \quad \mathrm{f}'(y), \quad \mathrm{f}'(z),$$
$$\mathrm{f}''(x), \quad \mathrm{f}''(y), \quad \mathrm{f}''(z), \quad \mathrm{f}''(x, y), \quad \mathrm{f}''(x, z), \quad \mathrm{f}''(y, z),$$

les coefficiens différentiels du premier et du second ordre, pour la fonction $\mathrm{f}(x, y, z)$.

De quelle quantité de parenthèses très-resserrées ne faudrait-il pas charger les calculs, en suivant cette marche? Les accens, dont le nombre devient bientôt assez difficile à saisir, sont-ils aussi commodes que les exposans de la caractéristique d? Enfin, quand on veut représenter plusieurs fonctions à-la-fois, ne faut-il pas introduire d'autres signes que la lettre f?

Il paraît que cette dernière considération a engagé M. Lagrange à modifier de nouveau sa notation, en affectant aux coefficiens différentiels du premier et du second ordre de la fonction Z, dépendante des trois variables x, y et z, les signes suivans:

$$\left(\frac{Z'}{x'}\right), \quad \left(\frac{Z'}{y'}\right), \quad \left(\frac{Z'}{z'}\right),$$
$$\left(\frac{Z''}{x'^2}\right), \quad \left(\frac{Z''}{y'^2}\right), \quad \left(\frac{Z''}{z'^2}\right), \quad \left(\frac{Z''}{x'y'}\right), \quad \left(\frac{Z''}{x'z'}\right), \quad \left(\frac{Z''}{y'z'}\right).$$

(Note X de la *Résolution des Équations numériques*.)

Cette quatrième notation est encore sujette aux difficultés qui naissent de l'emploi des accens et de l'embarras des parenthèses; j'avouerai même que la troisième ne comportant point de dénominateurs, qui, dans l'impression, exigent une double ligne, me paraît préférable dans les cas où l'on ne considérerait qu'une ou deux fonctions différentes. Mais il faut surtout remarquer que la quatrième notation de M. Lagrange présente pour chaque coefficient différentiel le même nombre de signes que celle d'Euler et celle de Waring, le premier analyste qui ait transporté en Angleterre le calcul des différentielles partielles. Voici un exemple de ces trois notations placées dans l'ordre de leurs dates.

$$\left(\frac{d^3Z}{dx^2\,dy}\right), \qquad \left(\frac{\dddot{Z}}{\ddot{x}\dot{y}}\right), \qquad \left(\frac{Z'''}{x'^2y'}\right).$$

Dans la seconde, qui est celle de Waring, les points adoptés par Newton et par tous les Géomètres anglais, ont pris la place des d, dont s'est servi Leibnitz, et tous les Géomètres du continent, sortis de son école.

Euler a insisté, dans la Préface de ses *Institutiones calculi differentialis*, sur les défauts de la notation anglaise, qui devient difficile à écrire et même à saisir, dès que le nombre de points surpasse trois; et on ne voit pas comment il serait possible de l'indiquer par des chiffres, sans risquer de les confondre avec les exposans : on sent, d'ailleurs, qu'il est aisé d'oublier un point en écrivant, ou qu'il cesse de paraître dans l'impression. Plusieurs de ces objections s'appliquent à la notation de M. Lagrange, qui aurait en outre l'inconvénient assez grand de priver souvent les Analystes de la faculté de représenter par la même lettre, accentuée diversement, des quantités qui ont des significations analogues. L'emploi du d n'est sujet à aucune de ces difficultés; cette caractéristique est de la plus grande évidence, surtout si, en considérant qu'elle est le signe d'une opération, on l'écrit en romain, en laissant la lettre italique pour la désignation des grandeurs, ce que n'a point observé Euler : enfin les exposans qui marquent le nombre de fois que la différentiation a été répétée, étant appliqués à la caractéristique d, se présentent avec la plus grande clarté.

83. Landen, qui fondait le calcul différentiel sur d'autres principes que Leibnitz et Newton (81), avait également jugé à propos d'établir de nouveaux signes; mais ses ouvrages, quoique fort ingénieux, paraissent avoir été peu lus. Il n'en pouvait être de même de ceux de M. Lagrange; et en attirant l'attention de la plupart des Géomètres, sur la métaphysique du calcul différentiel, il a suggéré à quelques-uns des idées qu'ils ont aussi voulu exprimer par des signes qui leur fussent

propres, quoique les anciens, ainsi que je crois l'avoir prouvé, pussent s'y prêter également. Je compte à présent huit manières différentes d'exprimer le coefficient différentiel d'une fonction, savoir :

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad [x \perp y],$$

$$f'(x), \quad \frac{y'}{x'}, \quad \varepsilon y, \quad \frac{\partial y}{x}, \quad Dy.$$

La première est tirée des signes de Leibnitz; la seconde, de ceux de Newton; la troisième est celle qu'avait adoptée Landen, dans les ouvrages que j'ai cités plus haut; la quatrième et la cinquième sont employées par M. Lagrange.

La sixième a été proposée par M. Pasquich, dans un intéressant ouvrage qu'il a publié en 1799, sur le Calcul différentiel et intégral, et sur la Mécanique, où, tirant les principes du Calcul différentiel de la limite du rapport de l'accroissement d'une fonction à celui de sa variable, il appelle cette limite *raison différentielle*, et le signe qui la représente, *exposant de la raison différentielle.*

M. Gruson se sert de la septième, dans ses *Mémoires sur le Calcul d'exposition*, qui répond au développement des fonctions en séries, (*Acad. de Berlin, années* 1798, 1799).

Enfin ce développement, qui depuis quelque temps occupe la plupart des Analystes allemands, a fait naître à M. Krampt, géomètre déjà connu par un Traité très-remarquable sur les réfractions astronomiques, l'idée de lier plus intimement le Calcul différentiel à l'Algèbre ordinaire, en ne définissant le premier que par le procédé qu'il faut suivre pour passer de la fonction

$$Ax^n + Bx^p + Cx^q \ldots\ldots \text{etc.},$$

à la fonction

$$nAx^{n-1} + pBx^{p-1} + qCx^{q-1} \ldots\ldots \text{etc.},$$

opération qu'on a occasion d'effectuer en Algèbre, pour la recherche des racines égales des équations (*Élém. d'Algèbre*), et qui conduit à une *nouvelle fonction dérivée de la première, en multipliant chaque terme par l'exposant de la variable, et diminuant ensuite cet exposant d'une unité* (*).

(*) On s'étonnera peut-être de ce que je n'ai point parlé, dans l'énumération ci-dessus, des nombreuses notations qu'Arbogast a employées dans son *Traité des*

Je ne dois pas oublier de protester ici combien je suis éloigné de l'intention d'exercer aucune critique sur les ouvrages où sont proposées les notations que je viens de rapprocher, et dans lesquels je reconnais avec empressement qu'il y a des choses très-intéressantes; mais je demande la permission de faire observer que c'est un principe avoué de tout le monde, qu'il ne faut changer les signes reçus que lorsqu'ils sont en contradiction manifeste avec les idées qu'ils doivent représenter, ou lorsqu'on peut les abréger notablement, ou enfin lorsqu'en les modifiant, on les rend propres à développer de nouveaux rapports qu'on n'aurait pas apperçus sans cela. Les signes du Calcul différentiel ne sont dans aucun de ces cas: tout ce dont M. Lagrange a enrichi l'Analyse, dans sa *Théorie des fonctions*, dans sa *Résolution des Équations numériques*, dans ses *Leçons sur le Calcul des fonctions*, peut être exprimé, avec autant de simplicité que d'élégance, par les caractères usités, comme on l'a pu voir dans la première édition de ce Traité, et comme on en sera de plus en plus convaincu par celle-ci, pour laquelle j'apporterai le plus grand soin à profiter des excellens écrits que je viens de citer. Il y a plus: j'ai la persuasion que le Calcul des fonctions ne saurait atteindre à rien que le grand Géomètre qui en est l'inventeur ne puisse déduire du Calcul différentiel; et il me semble d'ailleurs incontestable que le passage de l'Algèbre au Calcul différentiel, présenté comme il l'est dans ce chapitre, ou par les limites, comme dans le Traité élémentaire que j'en ai publié, ne soit aussi simple que le passage de l'Algèbre au Calcul des fonctions.

Avant donc d'innover dans les signes, déjà si multipliés en Analyse, que l'on veuille bien penser à l'embarras qu'éprouvent ceux qui l'étudient et qui voudraient en embrasser l'ensemble, d'avoir sans cesse à rapprocher des formules et des opérations analogues, rendues par des caractères différens. C'est la crainte de voir ouvrir cette nouvelle source de difficultés, qui m'a engagé dans des détails dont la longueur sera justifiée par l'influence que ne peut manquer d'exercer l'homme célèbre qui semblait avoir projeté une révolution à cet égard; et l'on trouvera tout simple qu'en attendant l'époque où des progrès bien caractérisés légitiment d'une manière incontestable l'emploi de signes nouveaux, on tâche de défendre ceux avec lesquels la *Mécanique analytique* et la *Mécanique céleste* sont écrites.

---

dérivations; mais il faut observer qu'elles s'appliquent à des fonctions qui ne sont pas précisément les coefficiens différentiels; à la vérité, elles s'y rapportent facilement; aussi en sera-t-il question dans ce qui va suivre.

CHAPITRE II.

Usage du Calcul différentiel pour développer les fonctions.

84. Le théorème de Taylor offre un moyen aussi simple qu'élégant de réduire les fonctions en séries, et voici comment: Application du théorème de Taylor, aux développemens des fonctions en séries.

Si on représente une fonction quelconque $f(x)$ par y, on a (20)

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4}+\text{etc.};$$

en faisant $x=0$, $f(x+h)$ se change en $f(h)$, et en désignant par Y, Y', Y'', Y''', etc. ce que deviennent y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. dans cette hypothèse, on aura

$$f(h)=Y+Y'\frac{h}{1}+Y''\frac{h^2}{1.2}+Y'''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Cette équation ayant lieu quelle que soit la valeur de h, on pourra écrire x au lieu de h, ce qui ne changera rien aux quantités Y, Y', etc., qui ne contiennent point cette lettre; et on aura alors

$$f(x)=Y+Y'\frac{x}{1}+Y''\frac{x^2}{1.2}+Y'''\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Les opérations que nous avons faites sur la série

$$y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.},$$

pour parvenir à la précédente, se réduisent à supposer $x=0$ dans les quantités y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., et à mettre ensuite x au lieu de h; nous pouvons donc écrire dorénavant

$$f(x)=y+\frac{dy}{dx}\frac{x}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

en nous rappelant qu'*il faudra faire* $x=0$ *dans la fonction* y *et dans chacun de ses coefficiens différentiels*. Quelques exemples vont éclaircir ceci.

85. Soit, 1°. $y=a^x$ la fonction à développer; lorsqu'on fait $x=0$, on a $a^x=a^0=1$, d'où $Y=1$; de plus

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy}{dx}=a^x\,\mathrm{l}a\\ \frac{d^2y}{dx^2}=a^x(\mathrm{l}a)^2\\ \frac{d^3y}{dx^3}=a^x(\mathrm{l}a)^3\\ \text{etc.}\end{array}\right\}\text{ donnent }\left\{\begin{array}{l}Y'=\mathrm{l}a\\ Y''=(\mathrm{l}a)^2\\ Y'''=(\mathrm{l}a)^3\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

par conséquent $a^x=1+\mathrm{l}a\frac{x}{1}+(\mathrm{l}a)^2\frac{x^2}{1.2}+(\mathrm{l}a)^3\frac{x^3}{1.2.3}+$ etc.

86. Il est aisé de s'appercevoir par ce procédé, qu'on ne saurait développer, suivant les puissances entières et positives de x, une fonction qui serait telle que les quantités Y, Y', Y'', Y''', etc. deviendraient infinies. Si on avait, par exemple, $y=\mathrm{l}x$, dans ce cas, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2}{x^3}$, etc., et la supposition de $x=0$, rendrait ces quantités infinies aussi bien que y. Nous remarquerons en passant qu'il n'est pas nécessaire que toutes les quantités Y, Y', Y'', etc. deviennent infinies à-la-fois pour que la réduction en série ne puisse avoir lieu dans la forme supposée; nous reviendrons sur ce sujet et nous ferons connaître à quoi tient la difficulté.

Si on s'était proposé $y=\mathrm{l}(a+x)$ on aurait eu

$$Y=\mathrm{l}a,\quad Y'=\frac{1}{a},\quad Y''=-\frac{1}{a^2},\quad Y'''=\frac{2}{a^3},\quad \text{etc.}$$

et $\mathrm{l}(a+x)=\mathrm{l}a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-$ etc.

87. On appliquera sans peine aux fonctions $\sin x$ et $\cos x$, le procédé que nous venons d'exposer; on trouvera, pour la première,

$$Y=0,\quad Y'=1,\quad Y''=0,\quad Y'''=-1,\quad \text{etc.}$$

d'où $$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc.},$$

et pour la seconde,

$$Y=1,\quad Y'=0,\quad Y''=-1,\quad Y'''=0,\quad \text{etc.}$$

d'où $$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}$$

Ces résultats, ainsi que les précédens, sont conformes à ceux de l'Introduct.

88. Si on représente par y un arc de cercle dont le sinus soit x, on aura l'équation différentielle $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, qui nous conduira au développement de l'arc suivant les puissances du sinus. En effet on en tirera

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$
$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}},$$
$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} = 3.3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 3.5x^3(1-x^2)^{-\frac{7}{2}},$$
$$\frac{\mathrm{d}^5y}{\mathrm{d}x^5} = 3.3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 3.5.6x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} + 3.5.7x^4(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}.$$

En faisant $x=0$, on trouvera

$$Y=0, \quad Y'=1, \quad Y''=0, \quad Y'''=1, \quad Y^{\text{IV}}=0, \quad Y^{\text{V}}=3.3, \quad \text{etc.},$$

et par conséquent $y = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3.3x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$; mais nous pouvons obtenir immédiatement le terme général de cette suite, en observant que $\frac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}x^{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{d}^n.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; car l'expression générale de $\mathrm{d}^n.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donnée page 185, s'anéantit lorsqu'on suppose $x=0$, toutes les fois que le nombre n est impair, et lorsqu'il est pair, elle se réduit à son dernier terme, qui devient

$$\frac{1.3.5.7\ldots(n-1)}{2.4.6.8\ldots\quad n} n(n-1)\ldots\ldots1,$$

en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur. Le terme général $\frac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}x^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$, de la série cherchée, deviendra donc, en mettant pour $\frac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}x^{n+1}}$ la valeur de $\frac{1}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{d}^n.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qu'on vient de trouver, $\frac{1.3.5.7\ldots(n-1)x^{n+1}}{2.4.6.8\ldots n(n+1)}$: on voit d'ailleurs que $n+1$ sera nécessairement un nombre impair.

En écrivant $\sin y$ au lieu de x, et donnant à n les valeurs successives 0, 2, 4, 6, etc. on formera la série suivante :

$$y = \sin y + \frac{\sin y^3}{2.3} + \frac{3\sin y^5}{2.4.5} + \frac{3.5\sin y^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7\sin y^9}{2.4.6.8.9} + \text{etc.}$$

La manière dont nous y sommes parvenus a l'avantage de faire connaître la loi que suivent ses termes, et qu'on n'appercevait pas d'abord par le procédé du n° 58 de l'Introduction.

C'est par cette série que Newton a calculé la longueur de la circonférence. En faisant $\sin y = 1$, elle donne l'arc de

$$90° = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{3.5}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9} + \text{etc.}$$

Si on supposait $\sin y = \frac{1}{2}$, on aurait alors l'arc de 30° par une série encore plus convergente que la précédente, car on trouverait

$$\text{arc de } 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4.3} + \frac{3}{2^6.4.5} + \frac{3.5}{2^8.4.6.7} + \frac{3.5.7}{2^{10}.4.6.8.9} + \text{etc.}$$

On parviendrait à connaître la longueur de la circonférence entière, en multipliant le premier résultat par 4, ou le second par 12.

89. Passons à la recherche de l'arc par sa tangente. En nommant y l'arc et x sa tangente, on a

$$dy = \frac{dx}{1+x^2} = dx(1+x^2)^{-1},$$

d'où il suit

$$\frac{dy}{dx} = (1+x^2)^{-1},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2x(1+x^2)^{-2},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3},$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 24x(1+x^2)^{-3} - 48x^3(1+x^2)^{-4},$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 24(1+x^2)^{-3} - 288x^2(1+x^2)^{-4} + 384x^4(1+x^2)^{-5};$$

en faisant $x = 0$, on trouve

$$Y = 0,\ Y' = 1,\ Y'' = 0,\ Y''' = -2,\ Y^{\text{IV}} = 0,\ Y^{\text{V}} = 2.3.4, \text{ etc.}:$$

on a donc $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$

La loi se manifeste dès les premiers termes; mais pour s'assurer qu'elle est également observée dans les suivans, on aura recours, si l'on veut, à la formule qui exprime la différentielle $n^{ième}$ de la fonction

$(a+bx+cx^2)^r$, page [illegible]3. Dans cette application,

$$r=-1,\quad a=1,\quad b=0,\quad c=1;$$

et il s'ensuit

$$p=1+x^2,\quad q=2x.$$

On voit d'abord, par la valeur de q, que la supposition de $x=0$, anéantit toute l'expression, quand n est impaire, mais que dans le cas contraire le dernier terme, qui est alors

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)p^{r-n}dx^n.n(n-1)(n-2)\ldots 1.c^{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}.(r-n+1)(r-n+2)\ldots\left(r-\frac{n}{2}\right)},$$

subsiste; et en y faisant $r=-1$, $p=1$, $c=1$, il se réduit à $\pm 1.2.3\ldots n dx^n$, selon que $\frac{n}{2}$ est un nombre pair ou impair. Telle est la valeur particulière de $d^n.(1+x^2)^{-n}$; et en observant qu'elle répond à $d^{n+1}y$, le terme général $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}.\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$, deviendra $\pm\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (*).

(*) Je crois devoir faire remarquer que si dans l'équation $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on réduisait $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en série, on aurait

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}x^2}{1}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}x^4}{1.2}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}x^6}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots\frac{(n-1)}{2}}{1.2\ldots\ldots\frac{n}{2}}x^n+\text{etc.},$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}x^n+\text{etc.}$$

En représentant par A, B, C, ... N, O les coefficiens des termes de la dernière série, on aura

$$\frac{dy}{dx}=1+Ax^2+Bx^4+Cx^6+\ldots+Nx^n+Ox^{n+2}+\text{etc.},$$

et en différentiant, il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2Ax+4Bx^3+6Cx^5+\ldots+nNx^{n-1}+(n+2)Ox^{n+1}+\text{etc.},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2A+3.4Bx^2+5.6.Cx^4+\ldots+(n-1)nNx^{n-2}+(n+1)(n+2)Ox^n+\text{etc.}$$

. . . .

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\ldots\ldots\ldots 1.2\ldots nN+2.3\ldots(n+2)Ox^2+\text{etc.}$$

90. Je vais passer à un exemple dans lequel la fonction à développer sera donnée implicitement par une équation différentielle, et qui montrera suffisamment de quelle manière il faudrait opérer dans les cas plus compliqués du même genre.

En appelant x l'arc, et y sa tangente, on a $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$, et par conséquent $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$: l'expression de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dépend donc alors de la fonction y elle-même; aussi les coefficiens différentiels, au lieu d'être donnés explicitement par la variable indépendante, ne pourront se déterminer que les uns par les autres, au moyen des différentiations successives de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2,$$

qui donnera

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=2\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}+2y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},$$

etc.

Pour passer de là aux valeurs des coefficiens Y, Y', Y'', etc., il faudra faire $x=0$; mais n'ayant point d'équation primitive entre x et y, on ne connaîtrait point Y, si l'on ne savait d'ailleurs qu'à l'arc $x=0$, répond une tangente $y=0$. Avec cette valeur et les équations ci-dessus,

---

Lorsque $x=0$, tous les coefficiens d'un ordre pair disparaissent, et $\frac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}x^{n+1}}$ se réduit à $1.2\ldots n.N$: donc $\frac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}x^{n+1}}\,\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ deviendra

$$\frac{Nx^{n+1}}{n+1}, \quad \text{ou} \quad \frac{1.3.5\ldots(n-1)x^{n+1}}{2.4.6\ldots\ldots n(n+1)},$$

en mettant pour N sa valeur.

En réduisant en série le binome $(1+x^2)^{-1}$ dans l'équation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}$, on aura $N=\pm1$, selon que $\frac{n}{2}$ sera un nombre pair ou impair; et le terme général $\frac{Nx^{n+1}}{n+1}$ deviendra $\pm\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

poussées jusqu'au septième ordre, on obtient

$$Y = 0,\quad Y' = 1,\quad Y'' = 0,\quad Y''' = 2,\quad Y^{\text{IV}} = 0,$$
$$Y^{\text{V}} = 16,\quad Y^{\text{VI}} = 0,\quad Y^{\text{VII}} = 272,$$

d'où il résulte

$$y = \frac{x}{1} + \frac{2x^3}{1.2.3} + \frac{16x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{272.x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Il est visible que pour trouver le terme général de cette série, il faudrait connaître l'expression de $d^n.(1+y^2)$, au moins dans le cas de $x=0$; mais on voit qu'aucune différentielle de y ne pouvant être prise pour constante, l'expression cherchée doit les contenir toutes jusqu'à celle de l'ordre n inclusivement: on ne peut donc, de cette manière, exprimer le coefficient $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ qu'au moyen de tous ceux qui le précèdent.

Je ne m'arrêterai un moment à cette recherche, que parce qu'elle me fournira l'occasion de faire connaître deux résultats différentiels remarquables par leur forme.

91. J'observe d'abord qu'on a $d^n(1+y^2) = d^n.y^2 = d^n(y.y)$, et que c'est la réduction des termes semblables qui empêche de reconnaître la loi de formation des différentielles successives de y^2. Pour éviter cette réduction, je suppose qu'on ait yz au lieu de y^2; alors en différentiant plusieurs fois de suite, je trouve

$$\begin{aligned}
d.yz &= ydz + zdy\\
d^2.yz &= yd^2z + 2dydz + zd^2y\\
d^3.yz &= yd^3z + 3dyd^2z + 3dzd^2y + zd^3y\\
d^4.yz &= yd^4z + 4dyd^3z + 6d^2yd^2z + 4dzd^3y + zd^4y\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

L'analogie de ces formules avec les puissances du binome est sensible, et on la rend tout-à-fait évidente par un procédé semblable à celui du n° 32. En effet, soit

$$d^n.yz = yd^nz + Ady d^{n-1}z + Bd^2yd^{n-2}z + Cd^3yd^{n-3}z + \text{etc.},$$

A, B, C, etc. étant des coefficiens constans; si on différentie cette équation, il viendra

$$\mathrm{d}^{n+1}.yz = y\mathrm{d}^{n+1}z \left.\begin{matrix} +A \\ +1 \end{matrix}\right\} \mathrm{d}y\mathrm{d}^{n}z \left.\begin{matrix} +B \\ +A \end{matrix}\right\} \mathrm{d}^{2}y\mathrm{d}^{n-1}z \left.\begin{matrix} +C \\ +B \end{matrix}\right\} \mathrm{d}^{3}y\mathrm{d}^{n-2}z + \text{etc.},$$

et on voit par là, comme dans le n° cité, que les coefficiens A, B, C, etc. se forment, ainsi que ceux des termes correspondans des puissances du binome; on aura donc

$$\mathrm{d}^{n}.yz = y\mathrm{d}^{n}z + \frac{n}{1}\mathrm{d}y\mathrm{d}^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{d}^{2}y\mathrm{d}^{n-2}z + \text{etc.}:$$

et le développement de $(\mathrm{d}z+\mathrm{d}y)^n$ donnera par conséquent celui de $\mathrm{d}^n.yz$, en appliquant à la caractéristique d les exposans que portent les dz et les $\mathrm{d}y$, et en observant que $\mathrm{d}^0y = y$ et $\mathrm{d}^0z = z$.

On tirerait l'expression de $\mathrm{d}^n.ytu$ de celle de $\mathrm{d}^n.yz$, en substituant tu à z et $\mathrm{d}.tu$, $\mathrm{d}^2.tu$, $\mathrm{d}^3.tu$, etc. à $\mathrm{d}z$, d^2z, d^3z, etc.; on trouverait ainsi un résultat parfaitement analogue au développement du trinome $(y+t+u)^n$.

Cela posé, si dans $\mathrm{d}^n.yz$ on fait $z=y$, on aura l'expression de $\mathrm{d}^n.y^2$; et il est aisé de voir que tous les termes également éloignés des extrêmes de la formule deviendront égaux entre eux: or le nombre total de ces termes étant $n+1$, il est évident qu'il suffira de prendre deux fois la somme des $\frac{n+1}{2}$ premiers termes, pour avoir la valeur de toute la formule, si n est impair; mais lorsque n est pair, elle contient un terme moyen qui occupe le rang marqué par $\frac{n}{2}+1$, et qui n'est point répété: on doit alors prendre le double des $\frac{n}{2}$ premiers termes et y ajouter ce terme moyen.

92. A l'aide de ces considérations, et en vertu de l'équation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1+y^2$, qui donne $\frac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}x^{n+1}} = \frac{\mathrm{d}^n(1+y^2)}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n.y^2}{\mathrm{d}x^n}$, on formera successivement $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$, $\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$, $\frac{\mathrm{d}^5y}{\mathrm{d}x^5}$, etc.; mais en faisant $x=0$, tous les coefficiens différentiels d'un ordre pair s'anéantiront, et il ne restera que ceux qui sont d'un ordre impair: en substituant donc les lettres Y', Y''', Y^{v}, etc., à chacun de ces derniers, on trouvera

$$Y' = 1$$
$$Y''' = 2Y'Y'$$
$$Y^{v} = 2.4Y'Y'''$$
$$Y^{vii} = 2.6Y'Y^{v} + \frac{6.5.4}{1.2.3}Y'''Y'''$$
$$Y^{ix} = 2.8Y'Y^{vii} + 2\,\frac{8.7.6}{1.2.3}Y'''Y^{v}$$
$$Y^{xi} = 2.10Y'Y^{ix} + 2\,\frac{10.9.8}{1.2.3}Y'''Y^{vii} + \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}Y^{v}Y^{v},$$
etc.

On aura en général

$$Y^{(n+1)} = 2\left\{nY'Y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}Y'''Y^{(n-3)} + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}Y^{v}Y^{(n-5)} + \text{etc.}\right\}.$$

Il faudra avoir l'attention de ne pousser cette série que jusqu'au terme dont l'indice est $\frac{n}{2} - 1$, si $\frac{n}{2}$ est un nombre pair; et dans le cas où $\frac{n}{2}$ serait un nombre impair, comme on tomberait sur le terme moyen dont on a parlé plus haut, il ne faudrait prendre que la moitié de son coefficient. Tout ceci est analogue à ce qui a été dit relativement aux séries des sinus des arcs multiples, dans le n° 54 de l'Introduction, et sera facilement entendu par ceux qui prendront la peine de développer les formules qu'on a supprimées à cause de leur longueur.

93. Les formules des n^{os} 33 et 39, qui ne sont, à proprement parler, que l'extension du théorème de Taylor, peuvent s'employer de même à développer les fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables, en séries ordonnées suivant les puissances de ces variables, et où tous les termes qui les contiennent sont mis séparément en évidence. Cette application est si simple, que je ne ferai que l'indiquer par rapport aux fonctions de deux variables.

Si on fait $x = 0$, $y = 0$, dans la formule du n° 33, c'est-à-dire, dans u et dans chacun de ses coefficiens différentiels, elle donnera le développement de $f(h, k)$ ordonné suivant les puissances des quantités h et k; mais on pourra écrire x au lieu de h, y au lieu de k, et il en résultera

$$f(x,y) = u + \frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y\right\} + \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}xy + \frac{d^2u}{dy^2}y^2\right\} + \text{etc.},$$

en observant de faire x et y nuls, tant dans u que dans les expressions qu'on obtiendra pour chacun des coefficiens différentiels : ceci est absolument semblable à ce qui a été dit n° 84, et offre les mêmes remarques.

Usages des équations différentielles, pour développer les fonctions.

94. Tous les exemples précédens prouvent suffisamment que le théorème de Taylor offre un moyen très-simple pour trouver, l'un après l'autre, tous les termes du développement d'une fonction ; mais les exemples des n^os 88 et 89 montrent aussi que lorsque la fonction à développer, est composée d'une autre fonction dont les différentielles se compliquent de plus en plus, le même théorème laisse souvent à desirer la loi générale de leur formation.

En ne considérant même qu'une fonction explicite de la forme

$$y = X^n,$$

X désignant une fonction algébrique de x, on aurait

$$\frac{dy}{dx} = nX^{n-1}\frac{dX}{dx},$$
$$\frac{dy^2}{dx^2} = n(n-1)X^{n-2}\frac{dX^2}{dx^2} + nX^{n-1}\frac{d^2X}{dx^2},$$
etc.

valeurs dont le nombre des termes augmenterait à chaque différentiation. Cet inconvénient a donné lieu à beaucoup de recherches analytiques dont je ferai successivement connaître les plus importantes.

Euler, pour développer le polynome

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^m,$$

a combiné la méthode des coefficiens indéterminés, avec les considérations du n° 51, au moyen desquelles on fait disparaître la puissance indiquée. En posant

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.})^m = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.},$$

et prenant la différentielle logarithmique des deux membres de cette équation (13), on trouvera, après avoir divisé par dx,

$$\frac{m(\beta+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3+\text{etc.})}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}}=\frac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.}}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}$$

En faisant disparaître les dénominateurs, et en égalant ensemble les termes qui multiplient la même puissance de x dans chaque membre, on trouvera les mêmes équations qu'à la page 29, en changeant toutefois α en a, β en b, γ en c, δ en d, ε en e, etc. Le premier coefficient reste indéterminé dans ces calculs; mais il est évident qu'en faisant $x=0$, on aura $\alpha^m=A$.

Il est visible qu'en faisant ici $\beta=1$, $\gamma=0$, $\delta=0$, etc., on obtiendra le développement de $(\alpha+x)^m$; ce calcul est trop aisé, pour qu'il soit besoin de s'y arrêter.

Soit la fonction plus générale

$$\frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.})^m}{(\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+\delta' x^3+\varepsilon' x^4+\text{etc.})^n}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.};$$

en prenant les logarithmes de chaque membre de cette équation, il viendra

$$\begin{gathered}m\,\mathrm{l}(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.})-n\,\mathrm{l}(\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+\delta' x^3+\varepsilon' x^4+\text{etc.})\\=\mathrm{l}(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.})\end{gathered}$$

On trouvera ensuite par la différentiation,

$$\begin{gathered}\frac{m(\beta+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3+\text{etc.})}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}}-\frac{n(\beta'+2\gamma' x+3\delta' x^2+4\varepsilon' x^3+\text{etc.})}{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+\delta' x^3+\varepsilon' x^4+\text{etc.}}\\=\frac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.}}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}.\end{gathered}$$

En réduisant les fractions au même dénominateur, transposant tous les termes dans un seul membre, et égalant séparément à zéro le coefficient de chaque puissance de x, on obtiendra les équations suivantes dont la loi est facile à saisir:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\alpha' B+n\alpha\beta'\\-m\beta\alpha'\end{array}\right\}A=0$$

$$\left.\begin{array}{r}2\alpha\alpha' C+(n+1)\alpha\beta'\\-(m-1)\beta\alpha'\end{array}\right\}B\left.\begin{array}{rr}+&2n\alpha\gamma'\\+&(n-m)\beta\beta'\\-&2m\gamma\alpha'\end{array}\right\}A=0$$

$$\left.\begin{array}{r}3\alpha\alpha' D+(n+2)\alpha\beta'\\-(m-2)\beta\alpha'\end{array}\right\}C\left.\begin{array}{rr}+&(2n+1)\alpha\gamma'\\+&(n-m+1)\beta\beta'\\-&(2m-1)\gamma\alpha'\end{array}\right\}B\left.\begin{array}{rr}+&3n\alpha\delta'\\+&(2n-m)\beta\gamma'\\+&(n-2m)\gamma\beta'\\-&3m\delta\alpha'\end{array}\right\}A=0.$$

Ces équations ne déterminent point le premier coefficient A; mais en faisant $x=0$, on a $\frac{a^m}{a'^n}=A$.

95. Puisqu'on peut faire disparaître aussi les transcendantes d'une équation, en la combinant avec ses différentielles (51), rien n'empêche qu'on ne leur applique cette même méthode.

L'une des plus simples de ces fonctions est $\mathrm{l}(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})$; si on représente son développement par $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$, et qu'on prenne la différentielle de l'équation

$$\mathrm{l}(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

on trouvera

$$\frac{\beta+2\gamma x+3\delta x^2+\text{etc.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}}=B+2Cx+3Dx^2+\text{etc.}$$

En opérant comme ci-dessus, on obtiendra, pour déterminer les coefficiens B, C, D, E, etc., les équations

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= \alpha B \\
2\gamma &= \beta B+2\alpha C \\
3\delta &= \gamma B+2\beta C+3\alpha D \\
4\varepsilon &= \delta B+2\gamma C+3\beta D+4\alpha E \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{aligned}
B &= \frac{\beta}{\alpha} \\
C &= \frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta B}{2\alpha} \\
D &= \frac{\delta}{\alpha}-\frac{\gamma B+2\beta C}{3\alpha} \\
E &= \frac{\varepsilon}{\alpha}-\frac{\delta B+2\gamma C+3\beta D}{4\alpha} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Quant au premier coefficient, en faisant $x=0$, on trouve $\mathrm{l}\alpha=A$.

En faisant $\alpha=1$, $\beta=1$, puis γ, δ, ε, etc. $=0$, on tirerait du développement ci-dessus,

$$\mathrm{l}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.},$$

comme nous l'avons déjà obtenu par plusieurs autres voies.

96. Mais le même développement est remarquable surtout, en ce qu'il offre un moyen très-simple pour parvenir aux relations indiquées par Newton, entre les sommes des puissances de chaque degré des

racines des équations algébriques. Soit l'équation

$$z^m + \beta z^{m-1} + \gamma z^{m-2} + \delta z^{m-3} \ldots\ldots\ldots + \mu = 0,$$

ayant pour racines a, b, c, etc.; il s'ensuivra que

$$(z-a)(z-b)(z-c) \text{ etc.} = z^m + \beta z^{m-1} + \gamma z^{m-2} + \delta z^{m-3} \ldots + \mu;$$

en faisant $z = \frac{1}{x}$, il viendra

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx) \text{ etc.} = 1 + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots\ldots + \mu x^m,$$

et prenant les logarithmes de chaque membre, on aura

$$\mathrm{l}(1-ax) + \mathrm{l}(1-bx) + \mathrm{l}(1-cx) + \text{etc.} = \mathrm{l}(1 + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots + \mu x^m);$$

mettant pour les logarithmes indiqués les développemens fournis par le n° précédent, en observant, dans celui du second membre, que α étant 1, $A = 0$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} -ax - \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{3}a^3x^3 - \text{etc.} \\ -bx - \frac{1}{2}b^2x^2 - \frac{1}{3}b^3x^3 - \text{etc.} \\ -cx - \frac{1}{2}c^2x^2 - \frac{1}{3}c^3x^3 - \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

Si, pour abréger, on fait

$$\begin{array}{l} a + b + c + \ldots\ldots = S_1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + \ldots\ldots = S_2 \\ a^3 + b^3 + c^3 + \ldots\ldots = S_3 \\ \text{etc.} \end{array}$$

en comparant les termes affectés des mêmes puissances de x, on aura

$$-S_1 = B, \quad -\frac{S_2}{2} = C, \quad -\frac{S_3}{3} = D, \quad -\frac{S_4}{4} = E, \quad \text{etc.},$$

d'où, par les équations obtenues entre B, C, D, E, etc. (pag. préc.), et en faisant attention que $\alpha = 1$, on déduira les relations

$$\begin{array}{l} \beta = -S_1 \\ 2\gamma = -\beta S_1 - S_2 \\ 3\delta = -\gamma S_1 - \beta S_2 - S_3 \\ 4\varepsilon = -\delta S_1 - \gamma S_2 - \beta S_3 - S_4 \\ \text{etc.}, \end{array}$$

qui, en y changeant β en P, γ en Q, δ en R, etc., deviendront les mêmes que celles que j'ai rapportées ailleurs. (*Compl. des Élém. d'Alg.*)

97. On parvient à un résultat très-simple, en posant

$$e^{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.};$$

prenant de part et d'autre les logarithmes, il vient

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.} = \mathrm{l}(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}),$$

puis en différentiant, on forme l'équation

$$\beta+2\gamma x+3\delta x^2+\text{etc.} = \frac{B+2Cx+3Dx^2+\text{etc.}}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}},$$

qui n'est que celle du n° 95, où l'on aurait changé les lettres romaines dans les lettres grecques, *et vice versâ* : on aura donc

$$\begin{aligned} B &= \beta A \\ 2C &= \beta B + 2\gamma A \\ 3D &= \beta C + 2\gamma B + 3\delta A \\ 4E &= \beta D + 2\gamma C + 3\delta B + 4\varepsilon A \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et faisant $x=0$, on trouverait $e^\alpha = A$.

En posant $\alpha=0$, $\beta=1$ et γ, δ, etc. $=0$, on obtiendra le développement de e^x.

98. Passons aux fonctions circulaires; supposons d'abord

$$\sin(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}) = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.};$$

et faisons, pour abréger,

$$\begin{aligned} \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.} &= u, \\ A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.} &= y, \end{aligned}$$

il en résultera $y=\sin u$; et en différentiant il viendra $dy = du\cos u$. On pourrait éliminer $\cos u$, au moyen de l'équation $\cos u = \sqrt{1-\sin u^2}$, qui donne $\cos u = \sqrt{1-y^2}$, et on aurait alors $dy = du\sqrt{1-y^2}$; mais il faudrait encore faire disparaître le radical dans cette équation. Pour éviter cette seconde opération, on différentiera de nouveau l'équation $dy = du \cos u$, et il viendra $d^2y = d^2u \cos u - du^2 \sin u$; mettant pour $\sin u$ et $\cos u$ leurs valeurs y et $\frac{dy}{du}$, on aura

$$d^2y = \frac{dy}{du} d^2u - y du^2, \quad \text{ou} \quad du d^2y - dy d^2u + y du^3 = 0.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer à y, dy, d^2y, du, d^2u, du^3, leurs valeurs; or

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

donne

$$dy = (B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.})\,dx,$$
$$d^2y = \qquad (2C + 2.3Dx + \text{etc.})\,dx^2:$$

et pour ne pas m'engager dans de trop longs calculs, je réduirai la fonction proposée à $\sin(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$, en faisant δ, ε, etc. $= 0$. Dans ce cas particulier,

$$du = (\beta + 2\gamma x)\,dx, \qquad d^2u = 2\gamma dx^2,$$
$$du^3 = (\beta^3 + 6\beta^2\gamma x + 12\beta\gamma^2x^2 + 8\gamma^3x^3)\,dx^3:$$

au moyen de ces valeurs, l'équation $du d^2y - dy d^2u + y du^3 = 0$, devient divisible par dx^3; et en l'ordonnant par rapport à x, elle prend la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{r} 2\beta C \\ + \beta^3 A \\ \\ - 2\gamma B \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} + 6\beta D \\ + 4\gamma C \\ + 6\beta^2\gamma A \\ + \beta^3 B \\ \\ - 4\gamma C \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} + 12\beta E \\ + 12\gamma D \\ + 12\beta\gamma^2 A \\ + 6\beta^2\gamma B \\ + \beta^3 C \\ - 6\gamma D \end{array}\right\} x^2 + \text{etc.} \Bigg\} = 0.$$

En égalant à zéro les coefficiens de chaque puissance de x, on obtiendra les équations qui déterminent C, D, E, etc.; à l'égard de A et de B, il faut recourir aux équations $y = \sin u$, $dy = du \cos u$. Quand on suppose $x = 0$, la première donne $A = \sin \alpha$, et la seconde $B = \beta \cos \alpha$, parce qu'alors y se réduit à A, u à α, dy à Bdx, et du à βdx.

99. C'est par un procédé semblable aux précédens, qu'on parvient au développement des cosinus et des sinus des arcs multiples, annoncé

à la fin du n° 49 de l'Introduction. En faisant, comme sur la page 82,

$$\cos x = p, \qquad \text{on aura} \qquad \sin x\sqrt{-1} = \sqrt{p^2-1},$$
$$2\cos nx = (p+\sqrt{p^2-1})^n + (p-\sqrt{p^2-1})^n;$$

et posant

$$y = (p+\sqrt{p^2-1})^n,$$

on en déduira successivement

$$\mathrm{d}y = n(p+\sqrt{p^2-1})^{n-1}\left\{\frac{p\mathrm{d}p+\mathrm{d}p\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{p^2-1}}\right\}$$
$$= n\,\frac{(p+\sqrt{p^2-1})^n\,\mathrm{d}p}{\sqrt{p^2-1}};$$

éliminant, entre cette équation et la précédente, la fonction $(p+\sqrt{p^2-1})^n$, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{n\mathrm{d}p}{\sqrt{p^2-1}}, \qquad \text{d'où} \qquad (p^2-1)\,\mathrm{d}y^2 = n^2y^2\mathrm{d}p^2.$$

On pourrait employer déjà cette dernière équation ; mais une nouvelle différentiation conduit à un résultat où la fonction y et ses coefficiens différentiels ne montent qu'au premier degré, ce qui est beaucoup plus simple. En effet on obtient

$$2p\mathrm{d}y^2\mathrm{d}p + 2(p^2-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}^2y = 2n^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}p^2,$$

équation dont tous les termes étant divisibles par $2\mathrm{d}y$, se réduit à

$$p\mathrm{d}y\mathrm{d}p + (p^2-1)\mathrm{d}^2y = n^2y\mathrm{d}p^2,$$

et peut se mettre ensuite sous la forme

$$n^2y - p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} - p^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}p^2} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}p^2} = 0.$$

Cela posé, soit

$$y = Ap^n + Bp^{n-1} + Cp^{n-2} + Dp^{n-3} + Ep^{n-4} + \text{etc.},$$

il viendra

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} = nAp^{n-1} + (n-1)Bp^{n-2} + (n-2)Cp^{n-3} + (n-3)Dp^{n-4} + \text{etc.},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}p^2} = n(n-1)Ap^{n-2} + (n-1)(n-2)Bp^{n-3} + (n-2)(n-3)Cp^{n-4} + \text{etc.},$$

et substituant ces valeurs, en réunissant tous les termes affectés de la même puissance de p, on aura

$$[n^2-n-n(n-1)]Ap^n+[n^2-(n-1)-(n-1)(n-2)]Bp^{n-1}$$
$$+\left\{\begin{matrix}[n^2-(n-2)-(n-2)(n-3)]C\\ +n(n-1)A\end{matrix}\right\}p^{n-2}+\left\{\begin{matrix}[n^2-(n-3)-(n-3)(n-4)]D\\ +(n-1)(n-2)B\end{matrix}\right\}p^{n-3}$$
$$+\left\{\begin{matrix}[n^2-(n-4)-(n-4)(n-5)]E\\ +(n-2)(n-3)C\end{matrix}\right\}p^{n-4}+\text{etc.}=0.$$

Le multiplicateur de A s'évanouissant de lui-même, cette quantité reste indéterminée : on ne peut ensuite faire disparaître le terme affecté de p^{n-1} qu'en posant $B=0$, et la marche du calcul montre évidemment que cette circonstance rend nuls tous les coefficiens qui se succèdent de deux en deux, à partir de celui-là; ensorte qu'il en résulte

$$y=Ap^n+Cp^{n-2}+Ep^{n-4}+\text{etc.}$$

On voit en outre, que si l'on poussait cette valeur jusqu'aux termes

$$Lp^{n-m+2}+Np^{n-m},$$

l'équation ci-dessus comprendrait le terme

$$\left\{\begin{matrix}[n^2-(n-m)-(n-m)(n-m-1)]N\\ +(n-m+2)(n-m+1)L\end{matrix}\right\}p^{n-m},$$

où le multiplicateur de N se réduit à

$$n^2-(n-m)^2=2mn-m^2=2m\left(n-\frac{m}{2}\right),$$

et l'on a par conséquent

$$2m\left(n-\frac{m}{2}\right)N=-(n-m+2)(n-m+1)L.$$

En mettant successivement pour m les nombres 2, 4, 6, etc., on trouve les valeurs suivantes :

$$C=-\frac{nA}{4},$$
$$E=-\frac{(n-3)C}{8}=\frac{n(n-3)A}{4.8},$$
$$G=-\frac{(n-4)(n-5)E}{12(n-3)}=-\frac{n(n-4)(n-5)A}{4.8.12},$$
etc.

Il reste encore à déterminer le coefficient A, ce qui ne pourrait se faire en supposant $p=0$, car dans ce cas, la série étant descendante, a nécessairement des termes qui deviendraient infinis; mais en s'aidant du développement de $\sqrt{p^2-1}$, suivant les puissances descendantes de p, qui est

$$p(1-p^{-2})^{\frac{1}{2}} = p - \tfrac{1}{2}p^{-1} - \text{etc.},$$

on a

$$(p+\sqrt{p^2-1})^n = \left(2p - \tfrac{1}{2}p^{-1} - \text{etc.}\right)^n,$$

dont le premier terme est $2^n p^n$, et comparant avec $y = Ap^n + \text{etc.}$, on trouve $A = 2^n$, d'où il suit:

$$\begin{aligned}(p+\sqrt{p^2-1})^n = (2p)^n - n(2p)^{n-2} &+ \frac{n(n-3)}{2}(2p)^{n-4} \\ &- \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}(2p)^{n-6} + \text{etc.}\end{aligned}$$

On conclut de ce développement celui de $p-\sqrt{p^2-1}$, en observant qu'on a

$$p-\sqrt{p^2-1} = \frac{1}{p+\sqrt{p^2-1}},$$

équation facile à vérifier, et que par conséquent

$$(p-\sqrt{p^2-1})^n = (p+\sqrt{p^2-1})^{-n},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}(p-\sqrt{p^2-1})^n = 2p^{-n} + n(2p)^{-n-2} &+ \frac{n(n+3)}{2}(2p)^{-n-4} \\ &+ \frac{n(n+4)(n+5)}{2.3}(2p)^{-n-6} + \text{etc.}\end{aligned}$$

Cette série étant ajoutée avec la précédente, on aura

$$\left.\begin{aligned}2\cos nx = (2p)^n - n(2p)^{n-2} &+ \frac{n(n-3)}{2}(2p)^{n-4} \\ &- \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}(2p)^{n-6} + \text{etc.} \\ +(2p)^{-n} + n(2p)^{-n-2} &+ \frac{n(n+3)}{2}(2p)^{-n-4} \\ &+ \frac{n(n+4)(n+5)}{2.3}(2p)^{-n-6} + \text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

Ce développement étant complet, convient en conséquence à toutes les valeurs que l'on peut donner à l'exposant n, sans aucune restriction dans le nombre de ses termes, qui en général est infini, mais qui devient fini toutes les fois que l'exposant n est entier, parce que la seconde partie de la série détruit les termes de la première, dans lesquels la quantité $2p$ est élevée à des puissances négatives. En faisant, par exemple, $n=1$, et divisant par 2, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}\cos x = \cos x - \frac{1}{4\cos x} - \frac{1}{16\cos x^3} - \frac{1}{32\cos x^5} - \text{etc.}\\ \quad + \frac{1}{4\cos x} + \frac{1}{16\cos x^3} + \frac{1}{32\cos x^5} + \frac{5}{256\cos x^7} + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

La première ligne est encore la même que l'expression indiquée sur la page 81 ; mais tous les termes qui la rendaient inexacte sont détruits par la seconde, et il ne reste que l'équation identique $\cos x = \cos x$.

Il en est de même pour tous les autres cas où n désigne un nombre entier; car on peut donner à la première série la forme

$$(2p)^n - \frac{n}{1}(2p)^{n-2} - \frac{(3-n)n}{1.2}(2p)^{n-4} - \frac{(5-n)(4-n)n}{1\ .\ 2\ .\ 3}(2p)^{n-6}$$
$$\ldots\ldots - \frac{(2m-1-n)\,(2m-2-n)\ \ldots\ldots(m+1-n)\,n}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots\ldots\ldots m}(2p)^{n-2m},$$

d'après laquelle on voit que les exposans négatifs ne commenceront à paraître que lorsque $2m > n$; mais qu'il y aura toujours dans le numérateur du terme général un facteur nul, tant que m sera comprise entre $\frac{1}{2}n$ et n. Faisant donc

$$m = n,\quad m = n+1,\quad m = n+2,\quad \text{etc.},$$

on obtient successivement les termes

$$-(2p)^{-n},\ -n(2p)^{-n-2},\quad -\frac{n(n+3)}{2}(2p)^{-n-4},\ -\text{etc.},$$

qui sont, au signe près, les mêmes que ceux de la seconde série.

Cette identité de termes entre les deux séries ne peut plus avoir lieu lorsque le nombre n est fractionnaire, et tous les termes de chacune entrent à-la-fois dans l'expression de $\cos nx$, qui va à l'infini (*).

(*) La remarque ci-dessus appartient à Euler, qui a le premier donné l'explication de la difficulté que présente l'expression de $\cos nx$, et qui s'est servi pour cela

L'expression de $\sin nx$ se déduit immédiatement de celle de $\cos nx$, en observant que, d'après le n° 15,

$$\mathrm{d}.\cos x = -\mathrm{d}x\sin x, \qquad \mathrm{d}.\cos nx = -n\mathrm{d}x\sin nx,$$

formules d'après lesquelles l'expression de $\cos nx$ trouvée ci-dessus, donne, en faisant $\sin x = q$, divisant par $\mathrm{d}x$, par $2n$, et changeant les signes dans chaque membre,

$$\left.\begin{aligned}\sin nx = q\Big\{(2p)^{n-1} - (n-2)(2p)^{n-3} + \tfrac{(n-3)(n-4)}{2}(2p)^{n-5} - \text{etc.}\Big\}\\ -q\Big\{(2p)^{-n-1} + (n+2)(2p)^{-n-3} + \tfrac{(n+3)(n+4)}{2}(2p)^{-n-5} + \text{etc.}\Big\}\end{aligned}\right\}.$$

---

de l'équation différentielle du second ordre, rapportée ci-dessus (page 264); mais il l'a traitée par des moyens tenant plutôt au Calcul intégral qu'au Calcul différentiel; c'est pourquoi j'ai préféré suivre le procédé de M. Lagrange, qui d'ailleurs a poussé plus loin ce sujet; voici cependant la manière simple dont Euler est parvenu à l'équation différentielle déjà citée :

En désignant par z le cosinus de l'arc x, et par s celui de l'arc nx, on aura (58)

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad n\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}};$$

d'où il suit évidemment que

$$\frac{n\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}, \quad \text{et} \quad n^2\mathrm{d}z^2(1-s^2) = \mathrm{d}s^2(1-z^2).$$

Si on différentie, en regardant $\mathrm{d}z$ comme constante, puisqu'on traite s et x comme des fonctions de z, et si l'on divise par $\mathrm{d}s$, on obtiendra

$$n^2 s - z\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} - z^2\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}z^2} = 0,$$

équation qui, lorsqu'on y change z en p et s en y, devient celle de la page 264; cette dernière n'est donc pas particulière à la fonction $y = (p + \sqrt{p^2-1})^n$; on peut en effet s'assurer qu'elle est vérifiée aussi en posant $y = (p - \sqrt{p^2-1})^n$, et l'on verra dans le Calcul intégral, qu'elle est satisfaite en général par

$$y = C(p + \sqrt{p^2-1})^n + C'(p - \sqrt{p^2-1})^n,$$

C et C' étant des constantes indéterminées ou arbitraires: voilà pourquoi la même équation admet la fonction $y = \cos nx$, qui n'est qu'un cas particulier de la précédente.

Tous les termes à exposant négatif disparaissent encore de cette expression, lorsque n est un nombre entier positif; il ne reste que ceux à exposant positif de la première série, qui est la même que la deuxième série du tableau de la page 83.

100. L'équation

$$n^2y - p\frac{dy}{dp} - p^2\frac{d^2y}{dp^2} + \frac{d^2y}{dp^2} = 0$$

donnera la loi du développement de la fonction $(p + \sqrt{p^2-1})^n$, suivant les puissances ascendantes de p, en y supposant

$$y = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \text{etc.}$$

Le résultat des substitutions correspondantes à cette hypothèse sera

$$\left.\begin{array}{l} n^2A + 2C \\ + (n^2B - 1B + 2.3D)p \\ + (n^2C - 2C - 2C + 3.4E)p^2 \\ + (n^2D - 3D - 2.3D + 4.5F)p^3 \\ + (n^2E - 4E - 3.4E + 5.6G)p^4 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

et en égalant séparément à zéro chaque terme, il viendra, par les réductions,

$$\left.\begin{array}{r} n^2A + \quad 2C = 0 \\ (n^2 - \ 1)B + 2.3D = 0 \\ (n^2 - \ 4)C + 3.4E = 0 \\ (n^2 - \ 9)D + 4.5F = 0 \\ (n^2 - 16)E + 5.6G = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} C = -\dfrac{n^2A}{2} \\ D = -\dfrac{(n^2-1)B}{2.3} \\ E = \dfrac{n^2(n^2-4)A}{2.3.4} \\ F = \dfrac{(n^2-1)(n^2-9)B}{2.3.4.5} \\ G = -\dfrac{n^2(n^2-4)(n^2-16)A}{2.3.4.5.6} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Les deux premiers coefficiens A et B sont encore indéterminés dans ce calcul comme dans le précédent; mais on en obtient directement la valeur, en faisant $p=0$, dans les expressions des fonctions y et $\frac{dy}{dp}$, qui sont

$$(p+\sqrt{p^2-1})^n = A + Bp + \text{etc.}, \quad \frac{n(p+\sqrt{p^2-1})^n}{\sqrt{p^2-1}} = B + \text{etc.},$$

et qui donnent alors

$$(\sqrt{-1})^n = A, \quad n(\sqrt{-1})^{n-1} = B.$$

Quant au développement de $(p-\sqrt{p^2-1})^n$, on le déduira de celui de $(p+\sqrt{p^2-1})^n$, en changeant les signes qui dépendent du radical, ce qui ne fait rien à l'équation différentielle où ce radical ne se trouve point. Ce changement étant effectué seulement dans les équations qui déterminent les deux premiers coefficiens A et B, savoir :

$$(p-\sqrt{p^2-1})^n = A + Bp + \text{etc.}, \quad \frac{n(p-\sqrt{p^2-1})^n}{-\sqrt{p^2-1}} = B + \text{etc.}$$

il vient, lorsqu'on fait $p=0$,

$$(-\sqrt{-1})^n = A, \quad n(-\sqrt{-1})^{n-1} = B;$$

et si on représente par A' et B' ces dernières valeurs, on aura

$$\left.\begin{aligned}(p+\sqrt{p^2-1})^n = A &- \frac{n^2}{2}Ap^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}Ap^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}Ap^6 + \text{etc.}\\ &+ Bp - \frac{(n^2-1)}{2.3}Bp^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}Bp^5 - \text{etc.}\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}(p-\sqrt{p^2-1})^n = A' &- \frac{n^2}{2}A'p^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}A'p^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}A'p^6 + \text{etc.}\\ &+ B'p - \frac{(n^2-1)}{2.3}B'p^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}B'p^5 - \text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

En prenant la somme de ces deux développemens, on obtiendra

$$\left.\begin{aligned}2\cos nx = (A+A')&\left\{1 - \frac{n^2}{2}p^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}p^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6 + \text{etc.}\right\}\\ +(B+B')&\left\{\quad p - \frac{(n^2-1)}{2.3}p^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}p^5 - \text{etc.}\right\}\end{aligned}\right\},$$

formule dans laquelle

$$A+A' = (\sqrt{-1})^n + (-\sqrt{-1})^n = (\sqrt{-1})^n\,\{1+(-1)^n\},$$
$$B+B' = n(\sqrt{-1})^{n-1} + n(-\sqrt{-1})^{n-1} = n(\sqrt{-1})^{n-1}\{1+(-1)^{n-1}\}.$$

Tant que n sera un nombre entier, ces deux quantités seront réelles; la première se réduisant à zéro quand n est impaire, à ± 2 quand n est paire, selon que ce nombre est de la forme $4m$ ou $4m+2$. La seconde quantité devient, dans le premier cas, $\pm 2n$ et zéro dans le second.

Avec ces valeurs on tombe sur la première et la cinquième séries ascendantes du tableau de la page 83; mais pour arriver à un résultat indépendant de la forme du nombre n, il faut exprimer les radicaux imaginaires au moyen de l'équation

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx. \qquad (\textit{Introd.}\ 48.)$$

Lorsqu'on y fait $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à $\sin x = 1$, $\cos x = 0$, on en déduit

$$(\pm\sqrt{-1})^n = \cos\frac{n\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{2};$$

on aura de même

$$(\pm\sqrt{-1})^{n-1} = \cos\frac{(n-1)\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{2};$$

on en conclura

$$A + A' = 2\cos\frac{n\pi}{2}, \qquad B + B' = 2n\cos\frac{(n-1)\pi}{2},$$

et par conséquent

$$\left.\begin{aligned}\cos nx = \cos\frac{n\pi}{2}&\left\{1 - \frac{n^2}{2}p^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}p^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6 + \text{etc.}\right\}\\ + \cos\frac{(n-1)\pi}{2}&\left\{np - \frac{n(n^2-1)}{2.3}p^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}p^5 - \text{etc.}\right\}\end{aligned}\right\},$$

résultat où l'on voit que le concours des deux séries sera nécessaire pour exprimer $\cos nx$, toutes les fois que le nombre n ne sera point entier et positif.

Si on différentie les deux membres de ce résultat, en écrivant q à la place de $\sin x$, et d'après les formules du n° 15, on en déduira l'expression

$$\begin{aligned}\sin nx = q\cos\frac{n\pi}{2}&\left\{-np + \frac{n(n^2-4)}{2.3}p^3 - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}p^5 + \text{etc.}\right\}\\ + q\cos\frac{(n-1)\pi}{2}&\left\{1 - \frac{(n^2-1)}{2}p^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}p^4 - \text{etc.}\right\},\end{aligned}$$

où l'on retrouve la septième et la troisième séries du tableau cité.

101. Ce qui précède achève de démontrer l'ensemble des formules du tableau, puisqu'on est parvenu aux séries dont on dérive toutes les autres (page 84); mais pour ne rien laisser à desirer, il faut montrer ce que deviennent ces dernières lorsque le nombre n n'est pas entier; je vais donc chercher *à priori* le développement de $\cos nx$ et de $\sin nx$,

suivant les puissances ascendantes de $\sin x$ ou de q. En substituant $\sqrt{1-q^2}$ à $\cos x$, et q à $\sin x$, dans les expressions du n° 47 de l'Introduction, on obtiendra

$$2\cos nx = (\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{-1})^n + (\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{-1})^n;$$

$$2\sqrt{-1}\sin nx = (\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{-1})^n - (\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{-1})^n;$$

et en observant que $\sqrt{1-q^2}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{q^2-1}$, on reconnaîtra que $\sqrt{1-q^2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\sqrt{q^2-1} = -\sqrt{-1}\ \sqrt{q^2-1}$ (*), d'où

$$\sqrt{1-q^2} \pm q\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}(\sqrt{q^2-1} \mp q) = \pm\sqrt{-1}(q \mp \sqrt{q^2-1}).$$

Cela posé, les fonctions $(p \pm \sqrt{p^2-1})^n$ devenant $(q \pm \sqrt{q^2-1})^n$, lorsqu'on change p en q, il s'ensuit que ces dernières doivent satisfaire à l'équation

$$n^2 y - q\frac{dy}{dq} - q^2\frac{d^2y}{dq^2} + \frac{d^2y}{dq^2} = 0,$$

formée de celle du n° 99, par le même changement, et qu'en faisant

$$y = A + Bq + Cq^2 + Dq^3 + Eq^4 + \text{etc.},$$

les coefficiens A, B, C, D, E, etc. auront encore les valeurs trouvées dans le n° 100 : écrivant donc q, au lieu de p, dans les développemens de $(p + \sqrt{p^2-1})^n$ et de $(p - \sqrt{p^2-1})^n$, obtenus page 270; multipliant le second par $(\sqrt{-1})^n$, et le premier par $(-\sqrt{-1})^n$, on aura ceux de $(\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{-1})^n$ et de $(\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{-1})^n$; et prenant la somme et la différence de ces derniers, on trouvera

$$2\cos nx = \left.\begin{array}{l}\{A'(\sqrt{-1})^n + A(-\sqrt{-1})^n\}\{1 - \frac{n^2}{2}q^2 + \text{etc.}\} \\ + \{B'(\sqrt{-1})^n + B(-\sqrt{-1})^n\}\{q - \text{etc.}\}\end{array}\right\},$$

$$2\sqrt{-1}\sin nx = \left.\begin{array}{l}\{A'(\sqrt{-1})^n - A(-\sqrt{-1})^n\}\{1 - \frac{n^2}{2}q^2 + \text{etc.}\} \\ + \{B'(\sqrt{-1})^n - B(-\sqrt{-1})^n\}\{q - \text{etc.}\}\end{array}\right\};$$

(*) On parvient aussi à cette relation, en observant que $\sqrt{q^2-1}$ étant imaginaire, on doit avoir égard à la remarque d'après laquelle $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$, et ne pas prendre $\sqrt{q^2-1}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{1-q^2}$; mais $-\sqrt{1-q^2}$.

et en mettant pour A, A', B, B', leurs valeurs, les coefficiens de la première et de la seconde série deviendront respectivement, dans la valeur de $2\cos nx$,

$$(-\sqrt{-1})^n\ (\sqrt{-1})^n + (\sqrt{-1})^n\ (-\sqrt{-1})^n = (+1)^n(+1)^n = 2,$$
$$n(-\sqrt{-1})^{n-1}(\sqrt{-1})^n + n(\sqrt{-1})^{n-1}(-\sqrt{-1})^n = (n\sqrt{-1} - n\sqrt{-1})(+1)^{n-1} = 0,$$

et dans celle de $2\sqrt{-1}\sin nx$,

$$(-\sqrt{-1})^n\ (\sqrt{-1})^n - (\sqrt{-1})^n\ (-\sqrt{-1})^n = 0,$$
$$n(-\sqrt{-1})^{n-1}(\sqrt{-1})^n - n(\sqrt{-1})^{n-1}(-\sqrt{-1})^n = (n\sqrt{-1} + n\sqrt{-1})(+1)^{n-1} = 2n\sqrt{-1}.$$

En substituant ces valeurs, l'imaginaire disparaîtra de l'expression de $\sin nx$, et on aura

$$\cos nx = \left\{1 - \frac{n^2}{2}q^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}q^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}q^6 + \text{etc.}\right\},$$
$$\sin nx = \left\{\qquad nq - \frac{n(n^2-1)}{2\,.\,3}q^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}q^5 - \text{etc.}\right\}.$$

Ces formules, qui sont la sixième et la deuxième des séries ascendantes, dans le tableau de la page 83, offrent cette particularité, qu'elles conviennent également à toutes les valeurs de n; mais la première ne se termine pas lorsque n est impaire, et la seconde lorsque n est paire. En les différentiant, chacune en particulier, comme on l'a déjà fait dans les numéros précédens, on en déduira les formules

$$\sin nx = p\left\{nq - \frac{n(n^2-4)}{2.3}q^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}q^5 - \text{etc.}\right\},$$
$$\cos nx = p\left\{\ 1 - \frac{(n^2-1)}{2}q^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4}q^4 - \text{etc.}\right\},$$

qui sont la huitième et la quatrième des séries ascendantes du tableau cité, et se terminent dans le cas où leurs correspondantes ci-dessus vont à l'infini.

Les considérations précédentes, réunies à celles que l'on trouve dans l'Introduction (47—50 inclus.), offrent, à ce que je crois, sur l'expression des sinus et des cosinus des arcs multiples, en puissances de l'arc simple, un ensemble plus complet et plus uniforme que ce qu'on a publié jusqu'ici sur le même sujet. Il se présenterait encore dans la comparaison des formules quelques remarques assez curieuses; mais je ne saurais m'y arrêter ici.

102. Le développement des puissances du cosinus de l'arc simple, par les sinus des arcs multiples, obtenu par la considération des expressions imaginaires, dans le n° 54 de l'Introduction, peut se déduire aussi de la différentiation employée comme ci-dessus. Si l'on prend $y = \cos x^n$, on aura successivement

$$dy = -n dx \cos x^{n-1} \sin x,$$
$$\frac{dy}{y} = -n\frac{dx \sin x}{\cos x},$$

d'où

$$ny \sin x + \frac{dy}{dx} \cos x = 0.$$

Supposons, avec M. Lagrange, auquel ce procédé est dû,

$$y = A \cos mx + B \cos(m-1)x + C\cos(m-2)x + D\cos(m-3)x + \text{etc.},$$

A, B, C, D, etc. désignant des coefficiens indéterminés, et substituant ce développement de y et celui de dy, dans l'équation différentielle trouvée ci-dessus, elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l} n\sin x\{A\cos mx + B\cos(m-1)x + C\cos(m-2)x + \text{etc.}\} \\ -\cos x\{mA\sin mx + (m-1)B\sin(m-1)x + (m-2)C\sin(m-2)x + \text{etc.}\} \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on observe que

$$\sin x \cos mx = \tfrac{1}{2}\{\sin(m+1)x - \sin(m-1)x\},$$
$$\cos x \sin mx = \tfrac{1}{2}\{\sin(m+1)x + \sin(m-1)x\},$$

et que l'on applique cette transformation à tous les produits analogues aux précédens, on en déduira, en ordonnant par rapport aux sinus des multiples de x,

$$\left.\begin{array}{l} \{nA - mA\}\sin(m+1)x \\ +\{nB-(m-1)B\}\sin mx \\ +\{nC-nA-(m-2)C-mA\}\sin(m-1)x \\ +\{nD-nB-(m-3)D-(m-1)B\}\sin(m-2)x \\ +\{nE-nC-(m-4)E-(m-2)C\}\sin(m-3)x \\ +\text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Le coefficient de chaque sinus étant égalé séparément à zéro, donnera

$$\begin{aligned}
&(n-m)A = 0,\\
&(n-m+1)B = 0,\\
&(n-m+2)C - (n+m)A = 0,\\
&(n-m+3)D - (n+m-1)B = 0,\\
&(n-m+4)E - (n+m-2)C = 0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

On ne peut prendre à-la-fois $A=0$ et $B=0$, pour satisfaire aux deux premières équations; car cette supposition rendrait nuls tous les coefficiens ultérieurs C, D, E, etc.; mais en faisant $m=n$, la première équation se vérifie, A restant indéterminé, et la seconde donne $B=0$: il vient ensuite

$$C=\frac{2n}{2}A,\quad D=\frac{2n-1}{3}B,\quad E=\frac{2n-2}{4}C,\quad F=\frac{2n-3}{5}D,\ \text{etc.},$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned}
&C=\frac{n}{1}A,\quad D=0,\quad E=\frac{n(n-1)}{1.2}A,\quad F=0,\\
&G=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

D'après ces valeurs, on a

$$\cos x^n = A\left\{\cos nx+\frac{n}{1}\cos(n-2)x+\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x+\text{etc.}\right\};$$

pour déterminer A, on fera $x=0$, d'où on tirera

$$1=A\left\{1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\text{etc.}\right\}=A(1+1)^n=2^nA,$$

$A=\frac{1}{2^n}$, et par conséquent la même formule que dans le n° 54 de l'Introduction. Il faut se rappeler que l'on en déduit le développement de $\sin x^n$ (page 93).

103. En parcourant les diverses manières d'appliquer la différentiation au développement des fonctions en séries, je ne dois pas omettre celle qu'employa Maclaurin pour parvenir à la formule du n° 84, sans le secours du théorème de Taylor.

Usage des équations différentielles partielles pour développer les fonctions.

Soit

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

En différentiant plusieurs fois de suite cette expression, on trouvera

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.}\\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 1.2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{etc.}\\
\frac{d^3y}{dx^3} &= 1.2.3D + 2.3.4Ex + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

d'où l'on voit que les indéterminées A, B, C, D, etc. peuvent se déduire des valeurs que prennent, par la supposition de $x = 0$, la fonction y et ses coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.; car si Y, Y', Y'', Y''', etc. désignent ces valeurs, les équations ci-dessus, dans l'hypothèse de $x=0$, se réduiront à

$$\left.\begin{aligned}
Y &= A\\
Y' &= B\\
Y'' &= 1.2C\\
Y''' &= 1.2.3D\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{aligned}
A &= Y\\
B &= Y'\\
C &= \frac{Y''}{1.2}\\
D &= \frac{Y'''}{1.2.3}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

et par conséquent

$$y = Y + Y'\frac{x}{1} + Y''\frac{x^2}{1.2} + Y'''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

104. On peut obtenir de même le développement d'une fonction de deux variables; car si on suppose

$$\begin{aligned}
u = A &+ Bx + Cy\\
&+ Dx^2 + Exy + Fy^2\\
&+ \text{etc.},
\end{aligned}$$

les lettres A, B, C, etc. désignant des quantités indépendantes de x et de y, et qu'on différentie cette équation par rapport à x et par rapport à y, plusieurs fois de suite, de manière à obtenir les expressions des coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, etc., on aura, en égalant à zéro x et y, après les différentiations,

$$\frac{du}{dx}=B, \qquad \frac{du}{dy}=C,$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}=1.2D, \quad \frac{d^2u}{dxdy}=1.1.E, \quad \frac{d^2u}{dy^2}=1.2F, \text{ etc.}:$$

à l'égard de A, on trouvera sa valeur en cherchant celle de la fonction u, lorsque x et y sont nuls : on aura donc la même formule que celle du n° 93.

105. La formule du n° 103 est liée avec le théorème de Taylor, de manière qu'on en peut déduire aisément ce théorème, en s'aidant de l'équation différentielle partielle qui caractérise toute fonction composée de la somme de deux quantités variables. En effet, si l'on pose $u'=\mathrm{f}(x+h)$, et que l'on regarde en premier lieu x comme une constante, on développera u' suivant les puissances de h, par la formule

$$U+U'\frac{h}{1}+U''\frac{h^2}{1.2}+U'''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

U, U', U'', U''', etc. désignant ce que deviennent les fonctions

$$u', \frac{du'}{dh}, \frac{d^2u'}{dh^2}, \frac{d^3u'}{dh^3}, \text{ etc.}$$

lorsque $h=0$. Mais si on fait $x+h=x'$, il en résultera $\mathrm{f}(x+h)=\mathrm{f}(x')$, et on aura $d.\mathrm{f}(x')=\mathrm{f}'(x')dx'$, de quelque manière que varie x'; d'où il suit qu'en faisant varier à-la-fois x et h, il viendra $dx'=dx+dh$, et que par conséquent la différentielle complète de $\mathrm{f}(x+h)$ sera $\mathrm{f}'(x')(dx+dh)$ ou $\mathrm{f}'(x+h)dx+\mathrm{f}'(x+h)dh$, expression dans laquelle le coefficient différentiel relatif à x est le même que celui qui est relatif à h : on aura par conséquent

$$\frac{d.\mathrm{f}(x+h)}{dh}=\frac{d.\mathrm{f}(x+h)}{dx}=\mathrm{f}'(x+h);$$

on trouvera de même

$$\frac{d^2.\mathrm{f}(x+h)}{dh^2}=\frac{d.\mathrm{f}'(x+h)}{dh}=\frac{d\,\mathrm{f}'(x+h)}{dx}=\frac{d^2.\mathrm{f}(x+h)}{dx^2},$$

et en général

$$\frac{d^n f(x+h)}{dh^n} = \frac{d^n f(x+h)}{dx^n}.$$

On pourra donc substituer $\frac{d^n u'}{dx^n}$ à $\frac{d^n u'}{dh^n}$; faisant ensuite $h=0$, ce qui change u' en $f(x)$, on trouvera

$$U = f(x), \qquad U' = \frac{d.f(x)}{dx},$$
$$U'' = \frac{d^2.f(x)}{dx^2}, \qquad U''' = \frac{d^3.f(x)}{dx^3}, \text{ etc.};$$

et en représentant $f(x)$ par u, le développement de la valeur que prend u, lorsque x devient $x+h$, sera

$$u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

comme il résulte du théorème de Taylor.

106. On passe d'une manière analogue, de la formule du n° 104 à l'extension du théorème de Taylor pour deux variables; car en posant dans la fonction $f(x+h, y+k)$,

$$x+h = x', \qquad y+k = y',$$

ce qui la change en $f(x', y')$, on a

$$d.f(x', y') = Pdx' + Qdy' = P(dx+dh) + Q(dy+dk);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d.f(x+h, y+k)}{dh} = \frac{d.f(x+h, y+k)}{dx},$$
$$\frac{d.f(x+h, y+k)}{dk} = \frac{d.f(x+h, y+k)}{dy},$$

et en s'élevant ainsi de proche en proche, on arriverait à

$$\frac{d^{m+n} f(x+h, y+k)}{dh^m dk^n} = \frac{d^{m+n} f(x+h, y+k)}{dx^m dy^n};$$

mais comme le développement de la fonction proposée, suivant les puissances de h et de k, aurait pour terme général, d'après le n° 104,

$$\frac{d^{m+n} f(x+h, y+k)}{dh^m dk^n} \frac{h^m k^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n},$$

en faisant $h=0$, $k=0$, après les différentiations, il suit de ce qui vient d'être prouvé, que ce terme général serait

$$\frac{d^{m+n}F(x,y)}{dx^m dy^n}\frac{h^m k^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} \quad \text{ou} \quad \frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\frac{h^m k^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n},$$

ce qui rentre dans la formule du n° 35.

On étendrait sans difficulté ces considérations à un nombre quelconque de variables; et il est à propos de remarquer qu'elles ne supposent que les préliminaires de la différentiation, donnés dans les n^{os} 4—11, et pourraient par conséquent servir à rendre l'exposition des principes du Calcul différentiel indépendante de la démonstration des n^{os} 17 et 18; mais cette marche, plus simple en apparence que celle que j'ai suivie, semblerait peut-être moins rigoureuse.

107. La considération des équations différentielles partielles dont on vient déjà d'appercevoir l'usage, a conduit à des développemens très-généraux; tel est celui d'une fonction quelconque $u=\psi(y)$, y étant une fonction liée avec la variable indépendante x, par l'équation

$$y=F[a+x\varphi(y)],$$

les caractéristiques F et φ désignant des fonctions données quelconques.

En différentiant cette équation par rapport à x et par rapport à a, il viendra

$$\frac{dy}{dx}=F'[a+x\varphi(y)].\left\{\varphi(y)+x\varphi'(y)\frac{dy}{dx}\right\},$$
$$\frac{dy}{da}=F'[a+x\varphi(y)].\left\{\quad 1+x\varphi'(y)\frac{dy}{da}\right\};$$

éliminant ensuite $F'[a+x\varphi(y)]$, on trouvera, après les réductions;

$$\frac{dy}{dx}-\varphi(y)\frac{dy}{da}=0;$$

mais puisque u, ou $\psi(y)$, ne dépend que de y, on aura seulement

$$\frac{du}{dx}=\psi'(y)\frac{dy}{dx},\quad \frac{du}{da}=\psi'(y)\frac{dy}{da},$$

d'où, en éliminant $\psi'(y)$, on tirera

$$\frac{du}{dx}\frac{dy}{da}-\frac{du}{da}\frac{dy}{dx}=0;$$

mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\varphi(y)\frac{dy}{da}$, et faisant, pour abréger, $\varphi(y)=z$, il viendra

$$\frac{du}{dx}-z\frac{du}{da}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx}=z\frac{du}{da}:$$

on pourra donc substituer à $\frac{du}{dx}$ la quantité $z\frac{du}{da}$.

Si on différentie l'équation précédente par rapport à x, il viendra $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d.z\frac{du}{da}}{dx}$; mais la quantité $z\frac{du}{da}$ n'étant autre chose que $\varphi(y)\psi'(y)\frac{dy}{da}$, c'est-à-dire une fonction de y multipliée par $\frac{dy}{da}$, on pourra la regarder comme le coefficient différentiel d'une nouvelle fonction de y que nous représenterons par u', et nous aurons alors

$$\frac{du'}{da}=z\frac{du}{da} \text{ et } \frac{d.z\frac{du}{da}}{dx}=\frac{d^2u'}{dxda}.$$

En intervertissant l'ordre des différentiations, il en résultera

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u'}{dadx}=\frac{d\frac{du'}{dx}}{da};$$

or il faut observer que la relation $\frac{du}{dx}=z\frac{du}{da}$, a également lieu à l'égard de u', et que par conséquent $\frac{du'}{dx}=z\frac{du'}{da}$: cela est facile à vérifier, puisque u' représentant aussi une fonction de y, on doit avoir, comme ci-dessus,

$$\frac{du'}{dx}\frac{dy}{da}-\frac{du'}{da}\frac{dy}{dx}=0.$$

Mettant donc dans l'expression de $\frac{d^2u}{dx^2}$, pour $\frac{du'}{dx}$ sa valeur $z\frac{du'}{da}$, et ensuite pour $\frac{du'}{da}$ la quantité $z\frac{du}{da}$ qu'il représente, on trouvera

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d.z\frac{du'}{da}}{da}=\frac{d.z^2\frac{du}{da}}{da}.$$

En différentiant cette dernière équation par rapport à x, on obtient dra $\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^2.z^3\frac{du}{da}}{dxda}$; faisant $z^2\frac{du}{da}=\frac{du''}{da}$, et intervertissant l'ordre des différentiations, on aura $\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^3u''}{da^2dx}=\frac{d^2\frac{du''}{dx}}{da^2}$; mais on a aussi $\frac{du''}{dx}=z\frac{du''}{da}$, et par conséquent $\frac{du''}{dx}=z^3\frac{du}{da}$: donc $\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^2.z^3\frac{du}{da}}{da^2}$.

En général, si $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}=\frac{d^{n-2}.z^{n-1}\frac{du}{da}}{da^{n-2}}$, en faisant $z^{n-1}\frac{du}{da}=\frac{du''\cdots(n-1)}{da}$, $n-1$ entre parenthèses désignant le nombre des accens que doit porter la lettre u, et non pas une puissance, on trouvera

$$\frac{d^nu}{dx^n}=\frac{d^nu''\cdots(n-1)}{dxda^{n-1}}=\frac{d^nu''\cdots(n-1)}{da^{n-1}dx};$$

et à cause de

$$\frac{du''\cdots(n-1)}{dx}=z\frac{du''\cdots(n-1)}{da}=z^n\frac{du}{da},$$

il viendra

$$\frac{d^nu}{dx^n}=\frac{d^{n-1}.z^n\frac{du}{da}}{da^{n-1}}.$$

Cela posé, les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}\ldots\frac{d^nu}{dx^n}$, prises dans l'hypothèse de $x=0$, étant aussi celles des coefficiens des termes du développement de la fonction u (103), on aura

$$u=U+z\frac{du}{da}\frac{x}{1}+\frac{d.z^2\frac{du}{da}}{da}\frac{x^2}{1.2}\ldots+\frac{d^{n-1}.z^n\frac{du}{da}}{da^{n-1}}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\text{etc.},$$

en désignant par U ce que devient u, lorsque $x=0$. Cette supposition, faite dans l'équation $y=F[a+x\varphi(y)]$, donne $y=F(a)$, $\frac{dy}{da}=F'(a)$, valeurs qu'il faudra substituer dans z ou $\varphi(y)$ et dans $\frac{du}{da}$. C'est à M. Laplace qu'est due la formule ci-dessus, et la manière dont il l'obtient ne diffère de la précédente que par quelques légers changemens que l'ordre de cet ouvrage rendait nécessaires.

Dans le cas particulier représenté par l'équation $y=a+x\varphi(y)$, on aura simplement $y=a$ et $\frac{dy}{da}=1$; U, z et $\frac{du}{da}$ deviendront respectivement $\psi(a)$, $\varphi(a)$ et $\psi'(a)$; et par conséquent le développement de u ordonné suivant les puissances de x, sera

$$\left.\begin{array}{l} u=\psi(a)+\psi'(a)\varphi(a)\frac{x}{1}+\frac{\mathrm{d}.\psi'(a)\varphi(a)^2}{\mathrm{d}a}\frac{x^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^2.\psi'(a)\varphi(a)^3}{\mathrm{d}a^2}\frac{x^3}{1.2.3} \\ \qquad +\ldots\ldots\ldots+\frac{\mathrm{d}^{n-1}.\psi'(a)\varphi(a)^n}{\mathrm{d}a^{n-1}}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

108. M. Laplace a étendu ces recherches aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, analogues à celle que nous avons considérée dans le n° précédent; mais un ouvrage de la nature de celui-ci ne comportant pas tous les détails qu'il a insérés dans son intéressant Mémoire, nous nous bornerons à ce qui regarde les fonctions de deux variables, et en exposant les artifices ingénieux qu'il a employés dans cette recherche, nous remplirons le but que nous nous sommes proposé, celui de faire connaître les procédés analytiques les plus remarquables.

Soit u une fonction quelconque des deux quantités y et z, déterminées par les deux équations

$$y=F[a+t\varphi(y,z)], \qquad z=F_1[b+x\varphi_1(y,z)],$$

F et F_1, φ et φ_1 désignant aussi des fonctions quelconques. Si on avait particularisé ces dernières, et que la forme des équations ci-dessus permît l'élimination, on parviendrait à connaître séparément les valeurs de y et de z, en a et t, b et x; on doit donc regarder les deux premières quantités comme des fonctions des quatre dernières, et en les différentiant sous ce point-de-vue, on formera les coefficiens différentiels suivans :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}&=F'(a+t\varphi).\left(1+t\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a}\right)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=F'(a+t\varphi).\left(\varphi+t\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}b}&=F'(a+t\varphi).t\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}b}\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=F'(a+t\varphi).t\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Pour abréger, j'ai écrit seulement φ au lieu de $\varphi(y,z)$; j'en userai de même à l'égard de $\varphi_1(y,z)$; et je ferai observer que les fonctions u,

φ et φ_1, ne contiennent qu'implicitement les variables t et x.

En supposant t et x nuls, il en résultera

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy}{da}=F'(a)\\ \frac{dy}{dt}=F'(a).\varphi\\ \frac{dy}{db}=0\\ \frac{dy}{dx}=0\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{on trouvera}\\ \text{dans les mêmes}\\ \text{circonstances}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\frac{dz}{da}=0\\ \frac{dz}{dt}=0\\ \frac{dz}{db}=F'_1(b)\\ \frac{dz}{dx}=F'_1(b).\varphi_1\end{array}\right.$$

u deviendra fonction de a et de b seulement, puisqu'alors

$$y=F(a)\quad\text{et}\quad z=F_1(b);$$

or, en observant que u ne dépend explicitement que de y et de z, et mettant les valeurs de $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, on aura

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}=\frac{du}{dy}F'(a).\varphi,$$
$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{du}{dz}F'_1(b).\varphi_1,$$

et parce que

$$\left.\begin{array}{l}F'(a)=\frac{dy}{da}\\ F'_1(b)=\frac{dz}{db}\end{array}\right\}\text{il viendra}\left\{\begin{array}{l}\frac{du}{dt}=\frac{du}{da}.\varphi\\ \frac{du}{dx}=\frac{du}{db}.\varphi_1\end{array}\right.$$

lorsque $x=0$ et $t=0$.

Concevons pour un moment que l'on ait tiré de l'équation $z=F_1(b+x\varphi_1)$ la valeur de z, et qu'on l'ait substituée dans la fonction u; cette fonction ne dépendra plus alors que des variables y et x, et dans les différentiations relatives à t, il suffira d'avoir égard à la première, puisque la seconde est une des variables indépendantes; mais si on chasse en même temps z de l'équation $y=F(a+t\varphi)$, la fonction φ, lorsqu'on différentiera par rapport à t, pourra être considérée comme ne renfermant que y: on aura donc, en vertu du n° 107,

$$\frac{d^m u}{dt^m}=\frac{d^{m-1}.\varphi^m\frac{du}{da}}{da^{m-1}},$$

et par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}^{m+n}u}{\mathrm{d}t^m\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^n\left(\dfrac{\mathrm{d}^{m-1}.\varphi^m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}}{\mathrm{d}a^{m-1}}\right)}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^{m-1}\left(\dfrac{\mathrm{d}^n.\varphi^m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}}{\mathrm{d}x^n}\right)}{\mathrm{d}a^{m-1}}.$$

Il est clair que le développement de $\mathrm{d}^n.\varphi^m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}$ se déduira de celui de $\mathrm{d}^n.\varphi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}$, en y mettant φ^m pour φ, $\mathrm{d}.\varphi^m$ pour $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}^2.\varphi^m$ pour $\mathrm{d}^2\varphi$, et ainsi de suite: on pourra donc, au lieu de $\varphi^m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}$, écrire seulement $\varphi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}$; mais cette dernière quantité étant égale à $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, lorsque t est nul, il en résultera

$$\frac{\mathrm{d}^{m+n}u}{\mathrm{d}t^m\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^{m-1}\left(\dfrac{\mathrm{d}^{n+1}u}{\mathrm{d}x^n\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}a^{m-1}}.$$

Tout étant semblable entre les variables y et z, t et x, a et b, on aura aussi

$$\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}.\varphi_1{}^n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b}}{\mathrm{d}b^{n-1}},$$

équation qu'on pourra changer en

$$\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}b^{n-1}},$$

en écrivant φ_1 au lieu de $\varphi_1{}^n$, et en substituant au lieu de $\varphi_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b}$, sa valeur $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, dans le cas où $x=0$; mais il faudra avoir l'attention de remplacer φ_1 par $\varphi_1{}^n$ dans le résultat.

Mettons cette expression de $\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}$ dans celle de $\frac{\mathrm{d}^{m+n}u}{\mathrm{d}t^m\mathrm{d}x^n}$, trouvée ci-dessus, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}^{m+n}u}{\mathrm{d}t^m\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^{m+n-2}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}a^{m-1}\mathrm{d}b^{n-1}},$$

en se rappelant toujours qu'il faut substituer φ^m à φ, $\varphi_1{}^n$ à φ_1, et après les différentiations, faire $t=0$ et $x=0$.

Les opérations précédentes nous ont procuré l'avantage de ne faire dépendre le coefficient $\frac{\mathrm{d}^{m+n}u}{\mathrm{d}t^m\mathrm{d}x^n}$ que de celui du second ordre $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}$, et les différentiations relatives à a et à b ne causeront aucun embarras, puisqu'elles se présentent sous une forme très-simple lorsque t et x sont nuls, ainsi qu'on a dû le remarquer au commencement de cet article. Il ne reste donc plus qu'à déterminer l'expression de $\frac{d^2u}{dtdx}$, ce qui sera facile.

En différentiant, par rapport à x, l'équation $\frac{du}{dt}=\frac{du}{da}\varphi$, il viendra

$$\frac{d^2u}{dxdt}=\frac{d^2u}{dxda}\varphi+\frac{du}{da}\frac{d\varphi}{dx};$$

or on a $\frac{du}{dx}=\frac{du}{db}\varphi_1$: donc $\frac{d^2u}{dxdt}=\varphi\frac{d.\varphi_1\frac{du}{db}}{da}+\frac{du}{da}\frac{d\varphi}{dx}$. Mais φ exprimant, ainsi que u, une fonction quelconque de y et de z, il existe entre $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{db}$ la même relation qu'entre $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{db}$: on aura donc encore $\frac{d\varphi}{dx}=\varphi_1\frac{d\varphi}{db}$, d'où

$$\frac{d^2u}{dxdt}=\varphi\varphi_1\frac{d^2u}{dadb}+\varphi\frac{d\varphi_1}{da}\frac{du}{db}+\varphi_1\frac{d\varphi}{db}\frac{du}{da};$$

et comme il faut changer φ en φ^m, φ_1 en $\varphi_1{}^n$, il viendra

$$\frac{d^2u}{dxdt}=\varphi^m\varphi_1{}^n\frac{d^2u}{dadb}+n\varphi^m\varphi_1{}^{n-1}\frac{d\varphi_1}{da}\frac{du}{db}+m\varphi^{m-1}\varphi_1{}^n\frac{d\varphi}{db}\frac{du}{da},$$

bien entendu que φ et φ_1, ainsi que u, seront réduits à des fonctions de a et de b, en mettant au lieu de y et de z leurs valeurs, lorsque t et x sont nuls. Ayant formé ainsi $\frac{d^2u}{dxdt}$, que nous représenterons par $U^{(m+n)}$, on aura pour le terme général du développement de la fonction proposée,

$$\frac{d^{m+n-2}U^{(m+n)}}{da^{m-1}db^{n-1}}\cdot\frac{t^mx^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n};$$

chacun des termes s'obtiendra individuellement, en prenant pour m et pour n tous les nombres entiers 0, 1, 2, 3, etc.

109. Si, dans les formules qui terminent le n° 107, on fait $x=1$, on aura l'équation

Théorème de M. Lagrange, et ses usages.

$$y=a+\varphi(y),$$

et la série

$$\psi(y)=\psi(a)+\psi'(a)\varphi(a)+\frac{1}{1.2}\frac{d.\psi'(a)\varphi(a)^2}{da}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^2.\psi'(a)\varphi(a)^3}{da^2}+\text{etc.},$$

à laquelle M. Lagrange est parvenu par induction, en développant les racines des équations algébriques littérales. On l'appelle souvent le *théorème* de M. Lagrange : elle fait époque dans l'histoire de l'Analyse, par rapport au développement des fonctions en séries ; et son importance m'engage à entrer dans quelques détails sur ses applications, qui offrent d'ailleurs des singularités remarquables.

Proposons-nous pour premier exemple, de tirer de l'équation $\alpha - \beta y + \gamma y^m = 0$ une expression de y^n. En mettant cette équation sous la forme $y = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} y^m$, et la comparant avec $y = a + \varphi(y)$, on a

$$a = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \varphi(y) = \frac{\gamma}{\beta} y^m, \qquad \psi(y) = y^n;$$

et laissant, pour abréger, a au lieu de $\frac{\alpha}{\beta}$, on trouve

$$\varphi(a) = a^m \frac{\gamma}{\beta}, \qquad \psi(a) = a^n, \quad \psi'(a)\varphi(a) = na^{n+m-1}\frac{\gamma}{\beta},$$

$$\psi'(a)\varphi(a)^2 = na^{n+2m-1}\frac{\gamma^2}{\beta^2}, \quad \psi'(a)\varphi(a)^3 = na^{n+3m-1}\frac{\gamma^3}{\beta^3}, \quad \text{etc.}$$

et par conséquent

$$y^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n+m-1}\frac{\gamma}{\beta} + \frac{n(n+2m-1)}{1 \cdot 2} a^{n+2m-2}\frac{\gamma^2}{\beta^2} + \frac{n(n+3m-1)(n+3m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n+3m-3}\frac{\gamma^3}{\beta^3} + \text{etc.},$$

ou, en remplaçant a par $\frac{\alpha}{\beta}$,

$$y^n = \frac{\alpha^n}{\beta^n}\left\{1 + \frac{n}{1}\frac{\alpha^{m-1}\gamma}{\beta^m} + \frac{n(n+2m-1)}{1 \cdot 2}\frac{\alpha^{2m-2}\gamma^2}{\beta^{2m}} + \frac{n(n+3m-1)(n+3m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{\alpha^{3m-3}\gamma^3}{\beta^{3m}} + \text{etc.}\right\}.$$

L'équation proposée doit, en général, donner autant de valeurs pour y^n qu'elle a de racines ; mais le développement ci-dessus n'exprimant qu'une seule de ces valeurs, on peut demander à quelle racine il se rapporte, et M. Lagrange y a répondu, en observant que puisque ce développement s'évanouit lorsque $\alpha = 0$, il doit dériver de la racine que cette hypothèse fait évanouir dans l'équation proposée, racine qui est la plus petite de toutes, comme on va le voir pour le cas particulier $\alpha - \beta y + \gamma y^2 = 0$.

Les racines de cette dernière équation sont

$$y = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} = \frac{\beta}{2\gamma}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}}\right\}.$$

On a premièrement,

$$\left(1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} - \frac{1.1}{2.4}\frac{(4\alpha\gamma)^2}{\beta^4} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{(4\alpha\gamma)^3}{\beta^6} - \text{etc.}$$

d'où on tire

$$y = \frac{\beta}{2\gamma} \pm \frac{\beta}{2\gamma}\left\{1 - 2\frac{\alpha\gamma}{\beta^2} - 1.2\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^4} - 1.1.4\frac{\alpha^3\gamma^3}{\beta^6} - \text{etc.}\right\},$$

et ne prenant que le signe inférieur, on obtiendra

$$\begin{aligned} y &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2\gamma}{\beta^3} + \frac{2\alpha^3\gamma^2}{\beta^5} + \text{etc.} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\left\{1 + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + 2\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^4} + \text{etc.}\right\}, \end{aligned}$$

série qui est précisément ce que devient l'expression de y^n, trouvée ci-dessus, lorsqu'on y fait $n = 1$ et $m = 2$.

110. Le procédé par lequel M. Lagrange a vérifié cette propriété de sa formule, de donner le développement qui se rapporte à la plus petite racine, est trop curieux pour ne pas l'insérer ici. Il a remarqué, dès les premiers temps où il s'est occupé de cet objet, que si on faisait $\psi(y) = y^{-n}$, le développement

$$y^{-n} = a^{-n} - \frac{n}{1}a^{-n-1}\varphi(a) - \frac{n}{1.2}\frac{d.a^{-n-1}\varphi(a)^2}{da} - \text{etc.}$$

qu'on obtenait alors, comprenait d'abord des termes où l'exposant de a était négatif, et que leur somme prise à part exprimait celle des racines de l'équation proposée, élevées chacune à la puissance $-n$, c'est-à-dire, que si α, β, γ, δ, etc. désignent les racines de l'équation $a - y + \varphi(y) = 0$, l'ensemble des termes dans lesquels l'exposant de a est négatif, représente la fonction

$$\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} + \frac{1}{\gamma^n} + \text{etc.};$$

et voici comment il a prouvé depuis, cette dernière proposition:

Soit k le coefficient de la plus haute puissance de y dans $\varphi(y)$, on aura

$$a-y+\varphi(y)=k(\alpha-y)(\beta-y)(\gamma-y)+\text{etc.};$$

prenant les logarithmes de chaque membre et différentiant, on obtiendra successivement

$$\mathrm{l}\{a-y+\varphi(y)\}=\mathrm{l}k+\mathrm{l}(\alpha-y)+\mathrm{l}(\beta-y)+\mathrm{l}(\gamma-y)+\text{etc.},$$
$$\frac{1-\varphi'(y)}{a-y+\varphi(y)}=\frac{1}{\alpha-y}+\frac{1}{\beta-y}+\frac{1}{\gamma-y}+\text{etc.};$$

convertissant en série chaque terme du second membre de la dernière équation, on formera une série dont le terme général sera

$$\left\{\frac{1}{\alpha^{n+1}}+\frac{1}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}\right\}y^n,$$

et la quantité qui multiplie y^n aura par conséquent pour expression le coefficient de la même puissance de y, dans le développement de la fonction $\frac{1-\varphi'(y)}{a-y+\varphi(y)}$. Pour obtenir ce coefficient, cherchons celui de la fonction $\frac{\mathrm{f}(y)}{a-y+\varphi(y)}$, en supposant que

$$\mathrm{f}(y)=A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\text{etc.}$$
$$\varphi(y)=B_0+B_1y+B_2y^2+B_3y^3+\text{etc.}$$

Si l'on observe que

$$\frac{\mathrm{f}(y)}{a-y+\varphi(y)}=\frac{\mathrm{f}(y)}{a-y}\left\{\frac{1}{1+\frac{\varphi(y)}{a-y}}\right\},$$

on pourra développer, suivant les puissances de $\frac{\varphi(y)}{a-y}$, la fraction proposée, qui deviendra

$$\frac{\mathrm{f}(y)}{a-y}-\frac{\mathrm{f}(y)\varphi(y)}{(a-y)^2}+\frac{\mathrm{f}(y)\varphi(y)^2}{(a-y)^3}-\frac{\mathrm{f}(y)\varphi(y)^3}{(a-y)^4}+\text{etc.},$$

série dans laquelle il faudra introduire les développemens des fractions

$$\frac{1}{a-y},\quad \frac{1}{(a-y)^2},\quad \frac{1}{(a-y)^3},\quad \text{etc.},$$

qu'on peut obtenir par la formule du binome; mais on les déduit successivement les uns des autres, en observant que

$$\frac{1}{a-y} = \frac{1}{a} + \frac{y}{a^2} + \frac{y^2}{a^3} + \frac{y^3}{a^4} \ldots + \frac{y^n}{a^{n+1}} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{dy} d \frac{1}{a-y} = \frac{1}{(a-y)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2y}{a^3} + \frac{3y^2}{a^4} \ldots + \frac{(n+1)y^n}{a^{n+2}} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2dy^2} d^2 \frac{1}{a-y} = \frac{1}{(a-y)^3} = \frac{2}{2a^3} + \frac{2.3y}{2a^4} \ldots + \frac{(n+1)(n+2)y^n}{2a^{n+3}} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2.3dy^3} d^3 \frac{1}{a-y} = \frac{1}{(a-y)^4} = \frac{2.3}{2.3a^4} + \frac{2.3.4y}{2.3a^5} \ldots + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)y^n}{2.3a^{n+4}} + \text{etc.}$$

etc.

Cela posé, la fraction $\frac{f(y)}{a-y}$ fournira dans le terme général la partie

$$\frac{A_0 y^n}{a^{n+1}} + \frac{A_1 y^n}{a^n} + \frac{A_2 y^n}{a^{n-1}} + \frac{A_3 y^n}{a^{n-2}} \ldots + \frac{A_n y^n}{a},$$

qui s'arrête au terme divisé par la première puissance de a; cette partie étant réduite au même dénominateur, devient

$$\frac{A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 \ldots + A_n a^n}{a^{n+1}} y^n,$$

et revient par conséquent à $\frac{f(a)}{a^{n+1}} y^n$, pourvu que l'on borne le développement aux termes dans lesquels a est affecté d'un exposant négatif. Cette conséquence subsisterait encore quand on écrirait $f(a)\varphi(a)$, au lieu de $f(a)$, puisque ce produit est de la même forme que $f(a)$; ainsi le terme général du développement de $\frac{f(y)\varphi(y)}{a-y}$ serait encore exprimé par $\frac{f(a)\varphi(a)}{a^{n+1}} y^n$, dans les mêmes conditions que ci-dessus.

Si maintenant on différentie par rapport à a, l'expression $\frac{f(a)\varphi(a)}{a^{n+1}}$, on aura le coefficient de y^n dans la différentielle de la fonction $\frac{f(y)\varphi(y)}{a-y}$, prise de même par rapport à a; or cette dernière est $-\frac{f(y)\varphi(y)}{(a-y)^2} da$: il est donc évident que $\frac{1}{da} d \frac{f(a)\varphi(a)}{a^{n+1}}$ est le coefficient de y^n dans le développement de la fonction $-\frac{f(y)\varphi(y)}{(a-y)^2}$, en observant toujours de ne prendre que les termes dans lesquels a a un exposant négatif.

Par les mêmes raisons, le coefficient de y^n dans le développement de $\frac{f(y)\varphi(y)^2}{a-y}$, serait $\frac{f(a)\varphi(a)^2}{a^{n+1}}$, et différentiant deux fois par rapport à a, chacune de ces fonctions, le résultat fourni par la seconde donnera le coefficient de y^n dans le développement de celui qu'on tire de la première : en effectuant le calcul, on trouvera

$$\frac{2f(y)\varphi(y)^2}{(a-y)^3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{da^2}d^2\frac{f(a)\varphi(a)^2}{a^{n+1}},$$

et divisant par 2, on en conclura que l'assemblage des termes de l'expression $\frac{1}{2da^2}d^2\frac{f(a)\varphi(a)^2}{a^{n+1}}$, dans lesquels a a un exposant négatif, forme le coefficient de y^n dans le développement de $\frac{f(y)\varphi(y)^2}{(a-y)^3}$.

On prouverait de la même manière, que le coefficient de y^n, dans le développement de la fonction $\frac{f(y)\varphi(y)^3}{(a-y)^4}$, est

$$\frac{1}{2.3da^3}d^3\frac{f(a)\varphi(a)^3}{a^{n+1}},$$

et ainsi de suite; ensorte que le terme général du développement de $\frac{f(y)}{a-y+\varphi(y)}$ sera

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{f(a)}{a^{n+1}}+\frac{1}{da}d\frac{f(a)\varphi(a)}{a^{n+1}}+\frac{1}{1.2da^2}d^2\frac{f(a)\varphi(a)^2}{a^{n+1}}\\ +\frac{1}{1.2.3da^3}d^3\frac{f(a)\varphi(a)^3}{a^{n+1}}+\text{etc.}\end{array}\right\}y^n,$$

en se bornant aux termes où l'exposant de a est négatif.

Il est visible que les différentielles successives de cette expression, relatives à a, correspondent à celles de la fonction $\frac{f(y)}{a-y+\varphi(y)}$, prises dans la même hypothèse; et l'on en déduit, par de simples différentiations, le coefficient de y^n dans les développemens des fonctions

$$\frac{f(y)}{\{a-y+\varphi(y)\}^2}, \quad \frac{f(y)}{\{a-y+\varphi(y)\}^3}, \quad \text{etc.}$$

La fonction spéciale qu'il s'agit de développer étant $\frac{1-\varphi'(y)}{a-y+\varphi(y)}$, il faut, dans la série ci-dessus, changer $f(y)$ en $1-\varphi'(y)$; mais pour plus de généralité, M. Lagrange y substitue $\psi(y)\{1-\varphi'(y)\}$, ψ désignant une fonction rationnelle et entière de y. Si, pour abréger, on fait $\frac{\psi(a)}{a^{n+1}}=\Psi(a)$, et qu'on écrive, au lieu des fonctions $\varphi(a)$ et $\Psi(a)$, les lettres φ et Ψ seules, il viendra

$$\left\{\begin{array}{l} \Psi-\Psi\varphi'+\frac{1}{da}\{d.\Psi\varphi-d.\Psi\varphi\varphi'\} \\ \qquad +\frac{1}{1.2da^2}\{d^2.\Psi\varphi^2-d^2.\Psi\varphi^2\varphi'\} \\ \qquad +\frac{1}{1.2.3da^3}\{d^3.\Psi\varphi^3-d^3.\Psi\varphi^3\varphi'\}+\text{etc.}\end{array}\right\}y^n;$$

on observera ensuite que

$$\frac{1}{da}d.\Psi\varphi=\Psi\varphi'+\varphi\Psi'$$

$$\frac{1}{2da^2}d^2.\Psi\varphi^2=\frac{1}{da}d\left(\frac{1}{2da}d.\Psi\varphi^2\right)=\frac{1}{da}\left\{d.\Psi\varphi\varphi'+\frac{1}{2}d.\varphi^2\Psi'\right\}$$

$$\frac{1}{3da^3}d^3.\Psi\varphi^3=\frac{1}{da^2}d^2\left(\frac{1}{3da}d.\Psi\varphi^3\right)=\frac{1}{da^2}\left\{d^2.\Psi\varphi^2\varphi'+\frac{1}{3}d^2.\varphi^3\Psi'\right\}$$

etc.

En mettant ces valeurs dans chaque terme et réduisant, on obtiendra l'expression

$$\left\{\Psi+\frac{1}{1}\Psi'\varphi+\frac{1}{1.2}\frac{d.\Psi'\varphi^2}{da}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^2.\Psi'\varphi^3}{da^2}+\text{etc.}\right\}y^n;$$

où le coefficient de y^n est précisément la série du n° 109; mais dans l'usage auquel elle est employée ici, il n'en faut pousser le développement qu'aussi loin qu'il y a des termes où la lettre a est affectée d'exposans négatifs.

En prenant $\psi(y)=1$, afin d'obtenir le terme général du développement de $\frac{1-\varphi'(y)}{a-y+\varphi(y)}$, il vient $\psi(a)=1$, $\Psi(a)=\frac{1}{a^{n+1}}$; et l'on a par conséquent, en n'embrassant que les termes qui contiendront des puissances négatives de a,

$$\left\{\frac{1}{\alpha^{n+1}}+\frac{1}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}\right\}y^n,$$

$$=\left\{\frac{1}{a^{n+1}}-\frac{n+1}{1}\frac{\varphi(a)}{a^{n+2}}-\frac{n+1}{2da}d.\frac{\varphi(a)^2}{a^{n+3}}-\frac{n+1}{2.3da^2}d^2.\frac{\varphi(a)^3}{a^{n+4}}-\text{etc.}\right\}y^n,$$

ou, en ne prenant que le coefficient de y^{n-1}, et écrivant $n-1$ à la place de n,

$$\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}+\frac{1}{\gamma^n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=a^{-n}-na^{-n-1}\varphi(a)-\frac{n}{2}\,\frac{d.a^{-n-1}\varphi(a)^2}{da}-\frac{n}{2.3}\,\frac{d^2.a^{-n-1}\varphi(a)^3}{da^2}-\text{etc.},$$

résultat très-remarquable, puisqu'il offre le moyen de calculer immédiatement, par des différentiations, la somme des puissances négatives des racines des équations algébriques. On en déduirait celles des puissances positives, en ne l'appliquant à l'équation proposée qu'après avoir écrit dans celle-ci $\frac{1}{y}$ au lieu de y.

Le résultat indiqué ci-dessus ne répondant qu'à la fonction particulière $\frac{1-\varphi'(y)}{a-y+\varphi(y)}$, il reste encore à savoir à quoi répond le terme général de la fonction $\frac{\psi(y)\{1-\varphi'(y)\}}{a-y+\varphi(y)}$; pour y parvenir, il faut se rappeler que

$$\frac{1-\varphi'(y)}{a-y+\varphi(y)}=\frac{1}{\alpha-y}+\frac{1}{\beta-y}+\frac{1}{\gamma-y}+\text{etc.};$$

et que par conséquent,

$$\frac{\psi(y)\{1-\varphi'(y)\}}{a-y+\varphi(y)}=\frac{\psi(y)}{\alpha-y}+\frac{\psi(y)}{\beta-y}+\frac{\psi(y)}{\gamma-y}+\text{etc.};$$

Cela posé, ψ étant une fonction rationnelle et entière de y, on pourra la diviser par $\alpha-y$, jusqu'à ce qu'elle ne renferme plus y, et si m désigne l'exposant de son degré, le quotient sera du degré $m-1$. On peut aisément découvrir la forme du reste, en partant de l'équation

$$\frac{\alpha^m-y^m}{\alpha-y}=\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}y+\ldots\ldots+y^{m-1}\quad (\textit{Élém. d'Alg.}),$$

d'après laquelle il est évident que $\psi(\alpha)-\psi(y)$ est divisible par $\alpha-y$. En représentant le quotient par $F(\alpha,y)$, il viendra

$$\frac{\psi(y)}{\alpha-y}=-\frac{\psi(\alpha)-\psi(y)}{\alpha-y}+\frac{\psi(\alpha)}{\alpha-y}=-F(\alpha,y)+\frac{\psi(\alpha)}{\alpha-y};$$

en opérant de même sur la fraction $\frac{\psi(y)}{\beta-y}$, et sur toutes les autres;

on trouvera

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\psi(y)\{1-\varphi'(y)\}}{a-y+\varphi(y)}=-F(\alpha,y)-F(\beta,y)-F(\gamma,y)-\text{etc.}\\ +\dfrac{\psi(\alpha)}{\alpha-y}+\dfrac{\psi(\beta)}{\beta-y}+\dfrac{\psi(\gamma)}{\gamma-y}+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Les fonctions $F(\alpha,y)$, $F(\beta,y)$, etc. étant entières et du degré $m-1$, ne sauraient avoir plus de m termes, dont le dernier sera affecté au plus de y^{m-1}; au-delà de ce degré, le développement du second membre de l'équation précédente ne comprendra plus que les termes provenant du développement des fractions que ce membre renferme; donc en prenant $n>m$, son terme général sera

$$\left\{\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^{n+1}}+\frac{\psi(\beta)}{\beta^{n+1}}+\frac{\psi(\gamma)}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}\right\}y^n;$$

donc c'est à la fonction

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^{n+1}}+\frac{\psi(\beta)}{\beta^{n+1}}+\frac{\psi(\gamma)}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.};$$

ou bien à la fonction

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^{n}}+\frac{\psi(\beta)}{\beta^{n}}+\frac{\psi(\gamma)}{\gamma^{n}}+\text{etc.},$$

en mettant $n-1$ à la place de n, et prenant $\Psi(a)=\frac{\psi(a)}{a^n}$, que répond la série

$$\Psi(a)+\frac{1}{1}\Psi'(a)\varphi(a)+\frac{1}{1.2}\frac{d.\Psi'(a)\varphi(a)^2}{da}+\text{etc.},$$

lorsqu'on s'y borne aux termes contenant des puissances négatives de a.

111. Il reste encore à examiner à quoi répond la série entière. Le nombre de ses termes à exposant négatif augmentant avec la valeur de n, il s'ensuit qu'il n'y aurait aucun terme à rejeter de la série, si on regardait cette valeur comme infinie; mais on ne voit pas ce que pourrait signifier alors la fonction

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^{n}}+\frac{\psi(\beta)}{\beta^{n}}+\frac{\psi(\gamma)}{\gamma^{n}}+\text{etc.}$$

Il n'en serait pas de même du rapport de cette fonction à la suivante,

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^{n+r}}+\frac{\psi(\beta)}{\beta^{n+r}}+\frac{\psi(\gamma)}{\gamma^{n+r}}+\text{etc.};$$

car ce rapport peut se mettre sous la forme

$$\frac{\frac{1}{a^n}\left\{\psi(\alpha)+\frac{\psi(\beta)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}+\frac{\psi(\gamma)}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^n}+\text{etc.}\right\}}{\frac{1}{a^{n+r}}\left\{\psi(\alpha)+\frac{\psi(\beta)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+r}}+\frac{\psi(\gamma)}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{n+r}}+\text{etc.}\right\}}$$

et si α désigne la plus petite des racines α, β, γ, etc., les diviseurs $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$, $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^n$, etc., pouvant être rendus aussi grands qu'on voudra par l'augmentation du nombre n, la limite de l'expression totale sera a^r, d'où il résulte que si l'on désigne par $\Pi(a)$ la fonction $\frac{\psi(a)}{a^{n+r}}$, la fonction

$$\frac{\Psi(a)+\frac{1}{1}\Psi'(a)\varphi(a)+\text{etc.}}{\Pi(a)+\frac{1}{1}\Pi'(a)\varphi(a)+\text{etc.}}$$

aura d'autant plus de termes communs avec le développement de a^r, qu'on y supposera n plus grand, puisque les premiers termes du quotient ne dépendent jamais que d'un certain nombre des premiers termes du dividende et du diviseur : or c'est une propriété très-remarquable des séries ci-dessus, que leur produit et leur quotient sont ce que deviendrait la série du numérateur, si on y substituait à la fonction $\Psi(a)$ le produit ou le quotient des fonctions $\Psi(a)$ et $\Pi(a)$.

On s'en assure en multipliant en effet l'une des séries par l'autre : et pour abréger, je n'écris que les lettres Ψ et Π, comme je l'ai déjà fait plus haut : il vient

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\Psi+\Psi'\varphi+\frac{d.\Psi'\varphi^2}{1.2da}+\frac{d^2.\Psi'\varphi^3}{1.2.3da^3}+\text{etc.}\right\}\\ \times\left\{\Pi+\Pi'\varphi+\frac{d.\Pi'\varphi^2}{1.2da}+\frac{d^2.\Pi'\varphi^3}{1.2.3da^3}+\text{etc.}\right\}\end{array}\right\}=$$

$$\begin{array}{l}\Psi\Pi+\varphi(\Psi'\Pi+\Psi\Pi')\\ \quad+\varphi^2\Psi'\Pi'+\frac{1}{2}\Psi\frac{d.\Pi'\varphi^2}{da}+\frac{1}{2}\Pi\frac{d.\Psi'\varphi^2}{da}\\ \quad+\text{etc.},\end{array}$$

où il faut se rappeler que

$$\Psi'=\frac{d\Psi}{da},\qquad \Pi'=\frac{d\Pi}{da}.$$

Il en résulte d'abord que

$$\Psi'\Pi+\Psi\Pi'=\Pi\frac{d\Psi}{da}+\Psi\frac{d\Pi}{da}=\frac{d.\Psi\Pi}{da};$$

on a ensuite

$$\frac{d.\Pi'\varphi^2}{da} = \varphi^2\frac{d^2\Pi}{da^2} + 2\varphi\frac{d\varphi}{da}\frac{d\Pi}{da},$$

$$\frac{d.\Psi'\varphi^2}{da} = \varphi^2\frac{d^2\Psi}{da^2} + 2\varphi\frac{d\varphi}{da}\frac{d\Psi}{da};$$

et par ces valeurs on trouve que

$$\varphi^2\Psi'\Pi' + \frac{1}{2}\Psi\frac{d.\Pi'\varphi^2}{da} + \frac{1}{2}\Pi\frac{d.\Psi'\varphi^2}{da}$$

revient à

$$\frac{1}{2}\left\{\varphi^2\left[\Psi\frac{d^2\Pi}{da^2} + 2\frac{d\Psi}{da}\frac{d\Pi}{da} + \Pi\frac{d^2\Psi}{da^2}\right] + 2\varphi\frac{d\varphi}{da}\left[\Psi\frac{d\Pi}{da} + \Pi\frac{d\Psi}{da}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d\left(\varphi^2\frac{d.\Psi\Pi}{da}\right)}{da}.$$

Ce calcul, dont la marche est suffisamment indiquée pour qu'on puisse l'étendre à un plus grand nombre de termes, montre que le produit des séries proposées est de la forme

$$\Psi\Pi + \varphi\frac{d.\Psi\Pi}{da} + \frac{d\left(\varphi^2\frac{d.\Psi\Pi}{da}\right)}{2da} + \text{etc.},$$

qui est la même que celle que prendrait la première série en Ψ, si l'on y remplaçait cette fonction par le produit des fonctions Ψ et Π. Si on représente donc par (Ψ) la série en Ψ, et par (Π) la série en Π, on aura l'équation identique

$$(\Psi)(\Pi) = (\Psi.\Pi),$$

qui, d'après le sens attaché ci-dessus aux parenthèses, exprime que le produit des séries en Ψ et en Π est le même que la série qu'on formerait avec la fonction égale au produit des fonctions Ψ et Π.

En faisant le produit $\Psi.\Pi = \Omega$, l'équation précédente devient $(\Psi)(\Pi) = (\Omega)$, et donne

$$\frac{(\Omega)}{(\Psi)} = (\Pi);$$

mais $\Pi = \frac{\Omega}{\Psi}$: donc

$$\frac{(\Omega)}{(\Psi)} = \left(\frac{\Omega}{\Psi}\right);$$

et par conséquent le quotient des séries en Ψ et en Ω, est identique avec la série formée du quotient de ces fonctions.

De cette dernière équation, qui est indépendante de la forme des fonctions Ω et Ψ, on conclut que le quotient des séries formées avec les fonctions $\frac{\psi(a)}{a^n}$ et $\frac{\psi(a)}{a^{n+r}}$ est identique avec la série formée du quotient de ces fonctions, c'est-à-dire en remplaçant $\Psi(a)$ par a^r; et comme le quotient des premières séries considérées en entier, répond à α^r, α étant la plus petite des racines de l'équation $a-y+\varphi(y)=0$, on aura enfin

$$\alpha^r = a^r + \frac{r}{1}a^{r-1}\varphi(a) + \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}.a^{r-1}\varphi(a)^2}{\mathrm{d}a} + \text{etc.};$$

série qui se change dans celle du n° 110, lorsqu'on y met $-n$ au lieu de r; d'où suit cette conséquence : la série

$$y^{-n} = a^{-n} - \frac{n}{1}a^{-n-1}\varphi(a) - \frac{n}{1.2}\frac{\mathrm{d}.a^{-n-1}\varphi(a)^2}{\mathrm{d}a} - \text{etc.};$$

qui, lorsqu'on n'en prend que les termes affectés d'exposans négatifs, exprime la somme des puissances du degré $-n$ de toutes les racines de l'équation proposée, étant considérée avec tous ses termes, offre alors l'expression de la puissance $-n$ de la plus petite de ces racines.

112. On passe sans difficulté du développement de α^r à celui d'une fonction $\psi(\alpha)$ qui serait de la forme

$$M\alpha^r + N\alpha^s + P\alpha^t + \text{etc.},$$

parce qu'en prenant séparément les expressions des termes $M\alpha^r$, $N\alpha^s$, $P\alpha^t$, etc., et les ajoutant, il vient

$$\begin{gathered} Ma^r + Na^s + Pa^t + \text{etc.}\ldots = \psi(a), \\ (rMa^{r-1} + sNa^{s-1} + tPa^{t-1} + \text{etc.})\varphi(a) = \psi'(a)\varphi(a); \end{gathered}$$

et en changeant α en y, on retombe sur l'expression générale de $\psi(y)$ donnée dans le n° 109. Cette manière d'étendre la formule trouvée ci-dessus, offrirait une démonstration du théorème de M. Lagrange, très-complète pour les fonctions rationnelles et entières, mais moins directe et moins générale que celle qu'en a donnée M. Laplace.

M. Lagrange remarque encore que si l'on fait $a=0$ dans l'équation $a-y+\varphi(y)=0$, elle se réduit à $y=\varphi(y)$, sans perdre, au fond, rien de sa généralité; mais il faut aussi faire $a=0$, après le développement des termes de la série

$$\psi(y)=\psi(a)+\frac{1}{1}\psi'(a)\varphi(a)+\frac{d.\psi'(a)\varphi(a)^2}{1.2da}+\text{etc.}$$

Une dernière remarque qu'il ne faut pas omettre ici, c'est que par des changemens de forme convenables, opérés dans l'équation proposée, lorsqu'elle est algébrique, M. Lagrange est parvenu à tirer de son théorème les développemens des diverses racines de cette équation; mais nous renverrons pour ces détails, au Mémoire cité à ce sujet dans la Table.

113. Il est facile de voir que le théorème de M. Lagrange présente de nombreuses applications. Il donne d'abord pour le retour des suites une formule générale qui comprend, comme cas particulier, celle qui termine le n° 58 de l'Introduction, et fournit un procédé régulier pour en développer successivement tous les termes.

Soit pour exemple l'équation indéfinie

$$z=\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\text{etc.};$$

en lui donnant la forme

$$\frac{z}{\alpha}-y-\frac{y^2}{\alpha}(\beta+\gamma y+\delta y^2+\text{etc.})=0,$$

et la comparant à $a-y+\varphi(y)=0$, il viendra

$$a=\frac{z}{\alpha},\qquad \varphi(y)=-\frac{y^2}{\alpha}(\beta+\gamma y+\delta y^2+\text{etc.});$$

et mettant en dehors des différentiations indiquées, le facteur constant $\frac{-1}{\alpha}$, qui multiplie $y^2(\beta+\gamma y+\text{etc.})$, on trouvera

$$y^n=\left.\begin{array}{l} a^n-\dfrac{n}{1\alpha}\,a^{n+1}(\beta+\gamma a+\delta a^2+\text{etc.})\\ +\dfrac{n}{1.2\alpha^2}\,\dfrac{d.a^{n+3}(\beta+\gamma a+\delta a^2+\text{etc.})^2}{da}\\ -\dfrac{n}{1.2.3\alpha^3}\,\dfrac{d^2.a^{n+5}(\beta+\gamma a+\delta a^2+\text{etc.})^3}{da^2}\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

En faisant $n=1$, effectuant les opérations indiquées, changeant y en x, a en $\frac{z}{\alpha}$, α, β, γ, etc. en a, b, c, etc., on déduira de cette formule la série indiquée page 99.

Si le nombre des termes de l'équation proposée est limité, cette formule donnera la puissance n de la plus petite de ses racines, et dans le cas contraire, l'expression de y^n, d'après le retour de la série

$$z=\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\delta y^4+\text{etc.};$$

mais cette expression correspondra encore à la plus petite des valeurs que peut avoir y; on s'en convaincra en observant que le retour de la série qui exprime le sinus par l'arc, dans le n° 58 de l'Introduction, ne nous a donné, pour le développement de l'arc par son sinus, qu'une seule série conduisant seulement à la valeur du plus petit des arcs dont le sinus est y, puisque cette valeur s'évanouit par la supposition de $y=0$, tandis qu'elle devrait être $m\pi$, m désignant un nombre entier quelconque, et π la demi-circonférence.

Quelqu'élégant que soit l'emploi du théorème de M. Lagrange, dans l'opération du retour des suites, il me semble qu'on ne peut pas le regarder comme indiquant la loi des formules auxquelles il conduit, du moins à cause de l'usage où l'on est d'ordonner ces formules par rapport aux puissances de la lettre z ou de la lettre a, suivant la dénomination de cet article; car avant d'effectuer les différentiations indiquées, il faut préalablement développer les puissances successives du polynome $(\beta+\gamma a+\delta a^2+\text{etc.})$; et en supposant cette opération faite, le procédé exposé dans le n° 59 de l'Introduction, qui ne repose que sur des considérations très-élémentaires, devient très-commode et présente dans la dérivation des coefficiens une loi extrêmement simple. J'ai cru d'autant plus à propos de faire cette remarque, que bientôt la liaison intime que toutes les recherches analogues à celles qui nous occupent, ont avec le développement des puissances d'un polynome de la forme $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc.}$ sera mise en évidence.

Par rapport aux équations transcendantes, le théorème de M. Lagrange a de très-grands avantages sur les procédés dont on se servait avant qu'il fût connu. Pour en donner un exemple, je prendrai l'équation

$$y=a+\alpha\sin y,$$

qui exprime une relation générale du premier degré, entre un arc et son sinus, et j'en déduirai le développement de ly. La comparaison de cette équation avec $a-y+\varphi(y)=0$, donne $\varphi(y)=\alpha\sin y$; et faisant $\psi(y)=ly$, il viendra

$$ly=la+\frac{\alpha}{1}\frac{\sin a}{a}+\frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d.\frac{\sin a^2}{a}}{da}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{d^2.\frac{\sin a^3}{a}}{da^2}+\text{etc.}$$

114. Les considérations précédentes mènent aussi à des formules très-commodes pour la résolution numérique et approchée des équations quelconques; mais avant d'exposer ces formules, je prendrai cette recherche dès son origine. Soit entre x et des quantités données, une équation quelconque $u=0$, et que l'on sache que l'inconnue x diffère peu du nombre a; si on écrit a au lieu de x, u deviendra fonction de a, et aura une valeur d'autant plus petite que a sera plus près de la valeur de x. En représentant par $a+h$ cette dernière, et par u' ce que devient alors u, il faudra que $u'=0$, c'est-à-dire,

Formules différentielles pour la résolution numérique des équations.

$$u+\frac{du}{da}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{da^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{da^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}=0 \quad (20);$$

mais comme, par l'hypothèse, a est déjà très-proche de x, h est nécessairement une petite quantité: en négligeant donc les termes où elle s'élève au-delà de la première puissance, on aura seulement

$$u+\frac{du}{da}h=0, \qquad \text{ou} \qquad h=-\frac{u}{\frac{du}{da}}.$$

Lorsque h sera déterminée, au moyen de cette équation, on fera

$$a+h=a', \qquad x=a'+h',$$

c'est-à-dire qu'on mettra dans u et dans $\frac{du}{da}$, a' à la place de a, et l'expression de h deviendra celle de h'. En continuant d'opérer de la même manière, on trouvera des valeurs de x de plus en plus approchées.

Pour appliquer cette méthode, cherchons la valeur de x dans l'équation

$$x^x-100=0,$$

par laquelle il est visible que x doit tomber entre 3 et 4; nous prendrons donc $a=3,5$ pour la première valeur approchée, puis, passant aux logarithmes, nous obtiendrons

$$x\,\mathrm{l}x-1100=0 \qquad \text{et} \qquad u=a\,\mathrm{l}a-1100=-0,09576.$$

En faisant usage des logarithmes ordinaires, dont le module est 0,43429 (*Introd.* 27), nous aurons (13)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}=\mathrm{l}a+M=0,54407+0,43429=0,97836,$$

d'où

$$-0,09576+0,97836h=0,$$

et par conséquent

$$h=\frac{9576}{97836}=0,09788:$$

donc

$$x=3,598.$$

Une seconde opération, dans laquelle on prendrait $a=3,598$, donnerait une valeur encore plus exacte.

115. Si on avait deux équations $u=0$ et $v=0$, entre x et y, et que a et b fussent des valeurs approchées de ces inconnues, on mettrait $a+h$ au lieu de x, $b+k$ au lieu de y; et on trouverait, par la formule du n° 27, en négligeant les produits et les puissances de h et de k,

$$u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b}\frac{k}{1}=0,$$
$$v+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}b}\frac{k}{1}=0.$$

Ces équations serviraient à déterminer les corrections h et k; faisant ensuite $a+h=a'$, $b+k=b'$ et $x=a'+h'$, $y=b'+k'$, on trouverait encore comme ci-dessus, les valeurs des nouvelles corrections h' et k', et on continuerait d'opérer ainsi jusqu'à ce qu'on fût arrivé à des résultats suffisamment exacts.

Prenons pour exemple les deux équations

$$x^x+y^y-1000=0, \qquad x^y+y^x-100=0;$$

et supposons qu'après divers essais, on soit parvenu à reconnaître que le plus grand des deux nombres cherchés doit être compris entre 4 et 5, et le plus petit entre 2 et 3 : prenant x pour le premier, y pour le second, et faisant $4,5=a$, $2,5=b$, on aura

$$\begin{aligned}
u &= a^a + b^b - 1000 & v &= a^b + b^a - 100\\
\frac{du}{da} &= a^a \mathrm{l}a + a^a & \frac{dv}{da} &= b^a \mathrm{l}b + ba^{b-1}\\
\frac{du}{db} &= b^b \mathrm{l}b + b^b & \frac{dv}{db} &= a^b \mathrm{l}a + ab^{a-1}.
\end{aligned}$$

On calculera les quantités u, v, $\frac{du}{da}$, $\frac{dv}{da}$, $\frac{du}{db}$, $\frac{dv}{db}$, en observant que les logarithmes indiqués sont népériens, et on formera les deux équations du premier degré,

$$\begin{aligned}
-\ 120,244 + 2178,232h + 18,937k &= 0,\\
+\ 4,720 + 80,458h + 175,786k &= 0,
\end{aligned}$$

d'où on tirera $h=0,056$, $k=-0,052$, et par conséquent $a+h=a'=4,56$, $b+k=b'=2,45$: une seconde opération, effectuée sur les nombres a' et b', donnerait des valeurs beaucoup plus approchées.

116. La marche tracée dans les deux articles précédens est la plus commode pour effectuer le calcul arithmétique des valeurs approchées des inconnues; mais elle laisse à desirer leur expression en série convergente. Cette expression peut s'obtenir en appliquant à l'équation

$$u + \frac{du}{da}h + \frac{d^2u}{da^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} = 0,$$

la méthode du retour des suites, soit par la formule du n° 58 de l'Introduction, soit par celle du n° 113; on trouvera la série

$$h = -\frac{u}{\frac{du}{da}} - \frac{\frac{d^2u}{da^2}}{2\left(\frac{du}{da}\right)^3}u^2 - \frac{3\left(\frac{d^2u}{da^2}\right)^2 - \frac{du}{da}\frac{d^3u}{da^3}}{2.3\left(\frac{du}{da}\right)^5}u^3 - \text{etc.},$$

ordonnée suivant les puissances de u.

Euler a donné, pour le même objet, une série qui rentre implicitement dans la précédente, mais dont la loi est plus simple; il y est parvenu en considérant x comme fonction de u, et cherchant quelle est la valeur que prend x lorsque u s'évanouit, c'est-à-dire qu'ayant l'équation $\varphi(x)=0$, il fait $\varphi(x)=u$, et conçoit que l'on en ait déduit $x=\psi(u)$, ψ représentant une fonction inverse de celle que désigne φ. Cela posé, si l'on change premièrement u en $u+g$, et x en x', il viendra

$$x'=x+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}\frac{g^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{g^3}{1.2.3}+\text{etc.};$$

prenant ensuite $g=-u$, x' se changera nécessairement dans ce que devient x lorsque u devient $u-u$ ou 0, et sera par conséquent une racine de l'équation proposée. En la désignant par α, on aura donc

$$\alpha=x-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{u}{1}+\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}\frac{u^2}{1.2}-\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}u^3}\frac{u^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

série ordonnée suivant les puissances de u, et qui pourra devenir convergente, si l'on y met pour x un nombre a qui rende la fonction u très-petite.

On peut mettre cette série en nombre, sans connaître l'équation $x=\psi(u)$, en déduisant de l'équation $\varphi(x)=u$ les coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$, $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}$, etc., au moyen des formules suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}=\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}u^3}=\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u},$$

etc.,

obtenues dans le n° 61.

Voici le calcul par rapport à l'équation $x^x=100$, dont nous nous sommes déjà occupés. On posera

$$u=x\,\mathrm{l}x-\mathrm{l}\,100,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\mathrm{l}x,$$

et il viendra, en employant d'abord les logarithmes népériens, pour simplifier les différentielles successives,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} &= \frac{1}{1+\mathrm{l}x} = (1+\mathrm{l}x)^{-1},\\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} &= \frac{\mathrm{d}\,.\,(1+\mathrm{l}x)^{-1}}{\mathrm{d}x}.(1+\mathrm{l}x)^{-1} = -\frac{1}{x(1+\mathrm{l}x)^3},\\
\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}u^3} &= -\frac{\mathrm{d}\,.\,x^{-1}(1+\mathrm{l}x)^{-3}}{\mathrm{d}x}.(1+\mathrm{l}x)^{-1} = \frac{1}{x^2(1+\mathrm{l}x)^4} + \frac{3}{x^2(1+\mathrm{l}x)^5},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}
$$

puis

$$\alpha = x - \frac{u}{1+\mathrm{l}x} - \frac{u^2}{2x(1+\mathrm{l}x)^3} - \left\{\frac{1}{6x^2(1+\mathrm{l}x)^4} + \frac{1}{2x^2(1+\mathrm{l}x)^5}\right\} u^3 - \text{etc.}$$

On fera encore $x=3,5$; mais il faudra prendre d'abord $\mathrm{l}x$ dans le système népérien, ce qui donnera

$$\mathrm{l}x = 1,2527630, \quad \mathrm{l}100 = 4,6051702,$$

et par conséquent

$$u = -0,2204998, \quad 1+\mathrm{l}x = 2,2527630.$$

On pourra ensuite regarder ces résultats comme des nombres naturels, et se servir des logarithmes ordinaires pour calculer les différens termes de la série qui exprime α. En se bornant aux trois premiers, on aura

$$x = 3,5, \qquad \frac{u}{1+\mathrm{l}x} = -0,09788, \qquad \frac{u^2}{2x(1+\mathrm{l}x)^3} = 0,00061,$$

et $\alpha = 3,59727$, valeur qui n'est en défaut que d'environ une unité sur le dernier chiffre.

Il est à propos d'observer que si l'on exprime les coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$, $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}$, etc., par les coefficiens $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$, etc., au moyen des relations rapportées ci-dessus, et que l'on substitue les résultats dans l'expression de α, puis qu'on y change x en a et α en $a+h$, on obtiendra pour h, la série de la page 301.

117. La marche précédente, modifiée convenablement, s'étend à la question du n° 115, ainsi que l'a fait voir M. Lagrange. En regardant les quantités x et y comme des fonctions de u et de v, et cherchant ce qu'elles deviennent lorsque u se change en $u+g$ et v en $v+l$, on

aura, par la formule du n° 27,

$$x' = x + \frac{dx}{du}g + \frac{dx}{dv}l$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2x}{du^2}g^2 + 2\frac{d^2x}{dudv}gl + \frac{d^2x}{dv^2}l^2\right\}$$
$$+ \text{etc.},$$
$$y' = y + \frac{dy}{du}g + \frac{dy}{dv}l$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2y}{du^2}g^2 + 2\frac{d^2y}{dudv}gl + \frac{d^2y}{dv^2}l^2\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on désigne par a et b des valeurs approchées de x et de y, et par x' et y' les valeurs exactes desquelles il doit par conséquent résulter $u+g=0$, $v+l=0$, il viendra $g=-u$, $l=-v$, u et v représentant alors les valeurs particulières que prennent ces fonctions lorsqu'on y substitue a pour x et b pour y. Retenant toujours les lettres h et k, pour les corrections $x'-x$ et $y'-y$, on obtiendra donc

$$h = -\left\{\frac{dx}{du}u + \frac{dx}{dv}v\right\} + \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2x}{du^2}u^2 + 2\frac{d^2x}{dudv}uv + \frac{d^2x}{dv^2}v^2\right\} - \text{etc.},$$
$$k = -\left\{\frac{dy}{du}u + \frac{dy}{dv}v\right\} + \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2y}{du^2}u^2 + 2\frac{d^2y}{dudv}uv + \frac{d^2y}{dv^2}v^2\right\} - \text{etc.},$$

en observant de faire, après les différentiations, $x=a$, $y=b$, dans u et dans v, aussi bien que dans les coefficiens différentiels de x et de y; mais la recherche de ces derniers demande quelques attentions de plus que dans le cas précédent, à cause qu'il s'agit de fonctions de plusieurs variables.

Je ferai d'abord, afin d'abréger les calculs,

$$du = mdx + ndy, \qquad dv = pdx + qdy,$$

ensorte que

$$m = \frac{du}{dx}, \qquad n = \frac{du}{dy}, \qquad p = \frac{dv}{dx}, \qquad q = \frac{dv}{dy}.$$

Cela posé, il faut se rappeler que les coefficiens différentiels $\frac{dx}{du}$ et $\frac{dy}{du}$ sont formés dans l'hypothèse de v constant, de laquelle il suit $dv=0$;

on aura donc, dans cette hypothèse,

$$du = m dx + n dy, \quad o = p dx + q dy;$$

d'où il suit

$$1 = m\frac{dx}{du} + n\frac{dy}{du}, \quad o = p\frac{dx}{du} + q\frac{dy}{du};$$

et de la combinaison de ces équations, on tirera

$$\frac{dx}{du} = \frac{q}{mq - np}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{-p}{mq - np}.$$

Les coefficiens $\frac{dx}{dv}$ et $\frac{dy}{dv}$ étant relatifs à la variable v seulement, supposent $du = o$, et dépendent par conséquent des équations

$$o = m dx + n dy, \quad dv = p dx + q dy,$$

qui sont équivalentes à

$$o = m\frac{dx}{dv} + n\frac{dy}{dv}, \quad 1 = p\frac{dx}{dv} + q\frac{dy}{dv},$$

et donnent

$$\frac{dx}{dv} = \frac{n}{np - mq}, \quad \frac{dy}{dv} = \frac{-m}{np - mq}.$$

Les coefficiens différentiels du second ordre s'obtiendront aisément par la différentiation successive de ceux que l'on vient de trouver, et au moyen des valeurs précédentes. Soit pour exemple $\frac{dx}{du} = P$; on aura $\frac{d^2x}{du^2} = \frac{dP}{dx}\frac{dx}{du}$, où il ne s'agira que de substituer à $\frac{dx}{du}$ sa valeur.

Si on met dans les développemens de h et de k les valeurs des coefficiens différentiels

$$\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv},$$

et que l'on se borne aux premiers termes, on retombera sur les expressions qui résulteraient des équations dont on a fait usage dans le n° 115; c'est pourquoi je ne m'arrêterai point à faire aucune application des résultats ci-dessus.

118. Les calculs du n° 116 conduisent à une formule très-élégante, obtenue par M. Paoli, qui s'est occupé avec succès du développement des fonctions en séries. En effectuant le retour de la suite

$$o = u + \frac{du}{da}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{da^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

il est parvenu à donner au résultat une forme remarquable, savoir,

$$h = \frac{A}{1}u + \frac{AdA}{1.2da}u^2 + \frac{Ad(AdA)}{1.2.3da^2}u^3 + \frac{Ad\{Ad(AdA)\}}{1.2.3.4da^3}u^4 + \text{etc.},$$

où A désigne $-\left(\frac{du}{da}\right)^{-1}$.

Cette formule se conclut très-facilement de la série

$$a = x - \frac{dx}{du}\frac{u}{1} + \frac{d^2x}{du^2}\frac{u^2}{1.2} - \frac{d^3x}{du^3}\frac{u^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

indiquée sur la page 302; car on peut donner aux expressions des coefficiens différentiels de x cette forme

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}} = \left(\frac{du}{dx}\right)^{-1},$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{d.\frac{dx}{du}}{dx}.\frac{dx}{du} = \frac{1}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)^{-1} d.\left(\frac{du}{dx}\right)^{-1},$$

$$\frac{d^3x}{du^3} = \frac{d.\frac{d^2x}{du^2}}{dx}.\frac{dx}{du} = \left(\frac{du}{dx}\right)^{-1}\frac{d.\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^{-1} d.\left(\frac{du}{dx}\right)^{-1}\right\}}{dx^2},$$

etc.

en observant que dx doit être constant dans les seconds membres des équations ci-dessus, puisqu'on y regarde u comme fonction de x; écrivant ensuite a au lieu de x, dans les coefficiens différentiels où u est regardé comme fonction de x, faisant $A = -\left(\frac{du}{da}\right)^{-1}$, substituant les valeurs résultantes de $\frac{dx}{du}$, $\frac{d^2x}{du^2}$, etc., et remarquant enfin que $\alpha = a + h$, puisqu'il désigne la valeur exacte de x, on obtiendra la série de M. Paoli.

119. M. Paoli déduit du développement précédent celui de $\psi(x)$, ψ désignant une fonction quelconque; et pour cela il part du développement

$$\psi(x)=\psi(a)+\frac{d\psi(a)}{da}\frac{h}{1}+\frac{d^2\psi(a)}{da^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3\psi(a)}{da^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

que fournit le théorème de Taylor, lorsque dans $\psi(x)$, on change x en $a+h$, et il y substitue les valeurs de h et de ses puissances : ce calcul le conduit, par induction, à une formule ordonnée suivant les puissances de u, qui peut s'obtenir directement comme il suit :

En concevant que x soit fonction de u, $\psi(x)$ sera une fonction de u, et si l'on y change u en $u+g$, on aura le développement

$$\psi+\frac{d\psi}{du}\frac{g}{1}+\frac{d^2\psi}{du^2}\frac{g^2}{1.2}+\frac{d^3\psi}{du^3}\frac{g^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

La fonction ψ et ses coefficiens différentiels ne renfermeraient que u, si l'on avait remplacé x par son expression en u; mais dans leur état primitif, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{d\psi}{du}=\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=\frac{dx}{du}\frac{d\psi}{dx},\\
&\frac{d^2\psi}{du^2}=\frac{d\frac{d\psi}{du}}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=\frac{dx}{du}\frac{d\left(\frac{dx}{du}\frac{d\psi}{dx}\right)}{dx},\\
&\frac{d^3\psi}{du^3}=\frac{d\frac{d^2\psi}{du^2}}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=\frac{dx}{du}\frac{d\left\{\frac{dx}{du}d\left(\frac{dx}{du}\frac{d\psi}{dx}\right)\right\}}{dx^2},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

valeurs qu'il faudra substituer dans le développement ci-dessus, pour rapporter à la variable x les différentiations indiquées par rapport à u. Cela posé, si l'on conçoit que le changement de u en $u+g$ réponde à celui de x en $a+h$, on aura $u+g=0$, d'où $g=-u$; et les coefficiens différentiels de u se rapporteront à la valeur $x=a$: faisant donc

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{\frac{du}{da}}=\left(\frac{du}{da}\right)^{-1}\quad\text{et}\quad A=-\left(\frac{du}{da}\right)^{-1},$$

on aura

$$\psi(x)=\psi+\frac{A\psi'}{1}u+\frac{Ad(A\psi')}{1.2da}u^2+\frac{Ad[Ad(A\psi')]}{1.2.3da^2}u^3$$
$$+\frac{Ad\{Ad[Ad(A\psi')]\}}{1.2.3.4da^3}u^4+\text{etc.},$$

en se rappelant de changer x en a dans la fonction u. On pourrait aussi laisser partout la lettre x, et n'effectuer son changement en a qu'après les différentiations; on aurait, sous cette condition,

$$A=-\left(\frac{du}{dx}\right)^{-1},\ \psi(x)=\psi+\frac{A\psi'}{1}u+\frac{Ad(A\psi')}{1.2dx}u^2+\frac{Ad(AdA\psi')}{1.2.3dx^2}u^3+\text{etc.}$$

La dernière formule et celle du n° 118, font la base des recherches de M. Paoli sur le développement des fonctions en séries. S'il faut que la quantité a soit une valeur approchée de x, pour que ces séries deviennent convergentes, il suffit que la même quantité soit indépendante de x, pour conduire à un développement de cette variable, exprimé par toutes les autres quantités comprises dans l'équation $u=0$; et si cette équation renfermait d'autres variables y, z, etc., qui pourraient entrer aussi dans $\psi(x)$, on obtiendrait encore le développement de x et de $\psi(x)$, en prenant pour a une fonction quelconque de y, z, etc. Les séries remarquées par M. Paoli ne laissent donc rien à desirer du côté de la généralité; mais les opérations successives qui s'y trouvent indiquées exigent de très-longs calculs, et ne conduisent point encore à des développemens ordonnés par rapport aux variables indépendantes de l'équation proposée; c'est pourquoi ce géomètre ne se borne pas à ses premières séries. Il considère en particulier l'équation

$$x-a-\varphi(x)=0,$$

qui revient à celle dont M. Lagrange s'est occupé, et par laquelle

$$u=x-a-\varphi(x),\quad \frac{du}{dx}=1-\frac{d\varphi}{dx},$$
$$A=-\frac{1}{1-\frac{d\varphi}{dx}}=-1-\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\varphi^2}{dx^2}-\frac{d\varphi^3}{dx^3}-\text{etc.}:$$

la substitution de cette valeur, et le développement du calcul des premiers termes de l'expression précédente $\psi(x)$, conduisent M. Paoli au théorème de M. Lagrange. Je ne le suivrai pas dans ces opérations, ayant déjà démontré le même théorème d'une autre manière; mais je donnerai un exemple des artifices analytiques à l'aide desquels il ordonne par rapport aux puissances des variables y, z, le développement de x tiré d'une équation $u=0$ comprenant x, y et z.

120. Concevons qu'on ait tiré de l'équation $u=0$, la valeur de x, elle sera fonction des autres variables y et z; il en sera de même de la fonction $\psi(x)$, et le terme général de son développement sera, d'après le n° 93,

$$\frac{d^{m+n}\psi(x)}{1.2\ldots m dy^m . 1.2\ldots n dz^n} y^m z^n,$$

en ayant soin de faire $y=0$, et $z=0$, après les différentiations; mais alors l'équation $u=0$ ne contenant plus que x et des quantités indépendantes de y et de z, si l'on suppose que a soit une de ses racines simples, on pourra lui donner la forme $(x-a)A=0$, et dans son état général, elle sera réductible à la forme

$$(x-a)A-Uy-Vz=0,$$

U et V étant des fonctions de x, y, z, qui ne deviennent pas infinies lorsque l'on y fait $y=0$, $z=0$. Sous cette forme on en déduit

$$a-x+\frac{Uy+Vz}{A}=0;$$

et si l'on fait

$$\frac{Uy+Vz}{A}=\varphi(x),$$

on sera conduit à l'équation

$$a-x+\varphi(x)=0,$$

qui répond au changement de y en x et de a en a, dans celle du n° 109: on aura donc, par le théorème de M. Lagrange,

$$\psi(x)=\psi+\frac{\varphi\psi'}{1}+\frac{d.\varphi^2\psi'}{1.2dx}+\frac{d^2.\varphi^3\psi'}{1.2.3dx^2}+\text{etc.},$$

pourvu qu'après les différentiations on change x en a dans le second membre.

Cette valeur de $\psi(x)$ étant substituée dans le coefficient du produit

$y^m z^n$, indiqué ci-dessus, il deviendra, en supposant que $\psi(x)$ contienne implicitement y et z, puis séparant la partie indépendante de la fonction φ, et faisant, pour abréger, $m+n=r$,

$$\frac{d^r\psi}{1.2\ldots m dy^m.1.2\ldots n dz^n}$$
$$+\frac{d^r}{1.2\ldots m dy^m.1.2\ldots n dz^n}\left\{\frac{\varphi\psi'}{1}+\frac{d.\varphi^2\psi'}{1.2dx}+\frac{d^2.\varphi^3\psi'}{1.2.3dx^2}+\text{etc.}\right\},$$

expression où il faudra regarder les variables x, y et z comme indépendantes, faire $x=a$ après les différentiations qui se rapportent à la première, et supposer les autres nulles, après les différentiations qui s'y rapportent.

Si l'on fait attention à la forme de la valeur de $\varphi(x)$, on verra qu'il est inutile de pousser au-delà du terme $\frac{d^{r-1}.\varphi^r\psi'}{1.2\ldots r dx^{r-1}}$ la série renfermée entre les accolades, parce que la quantité

$$\varphi^{r+1}=\left(\frac{Uy+Vz}{A}\right)^{r+1},$$

où la somme des exposans de y et de z n'est pas moindre que $r+1$, ne se trouverait pas délivrée de ces variables par les r différentiations qui leur sont relatives, et s'évanouirait par conséquent, lorsqu'on les égalerait à zéro : on pourra donc prendre l'expression

$$\frac{d^r}{1.2\ldots m dy^m.1.2\ldots n dz^n}\left\{\frac{\varphi\psi'}{1}+\frac{d.\varphi^2\psi'}{1.2dx}\cdots\cdots+\frac{d^{r-1}\varphi^r\psi'}{1.2\ldots r dx^{r-1}}\right\},$$

pour la seconde partie du coefficient cherché.

Quoique cette expression n'aille plus à l'infini, on peut l'abréger encore en cherchant à lui donner la forme du développement de quelque fonction connue, sur laquelle on puisse opérer avec facilité, et pour cela, M. Paoli observe que puisqu'il faut faire $x=a$, après les différentiations qui se rapportent à cette variable, la série

$$\frac{\varphi\psi'}{1}+\frac{d.\varphi^2\psi'}{1.2dx}\cdots\cdots\cdots+\frac{d^{r-1}.\varphi^r\psi'}{1.2\ldots r dx^{r-1}}$$

est équivalente à

$$\frac{d^{r-1}.}{1.2\ldots(r-1)dx^{r-1}}(x-a)^r\left\{\frac{\varphi\psi'}{x-a}+\frac{\varphi^2\psi'}{2(x-a)^2}\cdots\cdot+\frac{\varphi^r\psi'}{r(x-a)^r}\right\}.$$

La vérité de cette remarque se reconnaît en différentiant un terme quelconque

$$\frac{(x-\alpha)^r\varphi^s\psi'}{s(x-\alpha)^s}=\frac{(x-\alpha)^{r-s}.\varphi^s\psi'}{s},$$

comme un produit de deux facteurs, d'après la formule du n° 91, et en observant que les coefficiens différentiels du facteur $(x-\alpha)^{r-s}$ s'évanouissent tous, excepté celui de l'ordre $r-s$, qui est $1.2.3.\ldots(r-s)$ (22). Les deux différentiations relatives à y et à z, qu'il faut encore effectuer sur l'expression précédente, supposant ces variables indépendantes de x, peuvent être transposées (28); et il est permis d'écrire

$$\frac{\mathrm{d}^{r-1}.(x-\alpha)^r\dfrac{\mathrm{d}^r}{1.2\ldots m\mathrm{d}y^m.1.2\ldots n\mathrm{d}z^n}\left\{\dfrac{\varphi\psi'}{x-\alpha}+\dfrac{\varphi^2\psi'}{2(x-\alpha)^2}+\dfrac{\varphi^3\psi'}{3(x-\alpha)^3}+\text{etc.}\right\}}{1.2\ldots(r-1)\mathrm{d}x^{r-1}},$$

en considérant la série comprise entre les accolades, comme si elle devait aller à l'infini, puisque les termes qui suivraient $\frac{\varphi^r\psi'}{r(x-\alpha)^r}$ disparaissent dans les différentiations relatives à y et à z; mais la série

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi\psi'}{x-\alpha}+\frac{\varphi^2\psi'}{2(x-\alpha)^2}+\frac{\varphi^3\psi'}{3(x-\alpha)^3}+\text{etc.}\\&=\psi'\left\{\frac{\varphi}{x-\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{x-\alpha}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\varphi}{x-\alpha}\right)^3+\text{etc.}\right\}\\&=-\psi'\mathrm{l}\left\{1-\frac{\varphi}{x-\alpha}\right\}\ (\textit{Int. } 29):\end{aligned}$$

on peut donc introduire $-\psi'\mathrm{l}\left\{1-\frac{\varphi}{x-\alpha}\right\}$ à la place de l'expression

$$\frac{\varphi\psi'}{x-\alpha}+\frac{\varphi^2\psi'}{2(x-\alpha)^2}\ldots\ldots+\frac{\varphi^r\psi'}{r(x-\alpha)^r},$$

et il vient

$$-\frac{\mathrm{d}^{r-1}.(x-\alpha)^r\dfrac{\mathrm{d}^r}{1.2\ldots m\mathrm{d}y^m.1.2\ldots n\mathrm{d}z^n}\left\{\psi'\mathrm{l}\left(1-\dfrac{\varphi}{x-\alpha}\right)\right\}}{1.2\ldots(r-1)\mathrm{d}x^{r-1}}.$$

A cette expression, M. Paoli joint la suivante:

$$-\frac{\mathrm{d}^{r-1}.(x-\alpha)^r\dfrac{\mathrm{d}^r}{1.2\ldots m\mathrm{d}y^m.1.2\ldots n\mathrm{d}z^n}\{\psi'\mathrm{l}\,A(x-\alpha)\}}{1.2\ldots(r-1)\mathrm{d}x^{r-1}},$$

dont le résultat est o, lorsqu'on a effectué les différentiations et changé

x en α, ainsi qu'on le verra plus bas; et par cette addition, qui n'altère point la valeur de la première formule, on a

$$-\frac{\mathrm{d}^{r-1}.(x-\alpha)^r}{1.2\ldots(r-1)\mathrm{d}x^{r-1}}\frac{\mathrm{d}^r}{1.2\ldots m\mathrm{d}y^m.1.2\ldots n\mathrm{d}z^n}\left\{\psi'\left[1A(x-\alpha)+1\left(1-\frac{\varphi}{x-\alpha}\right)\right]\right\};$$

or

$$1A(x-\alpha)+1\left(1-\frac{\varphi}{x-\alpha}\right)=1\left\{A(x-\alpha)\left(1-\frac{\varphi}{x-\alpha}\right)\right\}=1\{A(x-\alpha)-A\varphi\},$$

et mettant à la place de φ sa valeur $\frac{Uy+Vz}{A}$, on obtient

$$1\{A(x-\alpha)-A\varphi\}=1\{A(x-\alpha)-Uy-Vz\}=1u.$$

Substituant cette valeur dans la dernière expression rapportée ci-dessus, à laquelle on ajoutera la première partie du terme général, indiquée sur la page 310, on aura pour résultat final,

$$\frac{\mathrm{d}^r\psi}{1.2\ldots m\mathrm{d}y^m.1.2\ldots n\mathrm{d}z^n}-\frac{\mathrm{d}^{r-1}.(x-\alpha)^r\frac{\mathrm{d}^r(\psi'1u)}{1.2\ldots m\mathrm{d}y^m.1.2\ldots n\mathrm{d}z^n}}{1.2\ldots.(r-1)\mathrm{d}x^{r-1}},$$

en faisant, après les différentiations, $y=0$, $z=0$ et $x=\alpha$.

Il reste à montrer que l'expression

$$-\frac{\mathrm{d}^{r-1}.(x-\alpha)^r\frac{\mathrm{d}^r}{1.2\ldots m\mathrm{d}y^m.1.2\ldots n\mathrm{d}z^n}\{\psi'1A(x-\alpha)\}}{1.2\ldots.(r-1)\mathrm{d}x^{r-1}},$$

employée ci-dessus, s'évanouit dans les circonstances indiquées. Il faut d'abord observer que la quantité $1A(x-\alpha)$ étant indépendante des variables y et z, peut être transposée avant les différentiations qui se rapportent à ces variables, et que le numérateur de l'expression, peut s'écrire ainsi:

$$\mathrm{d}^{r-1}.(x-\alpha)^r 1A(x-\alpha)M,$$

M désignant le coefficient différentiel de ψ', par rapport aux variables y et z. On voit alors, par la formule du n° 91, que la différentiation indiquée conduit à un résultat de la forme

$$M\mathrm{d}^{r-1}\{(x-\alpha)^r 1A(x-\alpha)\}+\ldots\ldots+(x-\alpha)^r 1A(x-\alpha)\mathrm{d}^{r-1}M,$$

et que les termes dans lesquels le facteur $(x-a)$ aura le plus petit exposant, seront ceux du développement de $\mathrm{d}^{r-1}.(x-a)^r \mathrm{l}A(x-a)$.

En l'effectuant par la formule déjà citée, on trouvera

$$\mathrm{l}A(x-a)\mathrm{d}^{r-1}(x-a)^r + (r-1)\,\mathrm{d}\left[\mathrm{l}A(x-a)\right]\mathrm{d}^{r-2}(x-a)^r + \text{etc.} =$$
$$\left\{\mathrm{l}A(x-a).r(r-1)\ldots 2(x-a) + \frac{r-1}{x-a}.r(r-1)\ldots 3(x-a)^2 + \text{etc.}\right\}\mathrm{d}x^{r-1}.$$

Dans la fonction qui multiplie $\mathrm{d}x$, le second terme se réduisant à $r(r-1)^2\ldots 3(x-a)$, et tous les suivans prenant une semblable forme, s'évanouissent lorsque $x=a$. A l'égard du premier terme, qui revient à

$$r(r-1)\ldots 2(x-a)\mathrm{l}A(x-a) = r(r-1)\ldots 2\{(x-a)\mathrm{l}A + (x-a)\mathrm{l}(x-a)\},$$

la supposition de $x=a$, dans le produit $(x-a)\,\mathrm{l}\,(x-a)$, annullant le premier facteur et rendant le second infini, laisse de l'ambiguité sur la vraie valeur; mais si l'on fait $x-a=\frac{1}{\omega}$, il viendra

$$(x-a)\mathrm{l}(x-a) = -\frac{\mathrm{l}\omega}{\omega},$$

expression qui tend à devenir zéro à mesure que ω augmente, puisque le rapport des logarithmes aux nombres correspondans diminue sans cesse, ainsi qu'on peut s'en assurer par l'inspection des tables de logarithmes, ou par la comparaison des progressions

$$\begin{array}{llllll} \div\!\div\ 1 & : 10 & : 100 & : 1000, & \text{etc.} \\ \div\ 0 & .\ 1 & .\ 2 & .\ 3\ , & \text{etc.}; \end{array}$$

on en verra d'ailleurs la démonstration dans le chapitre suivant, où on trouvera des procédés pour obtenir la vraie valeur des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée.

121. Je n'ai supposé dans l'équation $u=0$, que trois variables; mais il est aisé d'appliquer le procédé de M. Paoli aux équations qui en contiennent un nombre quelconque: c'est ce qu'il fait dans son Mémoire; il s'occupe même du cas où l'on aurait plusieurs équations simultanées. Il a été conduit à ces formules, en cherchant à prouver un théorème très-remarquable, donné sans démonstration, par M. Laplace, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'année* 1777. Ce théorème répond au cas où l'équation $u=0$ ne renfermerait que deux variables x et y; la formule obtenue sur la page 312 devient alors

$$\frac{\mathrm{d}^m\psi}{1.2\ldots m\mathrm{d}y^m} = \frac{\mathrm{d}^{m-1}.(x-a)^m\dfrac{\mathrm{d}^m(\psi'\mathrm{l}u)}{1.2\ldots m\mathrm{d}y^m}}{1.2\ldots(m-1)\mathrm{d}x^{m-1}},$$

où il faut faire $y=0$ et $x=\alpha$, après les différentiations; et les recherches de M. Paoli, supposant que la quantité A ne contienne pas le facteur $x-\alpha$, sans quoi φ deviendrait infini, montrent que la formule ci-dessus ne s'étend pas au cas où le facteur $x-\alpha$ serait multiple dans le premier membre de l'équation u, quand on y fait $y=0$.

Dans ce cas, où l'équation proposée serait de la forme

$$u = A(x-\alpha)^i - Uy = 0,$$

M. Laplace indique l'expression

$$\frac{d^m\psi}{1.2\ldots m dy^m} - \frac{d^{m-1}.(x-\alpha)^m \frac{d^m(\psi' lu)}{1.2\ldots m dy^m}}{1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}};$$

mais elle produit un développement qui ne satisfait pas à l'équation proposée.

Soit pour exemple l'équation

$$(x-\alpha)^2 - y^2(\beta+\gamma x)^2 = 0,$$

de laquelle on tire immédiatement

$$x-\alpha = \pm y(\beta+\gamma x),$$

d'où il suit

$$x = \frac{\alpha+\beta y}{1-\gamma y} = (\alpha+\beta y)\{1+\gamma y+\gamma^2y^2+\gamma^3y^3+\text{etc.}\}$$
$$= \alpha+(\alpha\gamma+\beta)y+(\alpha\gamma+\beta)\gamma y^2+(\alpha\gamma+\beta)\gamma^2y^3+\text{etc.};$$

et

$$x = \frac{\alpha-\beta y}{1+\gamma y} = (\alpha-\beta y)\{1-\gamma y+\gamma^2y^2-\gamma^3y^3+\text{etc.}\}$$
$$= \alpha-(\alpha\gamma+\beta)y+(\alpha\gamma+\beta)\gamma y^2-(\alpha\gamma+\beta)\gamma^2y^3+\text{etc.}$$

Au lieu de ces deux développemens, la formule de M. Laplace donne seulement la série

$$x = \alpha+(\alpha\gamma+\beta)\gamma y^2+(\alpha\gamma+\beta)\gamma^3y^4+\text{etc.},$$

qui est égale à la moitié de leur somme, c'est-à-dire, qui tient le milieu entre eux; il en est de même dans tous les cas où le facteur $x-\alpha$ est élevé à une puissance supérieure à la première. Je renvoie les lecteurs qui desireraient entrer dans ces détails, au Mémoire de M. Paoli, (T. IV du Recueil de la *Société Italienne*), ou au Supplément à ses *Elementi d'Algebra*.

Recherches sur le développement des fonctions de polynomes.

122. M. Hindenburg s'étant livré, d'après les idées de Leibnitz, sur les combinaisons, à des recherches relatives au développement des polynomes de la forme $(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})^m$, ce sujet attira l'attention de plusieurs Analystes: les uns le traitèrent par des procédés analogues à ceux de la différentiation; les autres s'en servirent pour réduire ces procédés en formules générales. De là sont nées l'analyse *combinatoire* et les méthodes de *dérivation*. Parmi ces dernières, on doit distinguer celle qu'a donnée Arbogast, dans son *Traité des Dérivations*, et celle dont se sert M. Kramp, dans ses *Élémens d'Algèbre*. J'ai déjà indiqué généralement le but de l'analyse combinatoire (*Int.* 20); c'est aussi plutôt le but que les règles des méthodes de dérivation, que je me propose d'exposer ici, et, comme je l'ai dit dans une autre occasion, pour marquer la place que ces recherches, dont on s'occupe encore fort peu en France, doivent tenir dans l'analyse transcendante. Il y aurait sur leur nature, sur les espérances qu'elles offrent par rapport aux progrès futurs de la science, et même sur leur dénomination, des observations à faire qui tiendraient trop de place au milieu des calculs, et que pour cette raison j'ai insérées dans le *Discours préliminaire*.

Le premier problème que s'est proposé Arbogast, est de développer suivant les puissances de x, une expression

$$\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.});$$

φ étant la caractéristique d'une fonction quelconque.

Il est aisé de remarquer que ce développement est à l'égard du théorème de Taylor, ce que le développement du polynome

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})^m$$

est par rapport à celui du binome; car le théorème de Taylor est le type du développement général de toutes les fonctions de quantités binomes.

Pour l'appliquer à la fonction proposée ci-dessus, il faut mettre d'abord sous la forme d'un binome la quantité soumise à la caractéristique φ; et je poserai en conséquence

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}=\alpha+tx,$$

ensorte que

$$t=\beta+\gamma x+\delta x^2+\text{etc.};$$

regardant alors α comme la variable, tx comme son accroissement, et représentant, pour abréger, $\varphi(\alpha)$ par φ seulement, on aura

$$\varphi(\alpha+tx)=\varphi+\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{tx}{1}+\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\frac{t^2x^2}{1.2}+\frac{d^3\varphi}{d\alpha^3}\frac{t^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

L'application de la formule de Taylor a rejeté sur les différentiations relatives au premier terme α, tout ce qui tient à la nature de la fonction proposée; et le développement ne dépend plus que de celui des diverses puissances entières et positives du polynome algébrique t.

Si on voulait obtenir le terme multiplié par x^n, dans le développement cherché, il faudrait prendre le premier terme dans la $n^{ième}$ puissance de t, le second dans la $(n-1)^{ième}$, et ainsi de suite. Représentons en général le développement de t^r par

$$T^r_0+T^r_1x+T^r_2x^2+\ldots\ldots+T^r_rx^r,$$

ensorte que l'exposant de la lettre T marque la puissance à laquelle est élevé le polynome t, et l'indice inférieur, celle de la lettre x dans le terme que l'on considère; d'après cette notation, qui se rapproche beaucoup de celle que nous avons employée dans les n^{os} 21 et 59 de l'Introduction, le terme général du développement de $\varphi(\alpha+tx)$, sera

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^n\varphi}{1.2\ldots nd\alpha^n}T^n_0+\dfrac{d^{n-1}\varphi}{1.2\ldots(n-1)d\alpha^{n-1}}T^{n-1}_1+\dfrac{d^{n-2}\varphi}{1.2\ldots(n-2)d\alpha^{n-2}}T^{n-2}_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\qquad\dfrac{d\varphi}{d\alpha}T^1_{n-1}\end{array}\right\}x^n\ldots(N),$$

formule qui montre la liaison annoncée plus haut (113), entre le développement des puissances du polynome algébrique n et celui des fonctions en général : on en déduirait en effet tout de suite le terme général de ce développement, si l'on avait l'expression du coefficient indéterminé T^r_s; et voilà comment l'analyse combinatoire, qui donne des règles pour former ce coefficient, s'applique au sujet qui nous occupe.

123. M. Paoli, en suivant une marche que je vais tracer, d'après lui, a cherché à remplacer ces règles par des procédés tirés immédiatement de la différentiation.

En appliquant le théorème de Maclaurin (103) au développement du polynome t^r, le coefficient de x^s, dans son développement, sera exprimé par

$$\frac{d^s.t^r}{1.2\ldots sdx^s},$$

lorsqu'on aura fait $x=0$, après les différentiations; et par conséquent le terme général indiqué dans le n° précédent pourra s'écrire ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^n\varphi}{1.2\ldots n d\alpha^n}t^n+\dfrac{d^{n-1}\varphi}{1.2\ldots(n-1)d\alpha^{n-1}}\dfrac{d.t^{n-1}}{dx}+\dfrac{d^{n-2}\varphi}{1.2\ldots(n-2)d\alpha^{n-2}}\dfrac{d^2.t^{n-2}}{1.2dx^2}\\ \qquad+\dfrac{d^{n-3}\varphi}{1.2\ldots(n-3)d\alpha^{n-3}}\dfrac{d^3.t^{n-3}}{1.2.3dx^3}\ldots+\dfrac{d\varphi}{d\alpha}\dfrac{d^{n-1}.t}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}}\end{array}\right\}x^n\ldots(N),$$

en observant d'y faire $x=0$ après les différentiations, ainsi que dans t^n, qui se réduit à β^n, valeur du coefficient $T^n{}_0$.

Le polynome t prendra lui-même la forme $\beta+t'x$, en posant

$$t'=\gamma+\delta x+\varepsilon x^2+\text{etc.},$$

et $\dfrac{d^s.t^r}{1.2\ldots sdx^s}$ sera le coefficient de x^s dans le développement de $(\beta+t'x)^r$; mais l'expression (N) peut s'appliquer à ce dernier, en changeant α en β, t en t', et substituant la puissance r à la fonction φ, ou, pour plus de simplicité, laissant t^r à la place de $(\beta+t'x)^r$, et t à celle de β, puisque cette dernière lettre représente la valeur de t, lorsque $x=0$: il viendra par ce moyen,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^s.t^r}{1.2\ldots sdx^s}=\dfrac{d^s.t^r}{1.2\ldots sdt^s}t'^s+\dfrac{d^{s-1}.t^r}{1.2\ldots(s-1)dt^{s-1}}\dfrac{d.t'^{s-1}}{dx}\\ \qquad+\dfrac{d^{s-2}.t^r}{1.2\ldots(s-2)dt^{s-2}}\dfrac{d^2.t'^{s-2}}{1.2dx^2}\ldots+\dfrac{d.t^r}{dt}\dfrac{d^{s-1}.t'}{1.2\ldots(s-1)dx^{s-1}}\end{array}\right\}(A),$$

où il est à remarquer que le polynome t' a un terme de moins que le polynome t. On pourrait ramener de même la détermination des coefficiens différentiels des puissances de t', à celle des coefficiens des puissances d'un polynome t'', ayant un terme de moins que t', et ainsi de suite; mais il sera plus simple de chercher à tirer chacun des coefficiens différentiels d'une puissance quelconque de t, de celui de l'ordre inférieur.

Pour cela on écrira $s+1$ au lieu de s, dans la formule précédente, et il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^{s+1}.t^r}{1.2\ldots(s+1)dx^{s+1}}=\dfrac{d^{s+1}.t^r}{1.2\ldots(s+1)dt^{s+1}}t'^{s+1}+\dfrac{d^s.t^r}{1.2\ldots sdt^s}\dfrac{d.t'^s}{dx}\\ +\dfrac{d^{s-1}.t^r}{1.2\ldots(s-1)dt^{s-1}}\dfrac{d^2.t'^{s-1}}{1.2dx^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\dfrac{d.t^r}{dt}\dfrac{d^s.t'}{1.2\ldots sdx^s}\end{array}\right\}(B).$$

La comparaison de cette formule avec la dernière, montre qu'on peut passer de l'une à l'autre par les opérations suivantes :

1°. Différentier le premier terme de la formule (A) (terme où il n'y a aucune différentielle de t'), en y faisant varier t comme fonction de x; écrire dans le résultat t' au lieu de $\frac{dt}{dx}$, et diviser par le nouvel exposant de t' : on trouve ainsi

$$\frac{d^{s+1}.t^r}{1.2\ldots(s+1)dt^{s+1}}t'^{s+1};$$

2°. Différentier tous les termes de la formule (A), en n'y faisant varier que t', par rapport à x, et diviser par l'exposant de son ordre, chaque nouveau coefficient différentiel de t'.

Si l'on fait de même

$$\begin{aligned} t' &= \delta + \varepsilon x + \zeta x^2 + \text{etc.},\\ t'' &= \varepsilon + \zeta x + \text{etc.},\\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

on exprimera le coefficient différentiel $\frac{d^s.t'^r}{1.2\ldots sdx^s}$ par t'', suivant la formule (A), et l'on passera au coefficient $\frac{d^{s+1}.t'^r}{1.2\ldots(s+1)dx^{s+1}}$, au moyen des règles ci-dessus, c'est-à-dire, en regardant t' comme constant, excepté dans le premier terme, où il n'entre aucune différentielle de t'', et où il faut changer $\frac{dt'}{dx}$ en t'', puis diviser par le nouvel exposant de t''. On opérera de même à l'égard des fonctions ultérieures t''', t^{IV}, etc.

Si l'on observe avec attention la manière dont s'enchaînent les opérations indiquées ci-dessus, on reconnaîtra que pour former, l'une après l'autre, les valeurs de $\frac{d^s.t^r}{1.2\ldots sdx^s}$, en commençant à $\frac{d.t^r}{dx}$, il faut faire varier t dans les seuls termes où n'entrent point les différentielles de t', c'est-à-dire, t'', t''', etc., faire varier t' dans les seuls termes où il n'entre aucune des différentielles de t'', c'est-à-dire les lettres t''', t^{IV}, etc. Il est visible que cela revient à *ne faire varier au plus que deux lettres dans chaque terme de l'expression, savoir, celles qui portent le plus d'accens, si toutefois elles sont consécutives, autrement ne faire varier que la lettre portant le plus d'accens; et chaque fois que l'une de ces lettres prend un exposant plus élevé, il faut diviser par cet exposant.*

Voici les six premières valeurs de $\frac{d^s.t^r}{1.2\ldots s\,dx^s}$, formées d'après cette règle :

$$\frac{d.t^r}{dx} = \frac{d.t^r}{dt}.t',$$

$$\frac{d^2.t^r}{1.2dx^2} = \frac{d^2.t^r}{dt^2}.\frac{t'^2}{2} + \frac{d.t^r}{dt}.t'',$$

$$\frac{d^3.t^r}{1.2.3dx^3} = \frac{d^3.t^r}{dt^3}.\frac{t'^3}{2.3} + \frac{d^2.t^r}{dt^2}t't'' + \frac{d.t^r}{dt}.t''',$$

$$\frac{d^4.t^r}{1.2.3.4dx^4} = \frac{d^4.t^r}{dt^4}.\frac{t'^4}{2.3.4} + \frac{d^3.t^r}{dt^3}\frac{t'^2}{2}.t'' + \frac{d^2.t^r}{dt^2}\left(t't''' + \frac{t''^2}{2}\right) + \frac{d.t^r}{dt}t^{\text{iv}},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^5.t^r}{1.2\ldots 5dx^5} = {}&\frac{d^5.t^r}{dt^5}.\frac{t'^5}{2\ldots 5} + \frac{d^4.t^r}{dt^4}\frac{t'^3}{2.3}t'' + \frac{d^3.t^r}{dt^3}\left(\frac{t'^2}{2}t''' + t'\frac{t''^2}{2}\right)\\ &+ \frac{d^2.t^r}{dt^2}(t't^{\text{iv}} + t''t''') + \frac{d.t^r}{dt}t^{\text{v}}\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^6.t^r}{1.2\ldots 6dx^6} = {}&\frac{d^6.t^r}{dt^6}.\frac{t'^6}{2\ldots 6} + \frac{d^5.t^r}{dt^5}\frac{t'^4}{2.3.4}t'' + \frac{d^4.t^r}{dt^4}\left(\frac{t'^3}{2.3}t''' + \frac{t'^2}{2}.\frac{t''^2}{2}\right)\\ &+ \frac{d^3.t^r}{dt^3}\left(\frac{t'^2}{2}t^{\text{iv}} + t't''t''' + \frac{t''^3}{2.3}\right) + \frac{d^2.t^r}{dt^2}\left(t't^{\text{v}} + t''t^{\text{iv}} + \frac{t'''^2}{2}\right) + \frac{d.t^r}{dt}.t^{\text{vi}}\end{aligned}\right\}.$$

124. Ces valeurs offrent une particularité très-remarquable : les nombres qui expriment combien la lettre t doit porter d'accens, font dans tous les termes une somme égale à l'exposant de l'ordre du coefficient différentiel relatif à t, dans le premier membre, et comprennent les diverses manières dont cette somme peut être composée, par l'addition des nombres depuis 1. En prenant pour exemple la sixième valeur, on voit que dans le

$$\begin{array}{lll}
1^{\text{er}}\text{ terme } t'^6 = t'.t'.t'.t'.t'.t', \text{ d'où} & 1+1+1+1+1+1 & = 6, \text{ en 6 parties;}\\
2^{\text{eme}}\ldots\ t'^4t'' = t'.t'.t'.t'.t''\ldots\ldots & 1+1+1+1+2 & = 6, \text{ en 5}\\
3^{\text{eme}}\ldots \left\{\begin{array}{l} t'^3t''' = t'.t'.t'.t'''\ldots\ldots \\ t'^2t''^2 = t'.t'.t''.t''\ldots\ldots \end{array}\right. & \begin{array}{l}1+1+1+3\\ 1+1+2+2\end{array} & \left.\begin{array}{l}=6,\\ =6,\end{array}\right\}\text{en 4}\\
4^{\text{eme}}\ldots \left\{\begin{array}{l} t'^2t^{\text{iv}} = t'.t'.t^{\text{iv}}\ldots\ldots \\ t't''t'''\ldots\ldots \\ t''^3 = t''.t''.t''\ldots\ldots \end{array}\right. & \begin{array}{l}1+1+4\\ 1+2+3\\ 2+2+2\end{array} & \left.\begin{array}{l}=6,\\ =6,\\ =6,\end{array}\right\}\text{en 3}\\
5^{\text{eme}}\ldots \left\{\begin{array}{l} t't^{\text{v}}\ldots\ldots \\ t''t^{\text{iv}}\ldots\ldots \\ t'''^2 = t'''.t'''\ldots\ldots \end{array}\right. & \begin{array}{l}1+5\\ 2+4\\ 3+3\end{array} & \left.\begin{array}{l}=6,\\ =6,\\ =6,\end{array}\right\}\text{en 2}\\
6^{\text{eme}}\ldots\ t^{\text{vi}}\ldots\ldots & 6 & = 6, \text{ en 1.}
\end{array}$$

Je reviendrai sur cela dans le troisième volume de ce Traité.

125. On doit se rappeler que dans la recherche qui nous occupe, il faut faire $x=0$, après les différentiations. Cette hypothèse réduisant à leur premier terme les polynomes représentés par les lettres t, t', t'', t''', etc., ces lettres devront être remplacées respectivement par β, γ, δ, ε, etc.; et si on fait en outre $r=n-1$ dans la première des formules de la page précédente, $r=n-2$ dans la seconde, et ainsi de suite, puis que l'on substitue les résultats dans la formule (N) page 317, on trouvera pour le multiplicateur de x^n, dans le développement de la fonction

$$\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2\ldots\ldots+\mu x^n+\text{etc.}),$$

l'expression

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n\varphi(\alpha)}{1.2\ldots n d\alpha^n}\beta^n,\\
&+\frac{d^{n-1}\varphi(\alpha)}{1.2\ldots(n-1)d\alpha^{n-1}}\frac{d.\beta^{n-1}}{d\beta}\gamma,\\
&+\frac{d^{n-2}\varphi(\alpha)}{1.2\ldots(n-2)d\alpha^{n-2}}\left\{\frac{d^2.\beta^{n-2}}{d\beta^2}\frac{\gamma^2}{2}+\frac{d.\beta^{n-2}}{d\beta}\delta\right\},\\
&+\frac{d^{n-3}\varphi(\alpha)}{1.2\ldots(n-3)d\alpha^{n-3}}\left\{\frac{d^3.\beta^{n-3}}{d\beta^3}\frac{\gamma^3}{2.3}+\frac{d^2.\beta^{n-3}}{d\beta^2}\gamma\delta+\frac{d.\beta^{n-3}}{d\beta}\varepsilon\right\},\\
&+\frac{d^{n-4}\varphi(\alpha)}{1.2\ldots(n-4)d\alpha^{n-4}}\left\{\frac{d^4.\beta^{n-4}}{d\beta^4}\frac{\gamma^4}{2.3.4}+\frac{d^3.\beta^{n-4}}{d\beta^3}\frac{\gamma^2}{2}\delta+\frac{d^2.\beta^{n-4}}{d\beta^2}\left(\gamma\varepsilon+\frac{\delta^2}{2}\right)+\frac{d.\beta^{n-4}}{d\beta}\zeta\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\mu,
\end{aligned}$$

dans laquelle il n'entre que les quantités que doit contenir le résultat final.

Il est visible que la règle énoncée page 318, pour la formation des valeurs successives de $\frac{d^s.t^r}{1.2\ldots s dx^s}$, s'étend à celle des quantités qui multiplient ci-dessus les coefficiens différentiels de $\varphi(\alpha)$, en traitant β, γ, δ, etc. comme des fonctions de x, et en observant que le rang des lettres, dans l'alphabet, répond aux accens que portent les t, puis substituant γ à $\frac{d\beta}{dx}$, δ à $\frac{d\gamma}{dx}$, etc., et diminuant l'exposant de β d'une unité, lorsqu'on passe à un nouveau coefficient. Le dernier terme $\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\mu$, est compris dans cette formation; car β ne devant point porter d'exposans négatifs, l'expression s'arrête au terme

$$\frac{d^{n-n+1}\varphi}{d\alpha}\frac{d.\beta^{n-n+1}}{d\beta}\mu=\frac{d\varphi}{d\alpha}\mu.$$

Par la même raison, il faut exclure du développement de chaque ligne de cette expression, les termes où l'exposant de β est moindre que celui de la caractéristique d qui le précède.

Au moyen de ces remarques, l'expression ci-dessus se déduit sans peine de son premier terme; et l'on peut par conséquent calculer un terme quelconque du développement de la fonction φ, sans passer par ceux qui le précèdent. Le lecteur pourra s'exercer sur le développement du 7[e] terme, c'est-à-dire de celui qui est affecté de x^6, que j'ai rapporté ci-dessous.

Première partie de l'opération.

$$\frac{d^6\varphi(\alpha)}{1.2\ldots6d\alpha^6}\beta^6$$
$$+\frac{d^5\varphi(\alpha)}{1.2\ldots5d\alpha^5}\frac{d.\beta^5}{d\beta}\gamma$$
$$+\frac{d^4\varphi(\alpha)}{1.2\ldots4d\alpha^4}\left\{\frac{d^2.\beta^4}{d\beta^2}\frac{\gamma^2}{2}+\frac{d.\beta^4}{d\beta}\delta\right\}$$
$$+\frac{d^3\varphi(\alpha)}{1.2.3d\alpha^3}\left\{\frac{d^3.\beta^3}{d\beta^3}\frac{\gamma^3}{2.3}+\frac{d^2.\beta^3}{d\beta^2}\gamma\delta+\frac{d.\beta^3}{d\beta}\varepsilon\right\}$$
$$+\frac{d^2\varphi(\alpha)}{1.2d\alpha^2}\left\{\frac{d^2.\beta^2}{d\beta^2}\left(\frac{\delta^2}{2}+\gamma\varepsilon\right)+\frac{d.\beta^2}{d\beta}\zeta\right\}$$
$$+\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\beta}{d\beta}\eta.$$

Deuxième partie, opération effectuée.

$$\frac{d^6\varphi(\alpha)}{1.2\ldots6d\alpha^6}\beta^6$$
$$+\frac{d^5\varphi(\alpha)}{1.2\ldots5d\alpha^5}5\beta^4\gamma$$
$$+\frac{d^4\varphi(\alpha)}{1.2\ldots4d\alpha^4}(6\beta^2\gamma^2+4\beta^3\delta)$$
$$+\frac{d^3\varphi(\alpha)}{1.2.3d\alpha^3}(\gamma^3+6\beta\gamma\delta+3\beta^2\varepsilon)$$
$$+\frac{d^2\varphi(\alpha)}{1.2d\alpha^2}(\delta^2+2\gamma\varepsilon+2\beta\zeta)$$
$$+\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\eta.$$

Dans la première partie, j'ai laissé les différentiations en évidence, afin que l'application de la règle de la page précédente fût immédiate. D'ailleurs, en observant la marche des coefficiens numériques et des exposans introduits par les différentiations relatives à β, il est facile de modifier la règle de manière à déduire directement l'une de l'autre, toutes les lignes de la deuxième colonne.

126. S'il fallait effectuer le développement de la fonction φ, on trouverait peut-être plus court de déduire chaque terme de celui qui le précède, que de les calculer séparément un à un, comme on l'a indiqué ci-dessus, et cela peut s'effectuer par la simple application de la règle de la page 318.

En premier lieu, si dans l'énoncé de cette règle, qui exprime la dérivation des valeurs successives de $\frac{d^s.t^r}{1.2\ldots s dx^s}$, on remplace les lettres t, t', t'', t''', etc., par β, γ, δ, ε, etc., conformément au rang que ces dernières tiennent dans leur alphabet (125), on aura un procédé très-commode pour déduire successivement les uns des autres, tous les termes du développement de

$$(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^m,$$

et qui offre un complément très-utile à ce qui a été dit dans les nos 19 et 20 de l'*Introduction*.

Le même procédé s'applique immédiatement à la fonction

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.});$$

car si dans la formule (N) (page 317) on écrit $n+1$ au lieu de n, on passe à

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}\varphi}{1.2\ldots(n+1)\mathrm{d}\alpha^{n+1}}t^{n+1} \\ + \dfrac{\mathrm{d}^n\varphi}{1.2\ldots n\mathrm{d}\alpha^n}\dfrac{\mathrm{d}.t^n}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}\varphi}{1.2\ldots(n-1)\mathrm{d}\alpha^{n-1}}\dfrac{\mathrm{d}^2.t^{n-1}}{1.2\mathrm{d}x^2} + \dfrac{\mathrm{d}^{n-2}\varphi}{1.2\ldots(n-2)\mathrm{d}\alpha^{n-2}}\dfrac{\mathrm{d}^3.t^{n-2}}{1.2.3\mathrm{d}x^3} \\ \qquad + \dfrac{\mathrm{d}^{n-3}\varphi}{1.2\ldots(n-3)\mathrm{d}\alpha^{n-3}}\dfrac{\mathrm{d}^4.t^{n-3}}{1.2.3.4\mathrm{d}x^4}\ldots + \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha}\dfrac{\mathrm{d}^n t}{1.2\ldots n\mathrm{d}x^n} \end{array}\right\} x^{n+1} \ldots (N');$$

où l'on voit qu'à l'exception du premier terme, il n'y a que t qui ait varié; ensorte que le multiplicateur de chaque coefficient différentiel de φ, dans (N'), se déduit immédiatement, par la règle de la page 318, du multiplicateur du même coefficient dans (N): il y a seulement à écrire en tête du résultat le terme $\dfrac{\mathrm{d}^{n+1}\varphi}{1.2\ldots(n+1)\mathrm{d}\alpha^{n+1}}t^{n+1}$. On peut encore comprendre ce terme dans la règle, en regardant φ comme une lettre qui précéderait immédiatement t, qui ne peut par conséquent pas varier dans les termes où se trouvent les différentielles de t, et en remplaçant $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$ par t. Je laisse au lecteur le soin de s'exercer sur des exemples.

127. On a déjà vu dans un assez grand nombre d'occasions, le parti qu'on pouvait tirer du développement du polynome, et par conséquent de la formule précédente et des règles qui servent à la construire: je n'insisterai donc pas beaucoup sur ce sujet; mais cependant je crois devoir revenir sur la recherche des sommes des puissances des racines

des équations algébriques, recherche très-importante en Analyse. On a obtenu dans le n° 96, l'équation

$$\left.\begin{array}{l} -ax-\frac{1}{2}a^2x^2-\frac{1}{3}a^3x^3-\text{etc.} \\ -bx-\frac{1}{2}b^2x^2-\frac{1}{3}b^3x^3-\text{etc.} \\ -cx-\frac{1}{2}c^2x^2-\frac{1}{3}c^3x^3-\text{etc.} \end{array}\right\} = Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.};$$

en posant

$$\mathrm{l}(1+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}) = Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.};$$

l'on aurait donc l'expression immédiate de $-\frac{1}{n}(a^n+b^n+c^n+\text{etc.})$, ou de $-\frac{1}{n}S_n$, si l'on connaissait le coefficient de x^n dans le développement de la fonction logarithmique ci-dessus. Or si l'on fait d'abord

$$\beta+\gamma x+\delta x^2+\text{etc.} = t,$$

le coefficient de x^n, dans le développement de

$$\mathrm{l}(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc}),$$

sera

$$\frac{\mathrm{d}^n.\mathrm{l}\alpha}{1.2\ldots n\mathrm{d}\alpha^n}t^n+\frac{\mathrm{d}^{n-1}.\mathrm{l}\alpha}{1.2\ldots(n-1)\mathrm{d}\alpha^{n-1}}\frac{\mathrm{d}.t^{n-1}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^{n-2}.\mathrm{l}\alpha}{1.2\ldots(n-2)\mathrm{d}\alpha^{n-2}}\frac{\mathrm{d}^2.t^{n-2}}{1.2\mathrm{d}x^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\mathrm{d}.\mathrm{l}\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}^{n-1}.t}{1.2\ldots(n-1)\mathrm{d}x^{n-1}}.$$

En effectuant les différentiations relatives à α, et faisant ensuite $\alpha=1$, il viendra

$$-\frac{1}{n}S_n = \left\{\pm\frac{t^n}{n}\mp\frac{1}{n-1}\frac{\mathrm{d}.t^{n-1}}{\mathrm{d}x}\pm\frac{1}{n-2}\frac{\mathrm{d}^2.t^{n-2}}{1.2\mathrm{d}x^2}\ldots+\frac{\mathrm{d}^{n-1}.t}{1.2\ldots(n-1)\mathrm{d}x^{n-1}}\right\},$$

le signe supérieur répondant au cas où n est impair, et le signe inférieur au cas contraire. On éviterait ces doubles signes en posant

$$\beta+\gamma x+\delta x^2+\text{etc.} = -t.$$

Il suit de ce rapprochement, que les règles du n° 123 fourniront un moyen très-simple et très-expéditif pour développer l'expression de S_n, sans passer par celles qui la précèdent ; on voit aussi qu'on y arriverait également par la connaissance des coefficiens du polynome

$$(\beta+\gamma x+\delta x^2+\text{etc.})^r,$$

puisque ces coefficiens ne sont autre chose que les valeurs de $\frac{d^s.t^r}{1.2\ldots s dx^s}$.

128. Il est souvent très-commode de pouvoir exprimer les coefficiens d'une équation algébrique par les sommes des puissances de ses racines (*Compl. des Élém. d'Alg.*); cette question revient à trouver β, γ, etc. au moyen des quantités B, C, D, etc. du n° précédent, et se résout en transformant en nombres l'équation logarithmique

$$l(1+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3\ldots\ldots+\mu x^m)=Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.},$$

qui donne

$$1+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3\ldots\ldots+\mu x^m=e^{Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}$$

On pose

$$B+Cx+Dx^2+Ex^3+\text{etc.}=t,$$

il en résulte

$$1+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3\ldots\ldots+\mu x^m=e^{tx},$$

et l'on voit que les coefficiens β, γ, δ,....μ sont respectivement égaux à ceux des puissances x, x^2, x^3.... x^m, dans le développement de la fonction e^{tx}; celle-ci résulte de la fonction $e^{\alpha+tx}$, lorsqu'on y fait $\alpha=0$. En substituant dans la formule (N) du n° 123, e^α à $\varphi(\alpha)$, effectuant les différentiations et faisant ensuite $\alpha=0$, on trouvera que le coefficient de x^n, dans le développement de e^{tx}, est exprimé par

$$\frac{1}{1.2\ldots n}t^n+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d.t^{n-1}}{dx}+\frac{1}{1.2\ldots(n-2)}\frac{d^2.t^{n-2}}{1.2dx^2}\ldots+\frac{d^{n-1}.t}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}};$$

Les coefficiens différentiels de t, pris relativement à x, se formant toujours comme on l'a prescrit n° 123, il faut également faire $x=0$, après les différentiations, mais substituer B à t, C à t', D à t'', etc., et se rappeler que

$$B=-S_1,\quad C=-\frac{S_2}{2},\quad D=-\frac{S_3}{3},\quad \text{etc.}$$

129. Quoique la forme donnée dans ce qui précède à la quantité dont se compose la fonction φ soit particulière, les procédés qu'on en a

déduits s'appliquent à cette question très-générale : *développer, suivant les puissances de* x, *la fonction* $\varphi(y)$, y *désignant une fonction quelconque de* x. La difficulté tient à toujours former, sans réduction, les quantités

$$\frac{d\varphi(y)}{dx}, \quad \frac{d^2\varphi(y)}{dx^2}, \quad \frac{d^3\varphi(y)}{dx^3}, \quad \text{etc.} \quad (94)$$

puisque $\varphi(y)$ étant au moins implicitement une fonction de x, on a encore, par le théorème de Maclaurin,

$$\varphi(y)+\frac{d\varphi(y)}{dx}\frac{x}{1}+\frac{d^2\varphi(y)}{dx^2}\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3\varphi(y)}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

pourvu que l'on fasse $x=0$, après les différentiations.

Pour parvenir à l'expression des coefficiens différentiels de $\varphi(y)$, par rapport à la variable x, il suffit d'observer que si l'on change x en $x+dx$, en même temps que y devient

$$y+\frac{dy}{dx}\frac{dx}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

la fonction $\varphi(y)$ devient

$$\varphi(y)+\frac{d\varphi(y)}{dx}\frac{dx}{1}+\frac{d^2\varphi(y)}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2}+\frac{d^3\varphi(y)}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3}+\text{etc.};$$

et que l'on doit parvenir à un résultat identique, indépendamment de dx, en substituant dans $\varphi(y)$, au lieu de y, le développement de son nouvel état ; on a donc cette équation

$$\varphi(y)+\frac{d\varphi(y)}{dx}\frac{dx}{1}+\frac{d^2\varphi(y)}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2}+\frac{d^3\varphi(y)}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$
$$=\varphi\left(y+\frac{dy}{dx}\frac{dx}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right),$$

d'où l'on conclut que $\frac{d^n\varphi(y)}{1.2\ldots n dx^n}$ est égal au multiplicateur de dx^n dans le développement du second membre ; et ce développement rentre dans celui de

$$\varphi\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}),$$

en changeant dx en x, et faisant

$$y=\alpha, \quad \frac{dy}{dx}=\beta, \quad \frac{d^2y}{1.2dx^2}=\gamma, \quad \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}=\delta, \quad \text{etc.}$$

Je ferai encore remarquer que si dans l'expression de $\frac{d^n.\varphi(y)}{1.2...ndx^n}$, on supprime le dénominateur $1.2...ndx^n$, on aura celle de la différentielle $n^{ième}$ d'une fonction quelconque, dans l'hypothèse où la différentielle de la variable dont elle dépend immédiatement ne serait pas constante; et il faut observer que dès 1772, M. Lagrange avait ramené au développement des fonctions la recherche de ces sortes de différentielles.

130. Si l'on compare les procédés indiqués ci-dessus avec les principales règles énoncées dans le *Traité des dérivations*, on reconnaîtra sans peine l'identité, non-seulement du but des calculs, mais celle de leur marche et de leurs résultats. Les quantités qu'Arbogast appelle *dérivations immédiates*, et qu'il marque par la caractéristique D, reviennent aux coefficiens différentiels pris relativement aux quantités t, t', t'', etc.: la différence ne consiste qu'en ce que le calcul des dérivations prescrit de substituer immédiatement, à chaque différentiation, suivant l'observation du n° 125, les premiers termes des polynomes t, t', t'', etc. A l'égard des coefficiens différentiels de φ, relatifs à x, comme leur dérivation n'est pas immédiate, le D qui les indique est précédé d'un point, et les opérations qu'il faut faire pour les obtenir sont rapportées au premier terme du polynome. Dans le développement des fonctions, les coefficiens différentiels étant ordinairement divisés par les produits 1.2, 1.2.3, etc.; Arbogast exprime cette circonstance en écrivant un c sous la caractéristique D.

La méthode de M. Kramp diffère principalement de celle d'Arbogast, en ce qu'il joint aux dérivations que j'ai indiquées page 247, les procédés de l'analyse combinatoire, pour obtenir les coefficiens pris des termes du développement des puissances de polynome (122). D'ailleurs ses *dérivées primaires* sont les coefficiens différentiels relatifs aux variables t, t', t'', etc., et ses *dérivées secondaires*, ceux de la fonction, pris par rapport à x. Il considère ensuite les *dérivées réciproques*, qui ne sont autre chose que les coefficiens différentiels de la fonction inverse de la proposée. Par exemple, u étant fonction de x, et ayant $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. pour dérivées, $\frac{dx}{du}$, $\frac{d^2x}{du^2}$, etc. seront ses dérivées réciproques. On a vu dans le n° 116 comment l'expression de celles-ci par les premières donne des formules pour le retour des suites; c'est aussi par ce moyen que M. Kramp traite la même question.

CHAPITRE III.

Examen des valeurs particulières que les coefficiens différentiels prennent dans certains cas.

131. Les formules de développement obtenues dans le chapitre précédent, reposent toutes sur des valeurs particulières que prennent les coefficiens différentiels, et ne peuvent par conséquent s'appliquer qu'aux cas où ces valeurs sont assignables, ce qui n'arrive pas toujours. La fonction $y = b + (x-a)^{\frac{1}{n}}$, n étant > 1, en offre un exemple très-simple; car en la différentiant on trouve

Des cas où les coefficiens différentiels deviennent infinis.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}(x-a)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n(x-a)^{\frac{n-1}{n}}};$$

et la supposition de $x=a$, qui donne $y=b$, rendra infinie la valeur de $\frac{dy}{dx}$. Il en est de même des coefficiens différentiels des ordres supérieurs, parce que chaque différentiation augmente l'exposant de $x-a$, au dénominateur. On le voit aussi en développant, suivant les puissances de h, la valeur de $(x-a+h)^{\frac{1}{n}}$: il vient alors

$$\left.\begin{aligned} y = b + (x-a)^{\frac{1}{n}} &+ \frac{\frac{1}{n}(x-a)^{\frac{1}{n}-1}}{1}h + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)(x-a)^{\frac{1}{n}-2}}{1\,.\,2}h^2 \\ &+ \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)(x-a)^{\frac{1}{n}-3}}{1\,.\,2\,.\,3}h^3 + \text{etc.} \end{aligned}\right\},$$

et toutes les puissances de $(x-a)$ étant négatives à partir du second terme, ce terme et les suivans deviendront infinis quand on fera $x=a$; mais la même supposition réduit $(x-a+h)^{\frac{1}{n}}$ à $h^{\frac{1}{n}}$, valeur dans laquelle

h est élevée à une puissance fractionnaire, et qui par conséquent n'est point comprise dans la forme générale du développement de $f(x+h)$, où il ne se trouve que des puissances entières. Cette contradiction n'infirme en rien les raisonnemens du n° 18; et la manière très-satisfaisante dont elle s'explique, en remontant à la considération des accroissemens respectifs des variables et des fonctions qui en dépendent, fournit une nouvelle preuve que cette considération est l'origine la plus naturelle que l'on puisse donner au Calcul différentiel.

132. Lorsqu'à une même valeur de la variable x, correspondent plusieurs valeurs de la fonction y, chacune de ces dernières doit avoir son accroissement particulier; c'est ce qui résulte en effet de la différentiation des fonctions, soit explicites, soit implicites. Occupons-nous d'abord des premières.

Une fonction de cette nature n'a plusieurs valeurs qu'autant qu'elle renferme des radicaux qui sont susceptibles du double signe $\pm$, ou d'un nombre d'expressions égal à celui des racines des équations algébriques à deux termes, dont on peut les concevoir dérivés (*Élém. d'Alg.*). Ces radicaux passant aussi dans les coefficiens différentiels de la fonction, les rendent en même temps susceptibles de plusieurs valeurs, dont l'emploi successif dans la série

$$y' = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

fournit autant de valeurs pour y' qu'en avait y. C'est ainsi que dans tous les états par lesquels passe la fonction, se perpétue le nombre de valeurs que comporte sa forme, et qui ne saurait changer tant que cette forme demeure la même.

Soit, par exemple,

$$y = b \pm \sqrt{x-a};$$

en prenant alternativement le radical avec le signe $+$ et avec le signe $-$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2\sqrt{x-a}} = \pm \tfrac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \mp \tfrac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}}, \quad \text{etc.};$$

d'où il résultera

$$y' = b + (x-a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}\frac{h}{1} - \frac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.};$$

$$y' = b - (x-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}\frac{h}{1} + \frac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}}\frac{h^2}{1.2} - \text{etc.};$$

mais la valeur $x=a$ faisant disparaître le radical $\sqrt{x-a}$, et rendant égales à b les deux valeurs

$$b+\sqrt{x-a}, \quad b-\sqrt{x-a},$$

si le développement de y' conservait la forme

$$y + Ph + Qh^2 + Rh^3 + Sh^4 + \text{etc.},$$

P, Q, R, S, etc. étant alors des fonctions rationnelles, on n'obtiendrait plus qu'une seule valeur consécutive à $y=b$, tandis que pour toute valeur de x, aussi peu différente qu'on voudra de la quantité a, la fonction proposée reprend les deux valeurs dont elle est en général susceptible. Le développement ci-dessus ne convient donc point pour passer de la valeur $y=b$ aux valeurs qui lui sont consécutives; mais par la substitution de $a+h$ au lieu de x, dans l'expression même de la fonction proposée, le radical devenant $\sqrt{h}$, il se conserve, et, par son double signe, reproduit les deux valeurs

$$y' = b + h^{\frac{1}{2}},$$
$$y' = b - h^{\frac{1}{2}},$$

qui naissent, comme on le voit, de l'irrationnalité dont l'accroissement h est alors immédiatement affecté.

La même chose arrive sans que la fonction proposée devienne entièrement rationnelle. Lorsqu'elle contient plusieurs radicaux, c'est assez qu'un seul s'évanouisse, pour que le nombre de ses valeurs diminue; et il ne peut plus se rétablir qu'en faisant porter à l'accroissement de la variable un exposant fractionnaire. Voici un exemple de ce cas :

$$y = b + \sqrt{x-a} + \sqrt{x-c}.$$

La supposition de $x=a$, qui ne fait disparaître qu'un seul des radicaux, rend néanmoins les coefficiens différentiels infinis, et cela parce que y est en général susceptible des quatre valeurs

$$b+\sqrt{x-a}+\sqrt{x-c},\quad b+\sqrt{x-a}-\sqrt{x-c},$$
$$b-\sqrt{x-a}+\sqrt{x-c},\quad b-\sqrt{x-a}-\sqrt{x-c},$$

qui, lorsque le radical $\sqrt{x-a}$ disparaît, se réduisent à

$$b+\sqrt{a-c},\quad b-\sqrt{a-c}.$$

Toutes ces valeurs reparaissent dès qu'on écrit $a+h$ au lieu de x, parce qu'il vient

$$b+h^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a-c+h},\quad b+h^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a-c+h},$$
$$b-h^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a-c+h},\quad b-h^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a-c+h}.$$

Il faut remarquer que le radical $\sqrt{a-c+h}$ peut encore se développer suivant les puissances entières de h; mais il y a toujours le terme $h^{\frac{1}{2}}$ où l'accroissement de x est affecté d'irrationnalité. Il faut remarquer encore que quoique, dans les fonctions proposées, je n'aye pas mis aux radicaux le double signe, ils se comportent comme s'ils portaient ce signe, parce qu'il faut toujours les envisager dans le calcul, comme exprimant les racines de l'équation qu'on obtiendrait en les faisant disparaître, et qui serait ici du quatrième degré.

Quoique les exemples ci-dessus soient très-particuliers, ils suffisent, ce me semble, pour faire concevoir que toutes les fois que la fonction dont on développera l'accroissement, perdra momentanément quelques-uns de ses radicaux, par l'effet d'une valeur particulière de x, alors l'irrationnalité qui a disparu tombera nécessairement sur l'accroissement h, et le développement ordonné suivant les puissances entières de cette quantité, ne pourra pas représenter le passage de cet état particulier de la fonction, à l'état consécutif; mais du moment que x a changé, les radicaux reparaissant indépendamment de h, la fonction proposée reprend sa forme, et la détermination de ses valeurs consécutives peut se faire par la série de Taylor.

Telle est la circonstance où l'on dit communément aujourd'hui que *le théorème de Taylor est en défaut*. Je ne sais si cette manière de parler est bien exacte, et si ce que l'on regarde alors comme un paradoxe, n'est pas, comme tous les paradoxes analytiques, plutôt une perfection de l'Analyse qu'un défaut, puisque c'est un moyen d'indiquer les exceptions qui ont lieu dans les formules, et de montrer en même temps comment elles se lient aux autres cas. On s'en convaincra dans le cas actuel, en examinant de quelle manière l'existence des exposans fractionnaires de h dans le développement de y', rend les coefficiens différentiels infinis.

133. Donnons à l'expression de y' la forme générale

$$y' = y + Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} \ldots\ldots + Th^{\epsilon} + \text{etc.};$$

la fonction y' étant formée du binome $x+h$, est soumise à la condition

$$\frac{d^n y'}{dh^n} = \frac{d^n y'}{dx^n} \ (105),$$

par laquelle les coefficiens différentiels de y', pris en faisant varier x, se déduisent de ceux que donne la variation de h; et l'on passe ensuite aux coefficiens différentiels de y, en faisant $h=0$. Cela posé, un terme quelconque Th^{ϵ} en produit, dans l'expression de $\frac{d^n y'}{dh^n}$, un de cette forme

$$\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon-2)\ldots\ldots(\epsilon-n+1)Th^{\epsilon-n};$$

tant que le nombre n sera au-dessous de ϵ, l'exposant $\epsilon-n$ étant positif, la supposition de $h=0$ fera évanouir ce terme, et si le nombre ϵ est fractionnaire, l'exposant $\epsilon-n$ passera du positif au négatif, sans s'évanouir. Dans ce dernier cas, qui a lieu dès que n surpasse ϵ, le terme devient infini lorsqu'on y fait $h=0$, et par conséquent aussi la valeur de $\frac{d^n y}{dx^n}$, dont il fait partie (*).

Il est visible aussi que si les termes à exposans fractionnaires sont précédés par des termes où l'exposant est entier, il y aura des coeffi-

(*) La considération des limites conduit au même résultat; car si, pour une fonction quelconque y, on a $y'=y+Th^{\epsilon}+\text{etc.}$, il viendra

$$\frac{y'-y}{h} = Th^{\epsilon-1} + \text{etc.},$$

quantité dont le premier terme aura pour limite o, si $\epsilon>1$, et deviendra infini si $\epsilon<1$.

ciens différentiels qui auront une valeur finie. La fonction

$$y = bx^m + c(x-a)^{\frac{p}{q}},$$

m étant un nombre entier, présente la réunion de ces circonstances. Le développement de la valeur correspondante à $x+h$ est, par le théorème de Taylor,

$$bx^m + c(x-a)^{\frac{p}{q}} + \left\{mbx^{m-1} + \frac{cp}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1}\right\}\frac{h}{1}$$

$$+ \left\{m(m-1)bx^{m-2} + \frac{cp(p-q)}{q^2}(x-a)^{\frac{p}{q}-2}\right\}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

et on a

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)bx^{m-n} + \frac{cp(p-q)\ldots[p-(n-1)q]}{q^n}(x-a)^{\frac{p}{q}-n};$$

tant que n sera moindre que $\frac{p}{q}$, les puissances de $x-a$ étant positives s'évanouiront lorsqu'on fera $x=a$, et on aura seulement

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)ba^{m-n}.$$

Il arrivera même qu'un certain nombre de coefficiens différentiels seront nuls, si $m<\frac{p}{q}$, puisque la première partie de l'expression de $\frac{d^ny}{dx^n}$, s'anéantit dès que n surpasse m (22), et que la seconde s'anéantit aussi jusqu'à ce qu'on ait $n>\frac{p}{q}$.

Le développement immédiat de l'expression

$$y' = b(a+h)^m + ch^{\frac{p}{q}},$$

qui résulte de celle de y quand on y fait $x=a+h$, offre les mêmes circonstances, et il s'y trouve aussi une lacune dans les exposans de h, quand $m<\frac{p}{q}$.

134. Il faut bien observer que dans ce qui précède, c'est la quantité comprise sous les radicaux qui s'anéantit; car les radicaux pour-

raient aussi disparaître, s'ils étaient multipliés par un facteur que la valeur particulière de x rendît nul; mais par rapport aux fonctions explicites, ce cas ne fait point exception à la forme du développement de la série de Taylor, parce que les radicaux qui ont disparu dans la valeur de la fonction, reparaissent dans ses coefficiens différentiels.

Si l'on avait, par exemple,

$$y = b + (x-a)\sqrt{x-c},$$

on obtiendrait

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-c} + \frac{x-a}{2\sqrt{x-c}};$$

et dans la supposition de $x=a$, qui ne donne que $y=b$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{a-c},$$

valeur implicitement double, puisqu'elle renferme un radical. La même chose aurait lieu pour les coefficiens différentiels des ordres supérieurs, et par conséquent on obtiendrait deux séries pour exprimer y', ce qui rétablirait le nombre des valeurs dont la fonction proposée est susceptible par sa forme.

Soit encore

$$y = b + (x-a)^2\sqrt{x-c};$$

il viendra

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-a)\sqrt{x-c} + \frac{(x-a)^2}{2\sqrt{x-c}}.$$

Ce résultat, qui contient encore à tous ses termes le facteur $x-a$ s'anéantit quand on fait $x=a$; mais en le différentiant on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{x-c} + \frac{2(x-a)}{\sqrt{x-c}} - \frac{(x-a)^2}{4(x-c)\sqrt{x-c}},$$

et la supposition de $x=a$ ne réduisant ce dernier coefficient qu'à

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{a-c},$$

en fournit deux valeurs qui rétablissent le nombre des développemens de y'.

Le radical n'a reparu ici qu'au second ordre; en général il ne r paraîtra qu'à l'ordre m, lorsque la fonction proposée sera de la forme

$$y = b + (x-a)^m \sqrt{x-c};$$

car en faisant $(x-a)^m = t$, $\sqrt{x-c} = z$, on a, par le n° 91,

$$d^n y = d^n . tz = t d^n z + \frac{n}{1} dt d^{n-1} z + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 t d^{n-2} z \ldots\ldots + z d^n t,$$

expression dont tous les termes s'évanouissent tant que n est moindre que m, puisque les quantités t, dt, $d^2t, \ldots d^{m-1}t$ contiennent toutes le facteur $x-a$ (22); mais quand $n=m$, comme alors,

$$d^m t = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 1 dx^m,$$

il vient

$$\frac{d^m y}{dx^m} = z\frac{d^m t}{dx^m} = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 1 . \sqrt{a-c}.$$

Le radical se conserve ensuite dans tous les ordres supérieurs, par le terme affecté de $d^m t d^{n-m} z$, et les suivans seront tous nuls, puisque $d^{m+1}t$, $d^{m+2}t$, etc. $=0$.

Il est à propos de remarquer que si, dans les expressions qui nous occupent, on faisait passer sous le radical le facteur $x-a$, les coefficiens différentiels se présenteraient d'abord sous la forme de $\frac{0}{0}$.

La fonction $y = b + (x-a)\sqrt{x-c}$, par exemple, donnerait

$$y = b + \sqrt{(x-a)^2(x-c)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-c)(x-a) + (x-a)^2}{2\sqrt{(x-a)^2(x-c)}},$$

et la supposition de $x=a$, anéantirait en même temps le numérateur et le dénominateur de $\frac{dy}{dx}$, à cause du facteur $x-a$, commun à l'un et à l'autre; mais si on réduisait la fraction à sa plus simple expression, on aurait

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-c) + x - a}{2\sqrt{x-c}},$$

expression qui revient à celle qu'on a trouvée plus haut, et se réduit à $\sqrt{a-c}$, lorsque $x=a$.

135. Passons maintenant aux fonctions implicites; elles offrent les

diverses circonstances que nous venons d'exposer. Chaque coefficient différentiel n'étant qu'au premier degré dans l'équation de son ordre, par laquelle il est déterminé, n'acquiert plusieurs valeurs que par la substitution de celles de la fonction primitive, et des coefficiens différentiels des ordres inférieurs (47). Si donc parmi ces dernières il s'en trouve qui soient égales, il y aura nécessairement réduction dans le nombre des séries qui expriment le second état de la fonction proposée.

Soit l'équation $u=0$, entre x et y; on aura généralement

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0,\quad \text{d'où}\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}};$$

mais quand une valeur particulière $x=a$, rend égales plusieurs des valeurs de y, la fonction u, qui ne contient plus alors que les quantités y et a, prend la forme $U(y-b)^m$, et donne

$$\frac{du}{dy}=\frac{dU}{dy}(y-b)^m+mU(y-b)^{m-1}.$$

Cette valeur devenant nulle lorsque $y=b$ et que $m>1$, celle de $\frac{dy}{dx}$ deviendra infinie, si $\frac{du}{dx}$ ne s'évanouit pas, et prendra la forme $\frac{0}{0}$ s'il s'évanouit, ce qui arrive quand il a pour facteur $x-a$ ou $y-b$.

La fonction $y=b+\sqrt{x-a}$, qui nous a déjà servi d'exemple, conduit à l'équation

$$(y-b)^2-(x-a)=0,$$

de laquelle on tire

$$2(y-b)dy-dx=0,\quad \text{d'où}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y-b)}.$$

La supposition de $x=a$, dans l'équation primitive, donnant $y=b$, il en résulte $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{0}$, de même que dans le n° 132.

L'équation

$$(y-b)^3-(x-a)^2=0,$$

offre un exemple du cas où les quantités $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ s'évanouissent en même temps; car elle donne

$$3(y-b)^2dy-2(x-a)dx=0,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2(x-a)}{3(y-b)^2},$$

expression que la substitution de $x=a$ et de $y=b$ rend $\frac{0}{0}$. Sa vraie valeur est infinie, puisque $y=b+(x-a)^{\frac{2}{3}}$ donne $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}$; mais pour le voir d'après l'équation proposée, il faut remonter à la génération des équations différentielles à deux variables.

136. On a vu, n° 41, que ces équations naissent de la substitution de $x+h$ et de $y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+$ etc., au lieu de x et de y, dans une équation primitive $u=0$, et qu'on les forme en égalant successivement à zéro le coefficient de chaque puissance de h, dans le développement du résultat. Si quelque valeur particulière de x fait évanouir les fonctions $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, les termes affectés de la première puissance de h disparaissant d'eux-mêmes, la première équation, $\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}p=0$, ne peut rien apprendre sur la valeur de p; il faut donc avoir recours à la seconde $Q=0$, qui dépend de la différentielle seconde, ainsi qu'on peut le conclure du n° 42, et d'ailleurs on le voit sur-le-champ, lorsqu'en vertu de la liaison des variables x et y, on regarde u comme une fonction implicite de x, puisque sous ce point-de-vue le résultat de la substitution de $x+h$, dans $u=0$, revient à la forme

$$u+\frac{1}{dx}du\frac{h}{1}+\frac{1}{dx^2}d^2u\frac{h^2}{1.2}+\frac{1}{dx^3}d^3u\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}=0;$$

où $\frac{1}{dx}du$, $\frac{1}{dx^2}d^2u$, $\frac{1}{dx^3}d^3u$, etc. désignent les différentielles de u prises en faisant varier les fonctions implicites de x.

La différentielle d^2u, qui est en général

$$\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2+\frac{du}{dy}d^2y=0 \quad (48),$$

se réduit à

$$\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2=0,$$

lorsque $\frac{du}{dy}=0$, et conduit à une équation de la forme

$$P+Q\frac{dy}{dx}+R\frac{dy^2}{dx^2}=0:$$

voilà donc $\frac{dy}{dx}$ donné par une équation du second degré.

Si les coefficiens $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, s'évanouissent aussi, on fera usage de la différentielle troisième, qui, se réduisant, dans cette hypothèse, à

$$\frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3 = 0,$$

donnnera pour déterminer $\frac{dy}{dx}$, une équation de la forme

$$S + T\frac{dy}{dx} + V\frac{dy^2}{dx^2} + W\frac{dy^3}{dx^3} = 0.$$

Si tous les termes de cette dernière s'évanouissent encore d'eux-mêmes, il faudra recourir à la différentielle quatrième, et ainsi de suite; et le degré auquel montera $\frac{dy}{dx}$, dans ces diverses équations, rétablira toujours le nombre de valeurs que doit avoir le second état de la fonction.

Les hypothèses précédentes faisant disparaître d^2y, d^3y, etc. des différentielles successives de u, on voit que pour former les équations relatives à ces hypothèses, il suffit de différentier l'équation proposée $u=0$, en y regardant dx et dy comme constans, et en poussant le calcul jusqu'à ce que l'on parvienne à un résultat que la substitution des valeurs particulières de x et de y ne fasse pas entièrement évanouir.

En traitant ainsi l'équation $(y-b)^3-(x-a)^2=0$, on trouvera

$$3(y-b)^2dy - 2(x-a)dx = 0,$$
$$2.3(y-b)dy^2 - 2dx^2 = 0;$$

et la différentielle seconde donnera les valeurs

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{3(y-b)}},$$

qui deviennent infinies quand $y=b$.

L'équation $(y-b)^2-(x-a)^2(x-c)=0$ étant aussi différentiée deux fois de suite, conduit à

$$2(y-b)dy - 2(x-a)(x-c)dx - (x-a)^2dx = 0,$$
$$2dy^2 - 2(x-c)dx^2 - 4(x-a)dx^2 = 0;$$

et en faisant $x=a$, on tire de la différentielle seconde,

$$\frac{dy^2}{dx^2} = a-c, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{a-c},$$

de même que dans le n° 134.

Avec un peu d'attention, on remarquera que le succès du procédé dont on a fait usage, tient à ce que la différentiation abaisse la puissance des facteurs égaux qui peuvent se trouver dans les fonctions $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, lorsque son exposant est entier; il faut donc que l'équation $u=0$ soit rationnelle, et que par conséquent on ait d'abord fait disparaître les radicaux, si elle en contenait.

Les variables étaient séparées dans les exemples ci-dessus; en voici où elles sont mêlées : premièrement l'équation

$$x^4 - ayx^2 + by^3 = 0,$$

de laquelle on tire

$$(4x^3 - 2ayx)dx - (ax^2 - 3by^2)dy = 0.$$

Si l'on fait $x=0$, on a en même temps $y=0$, valeurs qui font évanouir tous les termes de l'équation différentielle, et il faut pousser jusqu'au troisième ordre pour parvenir à un résultat qui ne s'anéantisse pas; car il vient successivement

$$(12x^2 - 2ay)dx^2 - 4axdxdy + 6bydy^2 = 0,$$
$$24xdx^3 - 6adx^2dy + 6bdy^3 = 0.$$

La dernière de ces équations étant mise sous la forme

$$24x - 6a\frac{dy}{dx} + 6b\frac{dy^3}{dx^3} = 0,$$

se réduit à

$$-6a\frac{dy}{dx} + 6b\frac{dy^3}{dx^3} = 0,$$

lorsque $x=0$, et donne les trois valeurs réelles

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Il arrive quelquefois que plusieurs des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont imaginaires. Ce cas est celui de l'équation

$$ax^3 + x^3y - ay^3 = 0,$$

dont les différentielles première et seconde s'évanouissent par la supposition de $x=0$; la différentielle troisième se réduisant à

$$6a\mathrm{d}x^3 - 6a\mathrm{d}y^3 = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^3} - 1 = 0,$$

donne seulement $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$, et les deux autres valeurs sont imaginaires.

137. On doit être convaincu, par les propositions et les exemples précédens, que les exceptions dont la série de Taylor est susceptible, ne sauraient se rapporter qu'à des cas particuliers, et sont une suite nécessaire de la conservation des formes des fonctions, ainsi qu'on l'a avancé dans le n° 131. M. Lagrange, qui a le premier complété l'explication de ces exceptions, remarquées sous d'autres rapports, dès l'origine du Calcul différentiel, a employé les mêmes principes à prouver que le développement du second état d'une fonction ne pouvait en général contenir aucune puissance fractionnaire de l'accroissement de la variable.

En effet ce développement ne doit pas fournir plus de valeurs que n'en comporte la nature de cette fonction, ou le degré de l'équation qui la détermine; or tant que les coefficiens P, Q, etc. de la série

$$y + Ph^\alpha + Qh^\beta + \text{etc.},$$

recevront des valeurs différentes pour chacune des valeurs de y, elle offrira dans toutes ses parties un nombre de résultats égal à celui de ces valeurs. D'un autre côté, des puissances fractionnaires telles que $h^{\frac{1}{2}}$, $h^{\frac{1}{3}}$, etc., auraient par elles-mêmes un nombre de valeurs égal au dénominateur de leur exposant (*Élém. d'Alg.*); et comme il ne paraît pas dans la nature de la chose, de condition implicite pour employer une de ces valeurs préférablement à toutes les autres, il s'ensuit que le même terme, Ph^α aurait autant de valeurs qu'on en peut former en combinant de toutes les manières possibles celles du coefficient P avec celles de h^α : on voit donc par là que le nombre des séries résultantes surpasserait celui des valeurs de la fonction proposée, et il faut observer que les racines imaginaires compteraient dans ce nombre, puisqu'elles sont comprises dans celui que comportent les équations algébriques.

Ce raisonnement cesse d'être applicable, quand le nombre des valeurs des coefficiens $P, Q,$ etc. vient à diminuer sans pouvoir se rétablir à l'égard des termes ultérieurs de la série; et ce sont alors les puissances fractionnaires de l'accroissement qui y suppléent.

138. M. Lagrange examine aussi s'il n'est pas possible que le développement du second état de la fonction contienne des puissances négatives de h, pour certaines valeurs particulières de x seulement, car on a déjà vu (17) que cela ne pouvait avoir lieu en général. Ces valeurs particulières sont celles qui rendraient infinie la fonction proposée. Dans ce cas où $y=\frac{1}{0}$, on aura $\frac{1}{y}=0$, et en nommant a la racine de cette équation, on peut la concevoir sous la forme $\frac{(x-a)^m}{U}=0$, U ne devenant ni nul, ni infini. Il résulte de là

$$y=\frac{U}{(x-a)^m},\quad y'=\frac{U'}{(x+h-a)^m}=\frac{U+Ph+Qh^2+\text{etc.}}{h^m},$$

quand l'on fait $x=a$; et il est évident alors que y' peut renfermer des puissances négatives de h. C'est ce qui arrive à la fonction $y=\frac{x^3}{x^2-a^2}$, dans le cas où $x=a$, et à la fonction $y=\mathrm{l}x$, dans celui où $x=0$; de là vient aussi qu'on ne peut développer celle-ci en série ordonnée suivant les puissances de x. La marche de cette dernière fonction offre encore quelques particularités remarquables que je ferai bientôt connaître.

139. Il est encore à remarquer que la série de Taylor devient illusoire pour toute valeur qui rend imaginaire l'un quelconque de ses termes; et que cela peut arriver sans que la fonction soit elle-même imaginaire, comme, par exemple, à la suivante :

$$y = b + x^2(x-a)^{\frac{3}{2}}.$$

Lorsqu'on y fait $x=0$, elle donne $y=b$; mais en passant à ses coefficiens différentiels, on forme les expressions

$$\frac{dy}{dx} = 2x(x-a)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\,x^2(x-a)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,(x-a)^{\frac{3}{2}} + 6x\,(x-a)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\,x^2(x-a)^{-\frac{1}{2}},$$

etc.,

dont la première devient 0, et toutes les autres sont imaginaires.

Il est aisé de former sur ce modèle des fonctions dans lesquelles l'imaginaire ne paraisse qu'à tel ordre qu'on voudra; et en examinant leur marche; on voit que la valeur $y = b$ n'est précédée ni suivie immédiatement d'aucune autre, puisque l'expression $y = b + x^2(x-a)^{\frac{1}{2}}$ est imaginaire pour toutes les valeurs négatives de x, et continue de l'être pour les valeurs positives, tant que $x < a$, il est donc tout simple que l'expression du second état de y devienne alors imaginaire. On verra encore mieux dans l'application aux courbes, ce que signifie cette circonstance analytique.

140. Dans les cas particuliers où le calcul différentiel se refuse à l'expression du développement de $f(x+h)$, il faut, si la fonction est explicite, développer immédiatement les radicaux, ainsi qu'on l'a fait dans le n° 131. La fonction

$$y = (a-x)^2 \sqrt[3]{a^3 - x^3},$$

que je prends encore pour exemple, mène à

$$\begin{aligned} y' &= h^2 \sqrt[3]{-3a^2h - 3ah^2 - h^3} = -h^{2+\frac{1}{3}}\{3a^2 + (3a+h)h\}^{\frac{1}{3}} \\ &= -(3a^2)^{\frac{1}{3}} h^{\frac{7}{3}}\left\{1 + \frac{h}{9a^2}(3a+h) + \text{etc.}\right\} \\ &= -(3a^2)^{\frac{1}{3}} h^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3a}(3a^2)^{\frac{1}{3}} h^{\frac{10}{3}} - \text{etc.} \end{aligned}$$

Je n'ai calculé que les deux premiers termes, parce que dans l'usage que je ferai de ce genre de développemens, par la suite, ce terme suffira le plus souvent.

S'il s'agissait d'une fonction implicite, donnée par une équation entre x et y, a désignant la valeur particulière que l'on suppose à x, et b la valeur correspondante de y, on substituerait $a+h$ à x, $b+k$ à y; regardant ensuite h et k comme les variables de l'équation résultante, on trouverait, d'après les n[os] 62 et 64 de l'Introduction, l'expression de k en série ascendante ordonnée suivant les puissances de h.

Soit pour exemple l'équation

$$y^4 - 2x^2y^2 + 2x^4 - a^4 = 0;$$

on en tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - 2x^3}{y^3 - x^2y};$$

et quand on y fait $x=a$, elle devient

$$y^4-2a^2y^2+a^4=0,\quad \text{d'où}\quad y=\pm a,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{a^3}{0}.$$

Pour obtenir les premiers termes du développement de y', dans ce cas particulier, on change x en $a+h$, y en $a+k$, puis, suivant la méthode des numéros cités, on écrit Ah^α au lieu de k, et il vient

$$a^4-2(a+h)^4+2(a+h)^2(a+Ah^\alpha)^2-(a+Ah^\alpha)^4=0.$$

Comme on ne doit considérer dans cette équation que les termes affectés de la plus petite puissance de h, il suffira d'avoir égard à

$$-4a^3h+8a^3Ah^{\alpha+1}-4a^2A^2h^{2\alpha}-4aA^3h^{3\alpha}-A^4h^{4\alpha}=0,$$

d'où on tirera $\alpha=\frac{1}{2}$ et $a+A^2=0$; on aura donc pour résultat

$$y'=a\pm h^{\frac{1}{2}}\sqrt{-a}\ \text{etc.}=a\pm\sqrt{-ah}.$$

On voit par là qu'en prenant h de même signe que a, ou $x>a$, la valeur de y' sera imaginaire, et qu'elle est réelle quand h et a sont de signes contraires ou $x<a$.

L'équation proposée étant résolue par rapport à y, à la manière des équations du second degré, donnera

$$y=\pm\sqrt{x^2\pm\sqrt{a^4-x^4}},$$

d'où l'on déduira, par les développemens immédiats des radicaux, la valeur de y' trouvée ci-dessus.

Je ferai observer qu'on peut envisager la quantité $\pm h^{\frac{1}{2}}\sqrt{-a}$ comme l'expression de la différentielle de y, dans le cas où $x=a$, puisqu'elle forme alors le premier terme du développement de la différence entre les valeurs de y et y', correspondantes à $x=a$ et à $x=a+h$. C'est sous ce point-de-vue, qu'Euler a consacré un chapitre entier de ses *Institutions du Calcul différentiel*, aux différentielles propres à certaines valeurs des fonctions.

141. Quand on a reconnu la loi des exposans des puissances suivant lesquelles doit procéder la série qui représente le développement par-

ticulier du second état de la fonction proposée, on pourrait employer le théorème de Maclaurin, pour en obtenir les différens termes, en transformant d'une manière convenable cette fonction.

Soit, par exemple,

$$y = b + \sqrt{x(x-a)},$$

qui, dans le cas de $x = a + h$, devient

$$y' = b \pm h^{\frac{1}{2}}(a+h)^{\frac{1}{2}} = b \pm a^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{2}\,a^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}} \mp \text{etc.};$$

et comme la série ne contient que des puissances dont l'exposant est multiple de $\frac{1}{2}$, on fera $h = z^2$, afin de pouvoir développer suivant les puissances entières de z. Par cette transformation, il viendra

$$(y'-b)^2 = az^2 + z^4.$$

En formant les différentielles successives, on a

$$\left.\begin{array}{l}
(y'-b)\,\mathrm{d}y' = az\mathrm{d}z + 2z^3\mathrm{d}z,\\
(y'-b)\mathrm{d}^2y' + \mathrm{d}y'^2 = a\mathrm{d}z^2 + 6z^2\mathrm{d}z^2,\\
(y'-b)\mathrm{d}^3y' + 3\mathrm{d}y'\mathrm{d}^2y' = 12z\mathrm{d}z^3,\\
(y'-b)\mathrm{d}^4y' + 4\mathrm{d}y'\mathrm{d}^3y'\,\text{[illegible]}\,y'^2 = 12\mathrm{d}z^4,\\
\text{etc.}
\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}z} = \dfrac{0}{0},\\
\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}z} = \pm\sqrt{a},\\
\dfrac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}z^2} = 0,\\
\dfrac{\mathrm{d}^3y'}{\mathrm{d}z^3} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{a}},\\
\text{etc.}
\end{array}\right.$$

et, comme ci-dessus,

$$y' = b \pm z\sqrt{a} \pm \frac{z^3}{2\sqrt{a}} \mp \text{etc.}$$

Il est visible que ce procédé ne doit être considéré que sous le rapport de la théorie; car il exige des calculs presque toujours plus longs que les autres méthodes, à cause des termes qui peuvent manquer dans la série, ce dont on ne s'apperçoit qu'en formant les équations différentielles dont ils dépendent.

142. Non-seulement pour les fonctions de plusieurs variables, les exposans des accroissemens peuvent être fractionnaires, mais il arrive encore qu'on ne saurait développer le second état de ces fonctions en monomes où les puissances des accroissemens soient toutes positives.

en même temps. La fonction

$$z = b - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}},$$

en fournit un exemple, lorsque l'on y fait $x = 0$ et $y = 0$, d'où il résulte $z = b$. Le second état est alors exprimé par

$$z' = b - (h^2 + k^2)^{\frac{1}{3}},$$

expression qui ne saurait être développée que sous des formes telles que

$$z' = b - h^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{k^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{3}} = b - h^{\frac{2}{3}}\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{k^2}{h^2} - \text{etc.}\right\}.$$

Les coefficiens différentiels

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}, \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{-2y}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}},$$

prennent alors la forme $\frac{0}{0}$; mais ils deviennent réellement infinis quand on suppose $y = ax$, afin de conserver un rapport entre les variables, au moment où elles vont s'évanouir. On trouve en effet alors

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2}{3x^{\frac{1}{3}}(1 + a^2)^{\frac{2}{3}}}, \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{-2a}{3x^{\frac{1}{3}}(1 + a^2)^{\frac{2}{3}}},$$

valeurs dont la supposition de $x = 0$ fait disparaître seulement le dénominateur.

De la vraie valeur des fonctions qui deviennent $\frac{0}{0}$ dans certains cas.

143. Nous venons de voir que les coefficiens différentiels ont toujours une valeur déterminée, soit nulle, soit finie, soit infinie, lors même qu'ils se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; cette propriété ne leur est point particulière; elle a lieu pour toutes les fonctions d'une seule variable, qui ne peuvent jamais être indéterminées; car si une valeur particulière $x = a$ anéantit en même temps leur numérateur et leur dénominateur, on peut toujours concevoir qu'elles soient mises sous la forme

$$\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n},$$

P et Q étant des quantités qui ne deviennent ni nulles, ni infinies par la supposition de $x=a$. Une fraction de cette forme devient encore $\frac{0}{0}$, si on laisse les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : mais les lois du calcul exigent, avant tout, qu'on la réduise à sa plus simple expression, et alors sa vraie valeur doit être ou nulle, ou finie, ou infinie, selon qu'on aura $m>n$, $m=n$, $m<n$; car en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on trouvera $\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q}$ dans le premier cas, $\frac{P}{Q}$ dans le second, et $\frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}$ dans le troisième.

Lors donc qu'une expression quelconque se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, il faut, pour connaître sa vraie signification, la dégager des facteurs qui sont communs à son numérateur et à son dénominateur. La fraction $\frac{a^3-x^3}{a^2-x^2}$, par exemple, qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$, étant réduite à ses moindres termes, se change en $\frac{a^2+ax+x^2}{a+x}$, et donne $\frac{3a}{2}$, quand on y fait $x=a$.

144. Le Calcul différentiel fournit, pour parvenir à la vraie valeur d'une fonction qui devient $\frac{0}{0}$, des moyens plus simples et plus généraux que la recherche du diviseur commun.

D'abord la formule du n° 91 montre que toutes les différentielles d'une expression de la forme $P(x-a)^m$ jusqu'à celle de l'ordre $m-1$ inclusivement, s'évanouissent dans la supposition de $x=a$, lorsque m est un nombre entier, et qu'alors la différentielle de l'ordre m se réduit à $1.2...mP\mathrm{d}x^m$: le facteur $(x-a)^m$ disparaît donc dans cette hypothèse, après m différentiations. Il n'est pas nécessaire qu'on connaisse l'exposant m, ni même que le facteur $(x-a)^m$ soit en évidence, pour savoir quand l'expression $P(x-a)^m$ en est délivrée; il suffit de s'assurer, après chaque différentiation, si le résultat obtenu s'évanouit ou non, lorsqu'on met a à la place de x; dans le dernier cas l'opération est finie, et ce qu'on a trouvé représente la quantité $1.2...mP\mathrm{d}x^m$.

Soit pour exemple la fonction $x^3-ax^2-a^2x+a^3$, qui s'évanouit par la supposition de $x=a$; sa différentielle première s'évanouit aussi dans cette hypothèse, mais non pas sa différentielle seconde, qui est $(6x-2a)\mathrm{d}x^2$: la voilà donc délivrée du facteur $(x-a)$; et puisqu'il a fallu pour cela deux différentiations, on en doit conclure qu'elle est de la forme $P(x-a)^2$, ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier, car on trouvera

$$x^3 - ax^2 - a^2x + a^3 = (x+a)(x-a)^2.$$

D'après ce qui précède, si, en différentiant plusieurs fois de suite le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, c'est le numérateur qui donne le premier un résultat qui ne s'évanouisse pas, ce sera une preuve que le facteur $(x-a)$ s'y trouve élevé à une puissance moindre que dans le dénominateur, et par conséquent la fraction proposée sera infinie; si c'est au contraire le dénominateur, la fraction proposée sera nulle; mais dans le cas ou $m=n$, on trouvera, après m différentiations,

$$\frac{1.2\ldots mPdx^m}{1.2\ldots mQdx^m} = \frac{P}{Q},$$

ce qui est la vraie valeur : on peut donc énoncer la règle suivante : *Pour obtenir la vraie valeur d'une fonction qui devient $\frac{0}{0}$, lorsqu'on donne à* x *une valeur particulière, il faut différentier son numérateur et son dénominateur, jusqu'à ce qu'on trouve pour l'un ou pour l'autre un résultat qui ne s'évanouisse pas; la fonction proposée sera infinie dans le premier cas, nulle dans le second; et si elle a une valeur finie, on rencontrera en même temps deux résultats qui ne s'anéantiront point.* Quelques exemples éclairciront suffisamment ceci.

145. Soit, 1°. la fonction $\frac{a^3-x^3}{a^2-x^2}$ dont on demande la valeur lorsque $x=a$; en différentiant son numérateur et son dénominateur, on trouvera $\frac{-3x^2dx}{-2xdx}$, d'où il résulte $\frac{3a}{2}$, lorsqu'on change x en a, de même que dans le n° 143.

2°. La formule $\frac{x^n-1}{x-1}$ qui exprime la somme des n premiers termes de la progression par quotiens (ou géométrique) $\div\!\div 1 : x : x^2 : x^3 :$ etc. devient $\frac{0}{0}$ quand $x=1$; cependant cette somme, dans la progression $\div\!\div 1 : 1 : 1 : 1$, etc. à laquelle on est conduit alors, a une valeur déterminée et égale à n, que la règle précédente va nous donner aussi. En effet, après avoir différentié le numérateur et le dénominateur de l'expression $\frac{x^n-1}{x-1}$, on trouve $\frac{nx^{n-1}dx}{dx}$, et en écrivant 1 au lieu de x, il vient n.

3°. La vraie valeur de $\frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$, dans le cas où $x=c$, ne peut s'obtenir qu'après deux différentiations; car la première donne $\frac{ax-ac}{bx-bc}$, résultat qui devient encore $\frac{0}{0}$; mais en différentiant on trouve $\frac{a}{b}$.

4°. Cherchons encore la valeur de la fraction $\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{x^2-a^2}$, lorsque $x=a$; nous trouverons, après avoir différentié une fois le numérateur et le dénominateur, que le premier seul devient encore nul quand on met a au lieu de x; ce qui nous apprend que la vraie valeur de la fonction proposée est nulle. Le contraire aurait eu lieu pour la fonction $\frac{ax-x^2}{a^4-2a^3x+2ax^3-x^4}$.

5°. Quoiqu'on ne voie pas tout de suite comment il est possible de donner la forme $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ à la fonction transcendante $\frac{a^x-b^x}{x}$, qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x=0$, on peut néanmoins y appliquer la règle; et après avoir différentié son numérateur et son dénominateur, on trouve $a^x\mathrm{l}a-b^x\mathrm{l}b$: en mettant 0 pour x, on a $\mathrm{l}a-\mathrm{l}b$ pour la vraie valeur cherchée.

Ce résultat s'obtient tout de suite en substituant aux fonctions a^x et b^x leurs développemens (*Introduction*, 22); car il vient

$$\frac{a^x-b^x}{x}=(\mathrm{l}a-\mathrm{l}b)+\{(\mathrm{l}a)^2-(\mathrm{l}b)^2\}\frac{x}{1.2}+\text{etc.},$$

et la supposition de $x=0$ réduit le second membre de cette équation à son premier terme. En faisant l'opération, on remarquera qu'il y a un facteur x qui disparaît par la division.

6°. La fonction $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque l'arc $x=\frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence; mais en lui appliquant la règle, on trouve que sa vraie valeur est alors -1.

7°. Le lecteur pourra s'exercer sur les fonctions $\frac{a-x-a\mathrm{l}a+a\mathrm{l}x}{a-\sqrt{2ax-x^2}}$ et $\frac{x^x-x}{1-x+\mathrm{l}x}$; la première devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$, et la seconde lorsque $x=1$; leurs vraies valeurs sont respectivement -1 et -2.

146. Il est aisé de voir que la règle du n° 144 ne serait pas applicable au cas où les facteurs qui s'évanouissent, seraient élevés à des puissances fractionnaires; car les différentielles de la fonction $P(x-a)^m$

sont ou nulles ou infinies lorsque m n'est pas un nombre entier (131).
Si on avait, par exemple $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, quoique la vraie valeur de cette fraction, lorsque $x=a$, soit $(2a)^{\frac{3}{2}}$, on n'y parviendrait jamais par la différentiation : on trouverait successivement

$$\frac{3x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+3x^2(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}},\quad \text{etc.};$$

le premier de ces résultats devient encore $\frac{0}{0}$, quand on fait $x=a$, et la même supposition rend infinis les numérateurs et les dénominateurs de chacun des suivans. Si on fait disparaître les exposans négatifs, en passant au dénominateur ceux qui se trouvent dans le numérateur, *et vice versâ*, les expressions nouvelles qui naîtront de ce changement se réduiront toutes à $\frac{0}{0}$.

147. Voici un procédé général exempt de toute difficulté, qui comprend la règle du n° 144, et que je n'ai présenté le dernier que parce qu'il m'a semblé que les considérations du n° cité pouvaient jeter un grand jour sur l'objet qui nous occupe.

Soit $\frac{X}{X'}$ une fraction dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent tous deux quand $x=a$; en substituant $a+h$ au lieu de x, les fonctions X et X' se développeront suivant des séries ascendantes de la forme $Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\text{etc.}$, $A'h^{\alpha'}+B'h^{\beta'}+\text{etc.}$, puisqu'elles doivent devenir nulles dans l'hypothèse de $h=0$, qui répond à celle de $x=a$: on aura donc $\frac{Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\text{etc.}}{A'h^{\alpha'}+B'h^{\beta'}+\text{etc.}}$, au lieu de la fonction proposée. Si dans ce résultat on suppose en effet $h=0$, on doit retomber sur la valeur que reçoit la fonction $\frac{X}{X'}$, lorsqu'on change x en a; et quoiqu'il semble d'abord se réduire à $\frac{0}{0}$, on va voir cependant qu'il a toujours une valeur déterminée. En distinguant les trois cas $\alpha>\alpha'$, $\alpha=\alpha'$ et $\alpha<\alpha'$, nous pourrons, dans les deux premiers, écrire ainsi qu'il suit l'expression précédente :

$$\frac{Ah^{\alpha-\alpha'}+Bh^{\beta-\alpha'}+\text{etc.}}{A'+B'h^{\beta'-\alpha'}+\text{etc.}}$$

Sous cette forme il est aisé d'appercevoir que tant que α surpassera α', la supposition de $h=0$ rendra la fraction nulle, et qu'elle se réduira à $\frac{A}{A'}$ lorsqu'on aura $\alpha=\alpha'$. Au contraire, si α est $<\alpha'$, on écrira $\frac{A+Bh^{6-\alpha}+\text{etc.}}{A'h^{\alpha'-\alpha}+B'h^{6'-\alpha}+\text{etc.}}$, forme qui donne l'infini, par la supposition de $h=0$.

Dans tous ces cas, la vraie valeur qu'on cherche ne dépend que du premier terme de chaque série; ainsi la règle suivante s'étend à toutes les fonctions qui peuvent se présenter sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: *cherchez le premier terme de chacune des séries ascendantes qui expriment le développement du numérateur et du dénominateur, lorsque* $x=a+h$; *réduisez à sa plus simple expression la nouvelle fraction formée de ces premiers termes, et faites ensuite* $h=0$; *les résultats que vous obtiendrez, seront les différentes valeurs que prend la fraction proposée lorsqu'on y fait* $x=a$.

Quand le second état des fonctions X et X', correspondant à la valeur $x=a+h$, peut se développer par le théorème de Taylor, on obtient par ce théorème

$$\frac{X+\frac{dX}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3X}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}}{X'+\frac{dX'}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2X'}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3X'}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}};$$

et si la valeur $x=a$ faisait disparaître X et ses coefficiens différentiels jusqu'à l'ordre m, X' et ses coefficiens différentiels jusqu'à l'ordre n, la fraction proposée se réduirait à

$$\frac{\frac{d^mX}{dx^m}\;\frac{h^m}{1.2\ldots m}}{\frac{d^nX'}{dx^n}\;\frac{h^n}{1.2\ldots n}},$$

quantité qui sera nulle si $m>n$, infinie si $m<n$, et égale à

$$\frac{\frac{d^mX}{dx^m}}{\frac{d^mX'}{dx^m}}$$

quand $m=n$: ceci rentre évidemment dans la règle du n° 144.

148. Le développement immédiat, d'après la règle du n° précédent,

paraîtra quelquefois plus commode que le procédé de la différentiation, dans le cas où il peut s'employer. Ce n'est, par exemple, qu'après avoir différentié quatre fois de suite le numérateur et le dénominateur de la fraction

$$\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}},$$

qu'on parvient à en trouver la vraie valeur, dans le cas où $x=a$.

En écrivant $a+h$ au lieu de x, comme le prescrit la règle, il vient

$$\frac{2a^3+2a^2h-ah^2+h^3-2a^2\sqrt{a^2+2ah}}{-2a^2+h^2+2a\sqrt{a^2-h^2}};$$

réduisant en série les deux quantités radicales, on aura

$$\sqrt{a^2+2ah}=a+h-\frac{h^2}{2a}+\frac{h^3}{2a^2}-\frac{5h^4}{8a^3}+\text{etc.},$$

$$\sqrt{a^2-h^2}\;=a-\frac{h^2}{2a}-\frac{h^4}{8a^3}-\text{etc.}$$

La substitution de ces deux suites dans la fraction précédente, donnera $-5a$ pour la vraie valeur cherchée.

Dans les cas où la valeur particulière de x fait disparaître quelques radicaux, et qui par là échappent à la règle du n° 144, il faut nécessairement avoir recours à celle dont nous venons de faire usage. La fraction $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, dont on ne peut obtenir la valeur par la différentiation, lorsque $x=a$ (146), devient

$$\frac{(2ah+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}=(2a+h)^{\frac{3}{2}};$$

en changeant x en $a+h$, et faisant $h=0$, on obtient la vraie valeur $(2a)^{\frac{3}{2}}$.

Il faut remarquer que ce dernier exemple, et tous ceux du même genre, peuvent être traités par le procédé du n° 136, en les égalant à $\frac{dy}{dx}$, et faisant ensuite disparaître les radicaux et les fractions. En effet, si l'on posait

$$\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dy}{dx},$$

on en déduirait l'équation

$$(x-a)^3 dy^2 - (x^2-a^2)^3 dx^2 = 0\,;$$

et après trois différentiations, on aurait, en faisant $x=a$,

$$6dx^3dy^2 - 48a^3dx^5 = 0,$$

ce qui donnerait encore, comme ci-dessus, $\frac{dy}{dx} = (2a)^{\frac{3}{2}}$.

Je n'ai considéré dans cet article que des fonctions explicites de x; mais il est visible que s'il s'agissait d'une fonction de x et de y, dans laquelle y fût une fonction implicite de x, on pourrait employer la règle du n° 147, en substituant à y les diverses séries ascendantes que fournit l'équation qui détermine son second état lorsque x se change en $x+h$; et pour les obtenir, on ferait usage de la méthode du n° 64 de l'Introduction.

149. Une fonction peut encore se présenter sous plusieurs formes indéterminées, différentes en apparence de $\frac{0}{0}$, mais qui, dans le fond, reviennent au même, et qu'il est bon de connaître.

1°. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{X}{X'}$ peuvent devenir infinis en même temps; nous en avons donné un exemple dans le n° 146, sur l'expression $\frac{3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} + 3x^2(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}$, et nous avons indiqué comment on pouvait en tirer un résultat qui devînt $\frac{0}{0}$ quand $x=a$. En général la fraction $\frac{X}{X'}$ étant écrite ainsi: $\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}}$, se réduira à $\frac{0}{0}$ lorsque X et X' seront infinis; la substitution de $a+h$ au lieu de x conduira aussi à sa vraie valeur, sans qu'il soit besoin de la changer de forme. L'exemple rapporté ci-dessus devient, par cette substitution,

$$\frac{(2ah+h^2)^{\frac{1}{2}} + (a+h)^2(2ah+h^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}h^{-\frac{1}{2}}} = 4h(2a+h)^{\frac{1}{2}} + 4(a+h)^2(2a+h)^{-\frac{1}{2}};$$

et en faisant $h=0$, il en résulte $4a^2(2a)^{-\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{3}{2}}$.

2°. Il peut arriver qu'on rencontre un produit composé de deux facteurs, l'un infini et l'autre nul. Soit PQ ce produit; si la supposition de $x=a$ donne $P=0$, $Q=\frac{b}{0}$, on fera $Q=\frac{1}{R}$, et R sera une quantité nulle dans la même hypothèse : il viendra donc $PQ=\frac{P}{R}=\frac{0}{0}$.

Prenons pour exemple l'expression $(1-x)\tang\frac{\pi x}{2}$, π désignant la demi-circonférence. Lorsqu'on fait $x=1$, d'un côté, la quantité $1-x$ s'évanouit, et de l'autre, l'angle $\frac{\pi x}{2}$ devenant $\frac{\pi}{2}$, a une tangente infinie. Pour parvenir donc à connaître la vraie valeur de ce produit, il faut faire $\tang\frac{\pi x}{2}=\frac{1}{R}$; et en se rappelant que $\tang A=\frac{1}{\cot A}$, on aura $R=\cot\frac{\pi x}{2}$; la fonction proposée deviendra par conséquent $\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}$, fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque $x=1$. On trouvera, par la règle du n° 144, que sa vraie valeur est $\frac{2}{\pi}$, en observant que $d.\cot\frac{\pi x}{2}=-\frac{\frac{1}{2}\pi dx}{\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2}$ (15), et que $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

3°. Supposons enfin qu'on demande la valeur de la différence $P-Q$, lorsque les fonctions de x, représentées par les lettres P et Q, sont infinies. Si ces fonctions sont algébriques, rationnelles et entières, elles ne peuvent devenir infinies que dans le cas où x le devient aussi, et l'expression $P-Q$ ne peut avoir une valeur finie, à moins qu'on n'ait $P=Q+b$, b étant une quantité constante. Quand P et Q sont des fractions dont les dénominateurs s'évanouissent, il est facile de changer la fonction proposée dans une autre qui devienne $\frac{0}{0}$; il suffit pour cela de réduire P et Q au même dénominateur.

Soit, par exemple, $P=\frac{1}{1-x}$ et $Q=\frac{2}{1-x^2}$; il en résultera l'expression $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$, dont chaque terme devient infini lorsque $x=1$; mais en réduisant au même dénominateur, on trouvera $\frac{-1+2x-x^2}{(1-x)(1-x^2)}$, fraction qui devient $\frac{0}{0}$, en y faisant $x=1$, et dont la vraie valeur dans ce cas est $-\frac{1}{2}$.

Considérons encore les fonctions transcendantes $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lx}$, et $\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi}{2x\,\text{tang}\,\pi x}$. La première, quand $x=1$, devient la différence de deux quantités infinies ; mais en substituant $1+h$ au lieu de x, elle prend la forme $\frac{1+h}{h}-\frac{1}{l(1+h)}$; or, $l(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-$ etc. : donc

$$\frac{1+h}{h}-\frac{1}{l(1+h)}=\frac{(1+h)l(1+h)-h}{hl(1+h)}=\frac{\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.}}{h^2-\frac{h^3}{2}+\text{etc.}}.$$

Divisant les deux termes de la dernière fraction par h^2, et faisant ensuite $h=0$, elle donne $\frac{1}{2}$ pour la vraie valeur de $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lx}$, dans le cas où $x=1$.

La fonction $\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi}{2x\,\text{tang}\,\pi x}$ devient $\frac{1}{0}-\frac{\pi}{0}$, lorsqu'on y fait $x=0$; mais si on met h à la place de x, et qu'on substitue, au lieu de tang πh, le développement $\frac{\pi h}{1}+\frac{2\pi^3h^3}{1.2.3}+$etc., qui résulte de la formule du n° 90, on aura

$$\frac{1}{2h^2}-\frac{\pi}{\frac{2\pi h^2}{1}+\frac{4\pi^3h^4}{1.2.3}+\text{etc.}}.$$

On réduira ces deux fractions au même dénominateur; on divisera les deux termes du résultat par h^4, et en supposant $h=0$, on obtiendra $\frac{\pi^2}{6}$. Je ferai remarquer qu'en réduisant les deux termes de la fonction proposée au même dénominateur, on trouverait $\frac{\text{tang}\,\pi x-\pi x}{2x^2\,\text{tang}\,\pi x}$, et si on écrivait o au lieu de x, il viendrait $\frac{0}{0}$.

150. La fraction $\frac{lx}{x}$, dont le numérateur et le dénominateur deviennent infinis lorsqu'on suppose x infini, mérite un examen particulier; car en la préparant comme il a été dit n° 149, et appliquant la règle du n° 144, il vient

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{lx}},\quad \frac{d\frac{1}{x}}{d\frac{1}{lx}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x(lx)^2}}=\frac{(lx)^2}{x},$$

résultat dont on ne peut rien conclure. Cependant il est aisé de voir que dans l'hypothèse établie, la fraction proposée doit se réduire à zéro, puisque les nombres croissant beaucoup plus rapidement que les logarithmes, cette fraction diminue sans cesse, à mesure que x augmente; et il en arrivera autant à la fraction $\frac{1x}{x^n}$, tant que n sera un nombre positif.

Le moyen qui m'a paru le plus simple et le plus clair pour vérifier cette remarque, est de recourir à la série qui exprime le nombre par son logarithme (*Int.*, 28), et qui finit toujours par devenir convergente, à cause de la forme de ses diviseurs (*Int.*, 22). On a, par cette série, en y changeant a en x^n, $1a$ en $n1x$, et faisant $M=1$,

$$\frac{1x}{x^n}=\frac{1x}{1+1x\frac{n}{1}+(1x)^2\frac{n^2}{1.2}+(1x)^3\frac{n^3}{1.2.3}+\text{etc.}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{1x}+\frac{n}{1}+1x\frac{n^2}{1.2}+(1x)^2\frac{n^3}{1.2.3}+\text{etc.}}$$

La dernière expression ayant son numérateur constant, tandis que son dénominateur augmente avec la valeur de x et devient infini en même temps que cette valeur, il s'ensuit que la valeur de $\frac{1x}{x^n}$ tend sans cesse à s'anéantir, à moins cependant que le nombre n ne soit d'une petitesse comparable à $\frac{1}{1x}$.

On m'a fait remarquer que l'on parvenait à une conclusion semblable, en se bornant à différentier séparément le numérateur et le dénominateur de $\frac{1x}{x^n}$, ce qui donne

$$\frac{\frac{dx}{x}}{nx^{n-1}dx}=\frac{1}{nx^n},$$

résultat que la supposition de x infini rend nul, à moins que n ne soit très-petit. Pour justifier ce procédé, on observe que si l'on applique à la fraction

$$\frac{X}{X'}=\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}},$$

la règle du n° 144, il vient

$$\frac{X^2}{X'^2}\cdot\frac{dX'}{dX},$$

et que si on égale cette valeur à $\frac{X}{X'}$, on obtient

$$\frac{X}{X'}\cdot\frac{dX'}{dX}=1,\quad \text{d'où}\quad \frac{X}{X'}=\frac{dX}{dX'};$$

mais on voit par le premier exemple du n° 149, que ce procédé ne conduirait pas généralement à la vraie valeur des fractions proposées.

Connaissant la limite dont est susceptible la fonction $\frac{lx}{x^n}$, on en déduit celle de plusieurs autres fonctions du même genre :

1°. La fonction $\frac{x^n}{lx}$ étant égale à $\left(\frac{lx}{x^n}\right)^{-1}$, devient infinie lorsque celle-ci est nulle, c'est-à-dire lorsque x est infini.

2°. La fonction $x^n lx$, qui devient $0 \times$ l'infini lorsque $x=0$, et se transforme en $\frac{-ly}{y^n}$, lorsqu'on fait $x=\frac{1}{y}$, est réellement nulle dans ce cas, si l'exposant n est positif, et infinie dans le cas contraire.

Il est à propos d'observer que la fonction $x^n(lx)^r$ rentre dans les précédentes; car en extrayant la racine du degré r, elle devient $x^{\frac{n}{r}}lx$, et sa valeur sera de la même nature que celle de sa racine. Si les logarithmes n'étaient pas népériens, il n'y aurait qu'à multiplier par le module, ce qui ne changerait pas la nature des résultats

151. Ceci sert à trouver ce que deviennent les coefficiens différentiels d'une fonction contenant des logarithmes, lorsqu'une valeur particulière de x fait anéantir la quantité comprise sous la caractéristique l. Le développement du second état de la fonction contient des termes affectés du logarithme de l'accroissement de la variable indépendante ; ces termes, de la forme $h^n(lh)^r$, seront nuls ou infinis, selon que n sera positive ou négative, quelle que soit d'ailleurs x. Les différentiations relatives à h diminuant l'exposant du facteur h^n, il suit du n° 138, que les coefficiens différentiels relatifs à x, à partir d'un ordre plus ou moins élevé, suivant la grandeur de n, deviendront infinis. Soit pour exemple la fonction

$$u=\sqrt{x}+(x-a)^2 l(x-a).$$

La supposition de $x=a+h$ donnant

$$u'=\sqrt{a+h}+h^2 1 h,$$

il faut par conséquent deux différentiations pour faire disparaître h^2; c'est donc à partir du troisième ordre, que les coefficiens différentiels deviendront infinis, et on a en effet les expressions

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x-a)1(x-a) + x-a,\\ \frac{d^2u}{dx^2} &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + 2 1(x-a) + 3,\\ \frac{d^3u}{dx^3} &= \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} + \frac{2}{x-a},\end{aligned}$$

dont la dernière devient infinie par la supposition de $x=a$.

La fonction $(x-a)^n[1(x-a)]^r$ se comporte, dans la différentiation, comme un radical, puisque la quantité $x-a$ passe au dénominateur, et cela paraît assez simple quand on se rappelle la formule

$$1a=m1e(\sqrt[m]{a}-1)\ (Int.,\ 25),$$

qui exprime d'autant plus exactement la valeur de $1a$ que m est plus grand; car en écrivant $x-a$ à la place de a, il vient

$$1(x-a)=m1e(\sqrt[m]{x-a}-1),$$

d'où l'on voit que le logarithme peut être considéré comme contenant dans son expression, la limite des racines de degrés de plus en plus élevés, ou celle des puissances dont l'exposant est de plus en plus petit, limite que M. Lagrange appelle *puissance infinitième*. Différentiant en effet cette expression, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d.1(x-a)}{dx}=\frac{m1e\,d.\sqrt[m]{x-a}}{dx}&=1e(x-a)^{\frac{1}{m}-1}\\ &=\frac{1e}{(x-a)}(x-a)^{\frac{1}{m}};\end{aligned}$$

or plus m est grand, plus $(x-a)^{\frac{1}{m}}$ approche de $(x-a)^0$, ou de 1, et la limite est par conséquent $\frac{1e}{x-a}$, comme on le conclurait du n° 13.

152. Pour mieux fixer l'attention du lecteur sur les propositions et les règles énoncées dans les articlès précédens, nous allons en faire la récapitulation.

1°. Toute fonction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, lorsqu'on donne une certaine valeur particulière à la variable dont elle dépend, a toujours une valeur déterminée, soit nulle, soit finie, soit infinie.

Cependant il y a des quantités exprimées par $\frac{0}{0}$, qui sont réellement indéterminées. Si on avait, par exemple, les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{on en tirerait,}\\ \text{comme on sait,}\end{array} \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \\ y = \dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \end{array}\right.$$

ces valeurs deviendraient $\frac{0}{0}$, en y faisant $a'=am$, $b'=bm$, $c'=cm$, et dans ce cas la question serait réellement indéterminée, puisque la seconde équation se changeant en $max+mby=cm$, ne dit rien de plus que la première. Nous avons pareillement rencontré dans le n° 67 deux résultats indéterminés; mais dans l'une et l'autre circonstance les fonctions ne deviennent $\frac{0}{0}$, que parce que plusieurs quantités prennent à-la-fois des valeurs particulières. (Voyez plus bas, n° 153.)

2°. Dans tous les cas où la fonction dont on cherche la vraie valeur ne renferme point de radicaux, ou bien lorsque les quantités placées sous ces signes ne s'évanouissent pas, ensorte qu'aucune irrationnalité ne disparaît, on peut se servir de la règle du n° 144. Dans le cas contraire, il faut employer celle du n° 147.

En terminant cet article, je préviendrai ceux de mes lecteurs qui pourraient voir ce sujet pour la première fois, que les faits analytiques exposés dans les n°s 132, 134, peuvent se peindre par les lignes courbes, et qu'ils se rapportent à certaines circonstances de leur forme. Ces rapprochemens, qui jetteront un grand jour sur tout ce qui a été dit jusqu'à présent, seront développés avec soin dans le chapitre IV.

153. Les circonstances qui rendent $\frac{0}{0}$ les fonctions d'une seule variable, peuvent se présenter dans les fonctions qui dépendent de plu-

sieurs ; mais en outre ces dernières fonctions offrent à cet égard de nouvelles particularités, trop remarquables pour les passer sous silence.

Une fonction de deux variables, par exemple, peut devenir $\frac{0}{0}$ de plusieurs manières : 1°. lorsqu'une des variables restant indéterminée, l'autre prend une valeur particulière ; 2°. lorsqu'elles reçoivent chacune une détermination propre.

Soit $z=\frac{c(x^2-a^2)}{y(x-a)+(x-a)^2}$; en faisant $x=a$, on aura $z=\frac{0}{0}$, quel que soit y; mais en supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, la fonction se réduit à $z=\frac{c(x+a)}{y+x-a}$, qui devient $z=\frac{2ac}{y}$. Ce cas est très-simple; toutes les fois qu'il a lieu, l'application des règles des nos 144, 147, conduit à un résultat déterminé par rapport à x, et qui ne dépend plus que de la valeur de y.

Il n'en serait pas de même si on avait $z=\frac{c(x-a)}{y-b}$. Cette fonction, qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$, et $y=b$, est réellement indéterminée; pour s'en convaincre on fera $y-b=m(x-a)$, ce qui est permis, puisque y et x sont indéterminés; il résultera de cette supposition $z=\frac{c}{m}$, quantité susceptible de toutes les valeurs possibles, à raison de celles qu'on peut donner à m: on aurait pu prévoir ce résultat, puisque la fonction z ne dépend uniquement que du rapport des quantités $x-a$ et $y-b$. Si on se contentait de faire $x=a$ ou $y=b$, elle deviendrait nulle dans le premier cas, et infinie dans le second.

Il arrive aussi quelquefois que toutes les valeurs que la fonction proposée peut avoir dans un cas particulier, quoiqu'infinies en nombre, sont comprises entre certaines limites : c'est ce qui arrive à la fonction $z=\frac{c(x-a)(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$, lorsque $x=a$ et $y=b$. En faisant $y-b=m(x-a)$, on aura $z=\frac{cm}{1+m^2}=\frac{c}{\frac{1}{m}+m}$; il est aisé de remarquer que la supposition de $m=1$ donnera la plus grande valeur que puisse avoir z, et que par conséquent cette fonction sera toujours comprise entre les limites $\frac{c}{2}$ et $-\frac{c}{2}$, qu'on obtient lorsqu'on met $+1$ et -1 à la place de m. Ces résultats, faciles à saisir en eux-mêmes, seront encore vérifiés dans la suite, par des applications géométriques.

Prenons l'exemple plus général $z=\frac{(x-a)^m+c(y-b)^n}{(x-a)^{m'}+c'(y-b)^{n'}}$: lorsque $x=a$ et $y=b$, z devient $\frac{0}{0}$; et en écrivant $a+h$ et $b+k$ au lieu de x et de y, il en résulte $z=\frac{h^m+ck^n}{h^{m'}+c'k^{n'}}$, expression de laquelle on ne peut rien conclure à l'égard de z, tant que les quantités h et k demeureront indépendantes l'une de l'autre. Si on fait $k=Ah^{\alpha}$, α étant un nombre positif, afin que k et h puissent s'évanouir en même temps, on trouvera $z=\frac{h^m+cA^nh^{\alpha n}}{h^{m'}+c'A^{n'}h^{\alpha n'}}$, et suivant les diverses hypothèses qu'on fera sur α, on obtiendra pour z, dans le cas de $h=0$, des valeurs soit nulles, soit finies, soit infinies.

Considérons en dernier lieu la fonction

$$z=\frac{(x-y)a^n-(a-y)x^n+(a-x)y^n}{(x-y)(a-y)(a-x)},$$

que la supposition de $x=y=a$ rend $\frac{0}{0}$: substituons $a+h$ et $a+k$ au lieu de x et de y respectivement, nous aurons

$$z=\frac{(h-k)a^n+k(a+h)^n-h(a+k)^n}{(h-k)hk};$$

en développant les puissances indiquées, faisant les réductions et effectuant la division par $(h-k)hk$,

$$z=\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(h+k)+\text{etc.}$$

Cette expression ne renfermant plus que des termes dégagés des quantités h et k, ou susceptibles de devenir nuls, en même temps qu'elles, donnera une valeur déterminée de la fonction proposée; et en faisant h et k égaux à zéro, on obtiendra $z=\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}$. J'observerai qu'on parviendrait aussi à cette valeur, en traitant d'abord la fonction proposée comme ne renfermant que la seule variable x, et cherchant par la règle du n° 144, ce qu'elle devient lorsqu'on suppose $x=y$; puis en différentiant deux fois de suite le numérateur et le dénominateur du résultat, pour obtenir sa vraie valeur, lorsque $y=a$. Ces divers exemples suffisent pour préparer le lecteur aux difficultés du même genre, qu'il pourrait rencontrer par la suite, et pour le mettre sur la voie de leur solution.

Des *maximums* et des *minimums* des fonctions d'une seule variable (*).

154. La recherche des plus grandes et des moindres valeurs dont est susceptible une fonction donnée, forme une des plus importantes applications analytiques du Calcul différentiel ; en voici les principes :

Lorsque la variable de laquelle dépend une fonction proposée, passe successivement par tous les degrés de grandeur, il peut arriver que la série des valeurs que reçoit cette fonction, d'abord croissante, devienne ensuite décroissante ; et alors il y aura une de ces valeurs qui surpassera toutes les autres. Si au contraire la série des valeurs de la fonction proposée est d'abord décroissante, et devient ensuite croissante, on en rencontrera nécessairement une qui sera moindre que toutes les autres. Le terme où l'accroissement d'une fonction s'arrête, s'appelle *maximum*, et celui où elle cesse de décroître, *minimum*.

Prenons pour exemple la fonction $y=b-(x-a)^2$: en faisant $x=0$, on a $y=b-a^2$, et la quantité $(x-a)^2$ venant à décroître lorsque x augmente, y augmente aussi, jusqu'à ce qu'on ait $x=a$, d'où il résulte $y=b$ pour le maximum ; mais passé ce terme, quoique x prenne de nouveaux accroissemens, y décroît, et devient nul, quand $(x-a)^2=b$. La marche de la fonction proposée est facile à suivre ; et on peut d'ailleurs vérifier que la plus grande valeur de y répond à $x=a$, en substituant successivement $a+\delta$ et $a-\delta$ au lieu de x : on trouvera dans l'un et l'autre cas un résultat $y=b-\delta^2$ toujours moindre que b.

Soit encore $y=b+(x-a)^2$. Dans cet exemple, x étant nul, on a $y=b+a^2$; puis à mesure que x augmente, la quantité $(x-a)^2$ va en diminuant ainsi que y, jusqu'à ce que $x=a$, d'où il résulte $y=b$: passé ce terme, $(x-a)^2$ augmente, et il en est de même de y, dont le minimum répond par conséquent à la supposition de $x=a$.

Toute fonction qui croît et décroît sans cesse, lorsque la variable dont elle dépend croît, n'est susceptible ni de maximum, ni de minimum ;

(*) Les mots *maximum* et *minimum*, ayant passé du latin dans la langue française, ne doivent plus se décliner que par les articles ; c'est pourquoi je n'écrirai pas les *maxima*, les *minima*, les questions *de maximis* et *de minimis* ; seulement pour indiquer le pluriel, je mettrai les *maximums*, les *minimums*, puisqu'on écrit déjà les *factums*.

puisqu'à une valeur quelconque il en succède toujours une plus grande ou une moindre.

Le caractère essentiel du maximum *consiste en ce qu'il surpasse en même temps les valeurs qui le précèdent et celles qui le suivent immédiatement; le contraire a lieu pour le* minimum : *il est moindre que les valeurs qui le précèdent et que celles qui le suivent immédiatement.*

J'ai dit *immédiatement*, parce qu'il arrive souvent qu'une fonction a des valeurs qui surpassent son maximum, ou qui sont moindres que son minimum, ou enfin qu'elle a plusieurs maximums et plusieurs minimums inégaux entre eux : tout cela est aisé à concevoir; car si après avoir crû et décrû, par exemple, cette fonction vient à croître de nouveau et indéfiniment, elle finira par surpasser le maximum qu'elle a eu d'abord.

Au lieu de supposer qu'elle croisse indéfiniment, nous pouvons imaginer qu'elle décroisse après un certain terme, et de là naîtra un nouveau maximum qui pourra être différent du premier : on verra sans peine ce qui doit arriver lorsque ces changemens se répètent et varient dans leurs quantités respectives.

155. La méthode qui se présente d'abord pour découvrir les maximums et les minimums des fonctions d'une seule variable, consiste à comparer à la valeur de la fonction supposée avoir atteint son maximum ou son minimum, la valeur qui suit et celle qui précède cet état. Soit u la fonction proposée, x la variable dont elle dépend, et soit a la valeur de x qui rend u maximum ou minimum; comme il s'agit ici d'une valeur déterminée de x, je supposerai, pour plus de généralité, que le développement du second état de u, correspondant à $x=a+h$, a été formé immédiatement, et j'écrirai

$$u' = u + Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + \text{etc.};$$

les exposans α, β, γ, etc. étant entiers ou fractionnaires, mais rangés suivant l'ordre de leur grandeur, en commençant par le plus petit.

Cela posé, l'état de u, correspondant à $x=a-h$, se déduira de u', en écrivant $-h$ au lieu de h; et en le désignant par $u_{,}$, on aura

$$u_{,} = u + P(-h)^{\alpha} + Q(-h)^{\beta} + R(-h)^{\gamma} + \text{etc.};$$

d'où il suit que les différences entre l'état primitif u, et les états précédens et suivans, seront

$$u - u_{,} = - P(-h)^{\alpha} - Q(-h)^{\beta} - R(-h)^{\gamma} - \text{etc.}$$
$$u - u' = - Ph^{\alpha} - Qh^{\beta} - Rh^{\gamma} - \text{etc.},$$

et devront être de même signe, si u est à son maximum ou à son minimum, puisque dans le premier cas on a en même temps

$$u > u', \quad u > u_{,},$$

et dans le second,

$$u < u', \quad u < u_{,};$$

mais comme il faut que les valeurs $u_{,}$ et u' soient immédiatement consécutives à u (154), la subordination marquée ci-dessus doit demeurer vraie, quelque petite que soit la quantité h; et dans ce cas le signe de chaque série dépend de celui de son premier terme, qui contient la puissance de h du degré le moins élevé, parce qu'on peut le rendre plus considérable que le reste de la série (*). Dans cette hypothèse, la condition du maximum ou du minimum exige donc que les quantités $P(-h)^{\alpha}$ et Ph^{α} soient de même signe; et le coefficient P étant une fonction de a qui ne change point, il faut que la puissance α de h ne change pas de signe, c'est-à-dire soit un nombre pair ou une fraction qui, réduite à sa plus simple expression, soit de numérateur pair. Dans l'un et l'autre de ces cas, on aura

$$u - u_{,} = - Ph^{\alpha} - \text{etc.},$$
$$u - u' = - Ph^{\alpha} - \text{etc.}:$$

si P a par lui-même le signe $+$, ces deux différences seront négatives,

---

(*) Si on avait quelque peine à concevoir cette assertion, il faudrait observer que d'après son origine, la série $Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + \text{etc.}$, doit s'anéantir quand $h=0$, et qu'en l'écrivant ainsi :

$$h^{\alpha}\{P + Qh^{\beta-\alpha} + Rh^{\gamma-\alpha} + \text{etc.}\},$$

la partie $Qh^{\beta-\alpha} + Rh^{\gamma-\alpha} + \text{etc.}$ s'anéantissant lorsque $h=0$, et étant soumise dans son décroissement à la loi de continuité, passe successivement par tous les degrés possibles de petitesse ; elle peut donc devenir moindre que P, dont la valeur reste la même, quelle que soit h.

et u sera un minimum; si P a le signe —, ces mêmes différences seront positives, et u sera un maximum.

156. Pour appliquer la remarque précédente à la détermination qui nous occupe, il faut distinguer deux cas, savoir: lorsque les exposans α, β, γ, etc. sont entiers, et lorsqu'ils sont fractionnaires.

Dans le premier cas, la série $Ph^{\alpha}+$ etc. est celle que fournit le théorème de Taylor, lorsqu'on fait $x=a$; ensorte que

$$P=\frac{1}{1.2\ldots\alpha}\frac{d^{\alpha}u}{dx^{\alpha}};$$

et puisque l'exposant α doit être un nombre pair quand u est un maximum ou un minimum, il faut d'abord que la supposition de $x=a$ fasse évanouir le coefficient différentiel $\frac{du}{dx}$, qui est d'ordre impair; ainsi la première condition que doit remplir la valeur a, est de vérifier l'équation $\frac{du}{dx}=0$; elle doit donc faire partie des racines de cette équation. Il faut en outre qu'elle ne fasse pas évanouir $\frac{d^2u}{dx^2}$, ou si cela arrive, que $\frac{d^3u}{dx^3}$ disparaisse aussi, mais non pas $\frac{d^4u}{dx^4}$, et en général que le premier des coefficiens différentiels qu'elle ne fait pas évanouir soit d'ordre pair: elle rendra alors u maximum, si ce dernier coefficient est négatif, et minimum dans le cas contraire.

157. Cherchons, suivant ce qui vient d'être dit, quels peuvent être les maximums et les minimums de la fonction $u=b+c(x-a)^n$, n désignant un nombre entier. En la différentiant, et posant l'équation

$$\frac{du}{dx}=nc(x-a)^{n-1}=0,$$

on en déduit $x=a$, valeur qui fait disparaître tous les coefficiens différentiels, jusqu'à celui de l'ordre n exclusivement; il suit donc de là que si n est impaire, la fonction proposée n'aura ni maximum, ni minimum; mais si n est paire, la valeur $x=a$ rendra u maximum quand c sera négatif, et minimum quand c sera positif.

Ceci conduit à une remarque assez importante, c'est que lorsque la fonction u est algébrique, rationnelle et entière, ses maximums et ses minimums, quand elle en a, répondent à des valeurs de x qui sont des racines égales et en nombre pair, de l'équation $u=0$. En effet, soit $x=a$ une racine multiple de cette équation, u sera de la forme

$$u = X(x-a)^n,$$

X ne contenant point le facteur $x-a$; il en résultera

$$\frac{du}{dx} = \frac{dX}{dx}(x-a)^n + nX(x-a)^{n-1},$$

expression que la valeur $x=a$ ne peut anéantir qu'autant que $n>1$, et cette même valeur anéantissant aussi les autres coefficiens différentiels, jusqu'à l'ordre n exclusivement (91), rendra, comme ci-dessus, u maximum ou minimum, quand n sera paire.

158. Il faut observer ici que le Calcul différentiel fournit lui-même le moyen de reconnaître si l'équation $u=0$ a des racines égales, puisqu'on vient de voir que, dans ce cas seulement, les fonctions u et $\frac{du}{dx}$ ont pour facteur commun la fonction $(x-a)^{n-1}$, contenant les facteurs égaux élevés à une puissance moindre d'une unité que dans la proposée : on trouverait donc ce facteur, en cherchant le plus grand commun diviseur des quantités u et $\frac{du}{dx}$.

La présence du facteur $x-a$ dans tous les coefficiens différentiels, jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, montre aussi que les équations

$$u=0, \quad \frac{du}{dx}=0, \quad \frac{d^2u}{dx^2}=0, \ldots \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}=0,$$

auront lieu en même temps par la racine $x=a$; et il est aisé de voir que ces équations sont celles qui ont été indiquées pour la même circonstance, dans mes *Élémens d'Algèbre*.

Si l'équation proposée contenait plusieurs groupes de racines égales, elle serait de la forme

$$u = X(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots;$$

on aurait alors

$$\frac{du}{dx}=\frac{dX}{dx}(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots+nX(x-a)^{n-1}(x-b)^p\ (x-c)^q\ldots$$
$$+pX(x-a)^n\ (x-b)^{p-1}(x-c)^q\ldots$$
$$+qX(x-a)^n\ (x-b)^p\ (x-c)^{q-1}\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où il suit encore que la fonction

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots\ldots,$$

qui renferme les facteurs égaux élevés à une puissance moindre d'une unité que dans la proposée, est le plus grand commun diviseur des fonctions u et $\frac{du}{dx}$; et l'on voit ensuite que chacune des racines a, b, c, etc., vérifie, outre l'équation proposée $u=0$, un nombre de ses différentielles égal à l'exposant du degré de multiplicité de cette racine, diminué de l'unité.

159. Revenons à la théorie des maximums et des minimums (155); et occupons-nous du cas où le développement $u'=Ph^{\alpha}+$ etc. devant contenir des exposans fractionnaires, ne peut être tiré immédiatement du théorème de Taylor. La considération des coefficiens différentiels est néanmoins suffisante pour faire trouver dans ce cas les maximums et les minimums, lorsqu'il y en a.

En effet, si $\alpha=1$, on a encore $P=\frac{du}{dx}$; et le raisonnement du n° 155, subsistant toujours, fait voir que P doit être nul.

Si $\alpha>1$, la valeur $x=a$, qui donne au développement ci-dessus sa forme particulière, doit anéantir tous les coefficiens différentiels des ordres dont l'exposant est $<\alpha$ (133); donc l'équation $\frac{du}{dx}=0$ indiquera encore cette valeur $x=a$; mais pour s'assurer si elle donne un maximum ou un minimum, il pourra être nécessaire de calculer *à priori* les différences $u-u_{,}$ et $u-u'$, dans la supposition de h très-petite: la fonction u sera maximum, si ces différences sont toutes deux positives, minimum, si elles sont négatives; et il n'y aura ni maximum ni minimum, si elles sont de signes différens.

Enfin, quand $\alpha<1$, $\frac{du}{dx}$ devenant infini, c'est alors l'équation

$$\frac{1}{\frac{du}{dx}}=0$$

qui indique la valeur $x=a$, dont la propriété se discute comme il vient d'être dit pour le cas où $a>1$. On voit par là que *pour embrasser les différens cas de la détermination des valeurs de* x *qui peuvent rendre la fonction* u *maximum ou minimum, il faut examiner toutes les valeurs de* x *qui rendent* $\frac{du}{dx}$ *nul ou infini.*

La fonction $u=b+c(x-a)^{\frac{2}{3}}$ offre un exemple du dernier cas; on en tire

$$\frac{du}{dx}=\frac{2}{3}c(x-a)^{-\frac{1}{3}},$$

expression qui devient infinie lorsque $x=a$; et en faisant

$$x=a-h \quad \text{et} \quad x=a+h,$$

on a
$$u_{,}=b+ch^{\frac{2}{3}}, \qquad u'=b+ch^{\frac{2}{3}},$$

d'où il résulte que les différences $u-u_{,}$ et $u-u'$ sont du même signe que c: la valeur de $x=a$ rend donc u maximum quand c est négatif, et minimum dans le cas contraire.

La fonction $u=b+c(x-a)^{\frac{2p}{2q+1}}$, p et q étant des nombres entiers quelconques, fournit un exemple très-étendu des cas que nous examinons en ce moment : la valeur $x=a$ s'obtiendra en faisant nul ou infini le coefficient différentiel $\frac{du}{dx}$, selon que $2p$ sera $>$ ou $<$ que $2q+1$; et quoique, relativement aux circonstances géométriques, comme on le verra dans le chapitre suivant, la valeur de la fonction u correspondante à $x=a$, jouisse de propriétés différentes dans l'un ou l'autre de ces cas, elle n'en doit pas moins être rangée au nombre des maximums et des minimums dans les recherches purement analytiques, puisqu'elle remplit strictement la condition énoncée dans la définition donnée page 361.

Je ferai remarquer que l'on rendrait les règles du n° 156 applicables à la fonction $u=b+c(x-a)^{\frac{2p}{2q+1}}$, en faisant $x-a=z^{2q+1}$, ce qui donnerait $u=b+cz^{2p}$: on en déduirait $z=0$, d'où $x=a$; et de plus, l'examen des coefficiens différentiels exprimés en z, ferait connaître quand u doit être maximum ou minimum. La même chose aura lieu toutes les fois qu'on transformera la variable x de manière à empêcher les coefficiens différentiels de u de devenir infinis (141).

160. La distinction des cas où le développement de u' peut se déduire ou non du théorème de Taylor, n'étant nécessaire qu'à cause que l'on a considéré une valeur particulière de x, peut s'éviter en faisant attention que le passage d'une fonction par son maximum ou par son minimum, est toujours marqué par le changement de signe de sa différence (154), puisque de croissante qu'était cette fonction, elle devient décroissante après le maximum, ou *vice versâ*, après le minimum. Au lieu donc de prendre pour terme de comparaison la valeur de u qui répond au maximum et au minimum, il n'y a qu'à chercher comment l'expression

$$\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

peut changer de signe, en supposant toutefois que h puisse être prise aussi petite que l'on voudra, afin de ne point embrasser plusieurs maximums ou minimums (154).

Dans cette hypothèse, on peut toujours concevoir h telle, qu'un terme quelconque de la série ci-dessus soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent, et on verra plus loin le moyen d'assigner les limites de cette somme : alors le signe de toute la série dépendra donc de son premier terme, qui sera toujours $\frac{du}{dx}$, puisqu'on ne considère pas une valeur particulière de x, mais un espace qui, quelque petit qu'il soit, en comprend une infinité pour lesquelles les coefficiens différentiels ne sauraient devenir nuls ou infinis.

Il suit de là qu'avant ou après un maximum ou un minimum, le coefficient différentiel $\frac{du}{dx}$ a nécessairement des signes contraires, et qu'il change par conséquent de signe au passage ; or une fonction ne change de signe qu'en devenant o, si elle est entière, et o ou infinie, si elle est fractionnaire, et selon que son numérateur ou son dénominateur s'évanouit : il faut donc qu'au maximum et au minimum de u, le coefficient différentiel $\frac{du}{dx}$ soit nul ou infini. Toute valeur qui remplit cette condition peut rendre u maximum ou minimum ; mais pour s'assurer qu'elle le rend en effet tel, il faut constater qu'en faisant $x>a$ et $x<a$, l'expression de $\frac{du}{dx}$ change de signe, quelque petite qu'on suppose la différence entre a et les nouvelles valeurs de x.

Soit, par exemple, $u=b+c(x-a)^n$, il vient

$$\frac{du}{dx}=nc(x-a)^{n-1};$$

la valeur de $x=a$ rendra $\frac{du}{dx}$ nul ou infini, selon la nature de l'exposant n. Si l'on fait ensuite $x=b$, on obtiendra

$$\frac{du}{dx}=nc(b-a)^{n-1},$$

valeur qui changera de signe en même temps que $b-a$, si $n-1$ est un nombre impair, ou une fraction de numérateur et de dénominateur impairs: il y aura, dans l'un et l'autre de ces cas, maximum quand c sera négatif, minimum quand il sera positif. Il n'y aurait ni l'un ni l'autre, si $n-1$ était un nombre pair ou une fraction de dénominateur pair; et la supposition de $b<a$ rendrait $\frac{du}{dx}$ imaginaire, si $n-1$ était une fraction de numérateur impair et de dénominateur pair. Il est aisé de voir que ces conséquences s'accordent avec ce qui a été dit plus haut (page 363).

Ce procédé mérite donc une attention particulière, tant par sa généralité et sa simplicité, que parce qu'il n'emprunte le secours d'aucune considération étrangère au Calcul différentiel; et j'ai lieu de croire que son exposition, jointe à ce qui précède, ne laisse rien à desirer sur la théorie analytique des maximums et des minimums, qui ne me paraît pas avoir été traitée jusqu'ici d'une manière aussi complète et aussi rigoureuse que je viens de le faire.

La recherche des maximums et des minimums donne lieu à une foule de questions très-curieuses, soit par leur énoncé, qui se rapporte très-souvent à la Physique, soit par leurs solutions, qui présentent des singularités remarquables. Il n'entre point dans le plan de cet Ouvrage, consacré à l'Analyse et à la Géométrie transcendante pures, de rapporter beaucoup de ces questions, dans lesquelles la partie la plus difficile n'est pas l'application du Calcul différentiel, mais l'expression analytique de la fonction qui répond à l'énoncé, ou en quelque sorte la mise en équation du problème; je me bornerai, en conséquence, au petit nombre d'exemples qui vont suivre.

161. Supposons d'abord qu'il s'agisse de *partager une quantité* a *en*

deux parties, de manière que le produit de la puissance m *de la première par la puissance* n *de la seconde, soit le plus grand de tous les produits semblables qu'on pourrait former.*

Soit x une des parties de a; l'autre sera $a-x$, et le produit dont on cherche le maximum, étant représenté par y, on aura $y=x^m(a-x)^n$, d'où on tirera

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}=[ma-mx-nx]x^{m-1}(a-x)^{n-1}:$$

en égalant à zéro chacun des facteurs de ce résultat, on trouvera

$$x=\frac{ma}{m+n},\quad x=0,\quad x=a.$$

La première de ces valeurs répond à un maximum, car lorsqu'on la substitue dans l'expression générale de $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, elle donne la quantité négative $-\frac{m^{m-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}$: les deux autres répondront à des minimums, lorsque m et n seront paires, comme on peut s'en assurer par l'examen des coefficiens différentiels, ou plus simplement encore, en faisant $x=\pm h$ et $x=a\pm h$. On trouvera toujours un résultat positif dans l'un et l'autre cas, quel que soit le signe qu'on donne à h, ce qui prouve que la fonction proposée, après avoir décrû jusqu'à devenir nulle, ne passe point au négatif, mais qu'elle recommence à croître.

162. Donnons quelques exemples de fonctions logarithmiques.

Soit d'abord $u=\frac{\mathrm{l}x}{x^n}$, dont nous nous sommes occupés n° 150; en ayant égard au module, dans la différentiation, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{Mx^{n-1}-nx^{n-1}\mathrm{l}x}{x^{2n}}=\frac{M-n\mathrm{l}x}{x^{n+1}},$$

et par conséquent

$$\mathrm{l}x=\frac{M}{n}.$$

En cherchant $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$, j'observe qu'il est inutile de différentier le dénominateur de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, parce qu'il serait multiplié par le numérateur annullé par l'équation ci-dessus, et j'obtiens $-\frac{nM}{x^{n+2}}$, résultat négatif qui montre que la valeur de x donne u maximum. Si on prenait $M=1$, on aurait $lx=\frac{1}{n}$, et $x=e^{\frac{1}{n}}$.

Lorsqu'on fait $n=1$, on a seulement $lx=M$. C'est donc une propriété du module, d'indiquer celui de tous les logarithmes qui, divisé par le nombre auquel il appartient, donne le plus grand quotient. Quand $M=1$, ou pour le système népérien, le nombre est e, ou 2,7182818, etc.

Je n'examine point la valeur $x=0$, donnée par la supposition de $\frac{du}{dx}$ infini : on a déjà vu (150) ce que signifie, dans ce cas, $\frac{lx}{x^n}$.

La fonction $u=\sqrt[x]{x}$, ou $u=x^{\frac{1}{x}}$, jouit, par rapport à son minimum, d'une propriété assez remarquable. On a pour cette fonction

$$lu=\frac{1}{x}lx, \quad \frac{du}{u}=\frac{Mdx-dx\,lx}{x^2},$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x^2}(M-lx).$$

Je considère d'abord le facteur $M-lx$, qui donne

$$lx=M;$$

et en différentiant par rapport à ce facteur seulement, j'obtiens

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{u}{x^3}.M,$$

valeur qui indique encore un maximum.

Quant au facteur $\frac{u}{x^2}=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, il revient à $\frac{1}{x^{2-\frac{1}{x}}}$, et sous cette forme on voit qu'il diminue sans cesse, à mesure que x augmente, et ne devient nul que quand x est infini.

La seconde question de cet article rentre, au fond, dans la première; car les logarithmes croissant avec les nombres, u doit arriver au maximum en même temps que lu, et dans le second cas, l'expression de lu est comprise dans $\frac{lx}{x^n}$. En prenant $M=1$, on a, de même que ci-dessus, $x=e$, ce qui donne encore une propriété de la base du système des logarithmes népériens.

163. Je passe aux fonctions implicites; et considérant y donné par

l'équation

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0,$$

dont la différentielle est

$$(y - mx)dy - (my - x)dx = 0,$$

il viendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

d'où on tirera d'abord

$$my - x = 0.$$

Pour obtenir la valeur de x, il faudra combiner cette dernière équation avec la proposée; on aura par ce moyen

$$y = \frac{x}{m}, \qquad \frac{x^2}{m^2} - x^2 - a^2 = 0,$$

d'où il résulte

$$x = \frac{ma}{\sqrt{1 - m^2}}, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

Il reste à examiner ce que devient le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$; la différentielle seconde de l'équation proposée donne la suivante:

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

que la supposition de $\frac{dy}{dx} = 0$ réduit à

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0,$$

et de laquelle on tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-m}{x(1 - m^2)},$$

en mettant pour y sa valeur en x. Il faut encore substituer celle de x, et en le faisant on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\sqrt{1 - m^2}}:$$

ce résultat étant négatif, montre que la valeur de y, déterminée ci-dessus, est un maximum.

En égalant à zéro le dénominateur de $\frac{dy}{dx}$, pour rendre infini ce coefficient différentiel, on trouve $y=mx$, relation qui rend aussi infinis $\frac{d^2y}{dx^2}$ et tous les autres coefficiens différentiels. Elle conduit à

$$x=\frac{a}{\sqrt{1-m^2}},\quad y=\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}};$$

ces valeurs étant conformes aux précédentes, en changeant x en y, et réciproquement, indiquent un maximum de x, qui se présente ainsi, parce que l'équation proposée est symétrique par rapport à ses deux variables.

164. Proposons-nous encore de *trouver le maximum et le minimum de la fonction* y, *donnée par l'équation* $x^3-3axy+y^3=0$.

Dans cet exemple y ayant trois valeurs en x, doit être regardé comme représentant trois fonctions distinctes, mais cependant liées entre elles par le caractère commun aux racines des équations du troisième degré; chacune de ces fonctions a sa marche particulière, et peut être susceptible de maximums et de minimums qui lui soient propres: c'est ce que le calcul va nous faire connaître (*).

On a $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$; faisant $\frac{dy}{dx}=0$, on obtiendra une nouvelle équation $ay-x^2=0$, qu'il faudra combiner avec la proposée pour déterminer x et y, et il en résultera $x^6-2a^3x^3=0$, d'où $x^3=0$, $x^3-2a^3=0$. Lorsqu'on fait $x=0$, il vient $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$; pour savoir donc ce que signifient les trois valeurs de l'équation $x^3=0$, il faut recourir à la différentielle seconde (136)

$$(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}+2y\frac{dy^2}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+2x=0,$$

dont le terme affecté de $\frac{d^2y}{dx^2}$ disparaît par l'évanouissement de y^2-ax. Si l'on fait ensuite $x=0$, avec l'attention de conserver tous les termes

(*) Euler a donné avec raison le nom de *fonctions multiformes*, aux fonctions qui sont susceptibles de plusieurs valeurs pour chacune de celles de la variable dont elles dépendent.

où entre $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$2y\frac{dy^2}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}\left(y\frac{dy}{dx}-a\right)=0.$$

Le premier facteur donne $\frac{dy}{dx}=0$, et le second $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{y}$, c'est-à-dire infini, puisque $y=0$.

Passant ensuite à la différentielle troisième pour trouver $\frac{d^2y}{dx^2}$, on obtient en général l'équation

$$(y^2-ax)\frac{d^3y}{dx^3}+\left(6y\frac{dy}{dx}-3a\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy^3}{dx^3}+2=0,$$

qui, si l'on y fait en même temps

$$x=0, \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0,$$

donne $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{3a}$, et montre qu'une des valeurs de $y=0$, est un véritable minimum; mais si l'on n'y supprime que $\frac{d^3y}{dx^3}$, et qu'on y fasse $\frac{dy}{dx}=p$, on en tire

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2+2p^3}{6yp-3a}=-\frac{\frac{2}{p^3}+2}{\frac{6y}{p^2}-\frac{3a}{p^3}}=\frac{2}{0},$$

lorsqu'on suppose $y=0$ et p infini: ces dernières valeurs rendant infinis les coefficiens différentiels, doivent donc être examinées en déterminant celles qui les précèdent et qui les suivent immédiatement (159). Pour cela, on supposera x égal à une quantité très-petite h, et cherchant le premier terme de la série ascendante qui exprime k, dans l'équation $h^3-3ahk+k^3=0$, on trouvera les trois quantités $\frac{h^2}{3a}$, $+\sqrt{3ah}$ et $-\sqrt{3ah}$, qui répondent aux trois valeurs que doit avoir k. On voit maintenant que, soit qu'on fasse $x=+h$ ou $x=-h$, la première reste positive, et que par conséquent elle a tous les caractères d'un minimum, lorsque $h=0$; il n'en est pas de même des deux autres, qui deviennent imaginaires quand on prend h négativement.

Nous avons encore l'équation $x^3-2a^3=0$, qui donne $x=a\sqrt[3]{2}$ et

$y = a\sqrt[3]{4}$, en vertu de l'équation $ay - x^2 = 0$; si l'on substitue ces valeurs, dans l'expression générale de $\frac{d^2y}{dx^2}$, en observant qu'elles rendent $\frac{dy}{dx}$ nul, on aura $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a}$, ce qui fait voir que la fonction y a un maximum correspondant à $x = a\sqrt[3]{2}$.

Ces exemples suffisant pour montrer comment on doit opérer dans tous les cas, je vais m'occuper des fonctions de plusieurs variables.

Des *maximums* et des *minimums* des fonctions de plusieurs variables.

165. Lorsque la fonction que l'on considère dépend de deux variables, on peut en regarder une comme constante et donner à l'autre une infinité de valeurs, à chacune desquelles il correspondra une ou plusieurs valeurs de la fonction proposée; parmi ces dernières il pourra s'en trouver qui soient des maximums ou des minimums, et rien n'est plus facile que de les déterminer. Puisqu'on ne doit avoir égard qu'à une variable, il suffira d'égaler à zéro le premier coefficient différentiel relatif à cette variable; ainsi u étant une fonction de x et de y, si on suppose y constant, et qu'on fasse $\frac{du}{dx} = 0$, on obtiendra les valeurs de x qui donnent les plus grandes ou les plus petites valeurs de u, parmi toutes celles qui répondent à une même valeur de y. En chassant x de la fonction u, au moyen de l'équation $\frac{du}{dx} = 0$, on obtiendra un résultat que je représenterai par v, et qui, contenant encore la variable y, pourra être susceptible de maximums ou de minimums, que l'équation $\frac{dv}{dy} = 0$, fera connaître. On peut parvenir à une équation équivalente à $\frac{dv}{dy} = 0$, sans qu'il soit besoin d'éliminer x; pour cela il faut observer que l'équation $\frac{du}{dx} = 0$, fournie par la condition du maximum ou du minimum relatif à x, établit une relation entre les variables x et y, ensorte qu'on doit regarder la première comme une fonction de la seconde. En différentiant u dans cette hypothèse, on aura $\frac{1}{dy}du = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dy} + \frac{du}{dy}$, résultat qui se réduit à $\frac{du}{dy} = 0$, puisqu'on a déjà $\frac{du}{dx} = 0$: les plus grandes ou les plus petites de toutes les valeurs de u, c'est-à-dire, ses maximums ou ses minimums absolus, répondront donc à quelques-unes des valeurs de x et de y, données par les équations $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$. En étendant

ces considérations aux fonctions de tant de variables qu'on voudra, on trouvera que *pour obtenir les* maximums *et les* minimums *absolus de ces fonctions, il faut égaler séparément à zéro les coefficiens différentiels du premier ordre, pris par rapport à chacune des variables dont elles dépendent.*

166. La distinction des maximums d'avec les minimums renferme plus de difficulté à l'égard des fonctions de plusieurs variables, que par rapport aux fonctions d'une seule, quoique fondée sur les mêmes principes dans l'un et l'autre cas.

Soit u une fonction contenant un nombre quelconque de variables x, y, z, etc.; si on nomme a, b, c, etc. les valeurs qui répondent à son maximum ou à son minimum, et qu'on représente par A, B, C, D, etc., F, G, H, I, K, L, etc., ce que deviennent u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, etc., $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dxdz}$, $\frac{d^2u}{dydz}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, etc., lorsqu'on y met a au lieu de x, b au lieu de y, c au lieu de z, etc., le résultat de la substitution de $a+h$, $b+k$, $c+l$, etc. dans u sera (38)

$$\begin{aligned}u' = {} & A + Bh + Ck + Dl + \text{etc.}\\ & + \frac{1}{1.2}\{Fh^2 + 2Ghk + Hk^2 + 2Ihl + 2Kkl + Ll^2 + \text{etc.}\}\\ & + \text{etc.},\end{aligned}$$

expression dont la valeur doit être moindre que A, lors du maximum, et plus grande lors du minimum, quels que soient les signes des lettres h, k, l, etc., pourvu qu'elles n'expriment que de petits changemens.

Cela posé, en prenant

$$k = \alpha h, \qquad l = \beta h, \quad \text{etc.},$$

on aura

$$\begin{aligned}u' - A = {} & h\ \{B + C\alpha + D\beta + \text{etc.}\}\\ & + \frac{h^2}{1.2}\{F + 2G\alpha + H\alpha^2 + 2I\beta + 2K\alpha\beta + L\beta^2 + \text{etc.}\}\\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

On voit qu'il est possible de rendre la valeur de l'ensemble des termes de la première ligne plus grande que la somme de tous les autres, en supposant h et par conséquent k, l, etc. d'une petitesse convenable; mais les termes de cette ligne, changeant de signe en même temps que ces quantités, un raisonnement semblable à celui du n° 155, montrera qu'ils doivent être nuls dans le cas du maximum ou du minimum: on aura donc $B=\frac{du}{dx}=0$, $C=\frac{du}{dy}=0$, $D=\frac{du}{dz}=0$, etc., comme il résulte de la règle énoncée dans le n° précédent. Ces conditions étant remplies par les valeurs de a, b, c, etc. déterminées en conséquence, il faudra de plus que les coefficiens F, $G \ldots L$, etc. ne s'évanouissent pas en même temps, et que le signe de la quantité du second ordre, qui forme la deuxième ligne du développement ci-dessus, soit indépendant des rapports qu'on pourrait établir entre h, k, l, etc., et de leurs signes.

On sait, par la théorie des équations algébriques dont tous les termes sont dans un seul membre, que toute expression de leur forme ne peut passer du positif au négatif, sans devenir nulle dans l'intervalle, et que lorsqu'elles n'ont que des racines imaginaires, elles ne changent point de signe, quelque valeur qu'on donne à l'inconnue: il suit de là que si la quantité

$$Fh^2 + 2Ghk + Hk^2 + 2Ihl + 2Kkl + Ll^2 + \text{etc.},$$

égalée à zéro et résolue, comme une équation, par rapport à l'une des indéterminées h, k, l, etc. ne donne que des racines imaginaires, on en pourra conclure qu'elle conservera le même signe, quelles que soient ces indéterminées. Prenant la valeur de h, par exemple, on trouve

$$h=\frac{-(Gk+Il+\text{etc.})\pm\sqrt{-(Hk^2+2Kkl+Ll^2+\text{etc.})F+(Gk+Il+\text{etc.})^2}}{F},$$

résultat qui sera imaginaire, si la quantité comprise sous le radical est négative; mais on peut donner à cette quantité la forme $-(Pk^2+2Qkl+Rl^2+\text{etc.})$ en faisant $FH-G^2=P$, $KF-GI=Q$, $LF-I^2=R$, etc., et pour qu'elle ne change pas de signe, il faudra encore qu'étant égalée à zéro et résolue par rapport à l'une des lettres k, l, etc., elle ait ses racines imaginaires. On en tirera, par ces opérations,

$$k=\frac{-(Ql+\text{etc.})\pm\sqrt{-(Rl^2+\text{etc.})P+(Ql+\text{etc.})^2}}{P};$$

k ne pouvant être imaginaire à moins que la quantité comprise sous le radical ne soit négative, on mettra cette nouvelle quantité sous la forme $-(Tl^2+\text{etc.})$, en faisant $PR-Q^2=T$, etc., pour la traiter de la même manière que les deux précédentes, et on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'avant-dernière des quantités h, k, l, etc. Supposons, pour fixer les idées, qu'il n'y ait que trois variables dans la fonction u, l'opération sera terminée à la valeur de k; et puisque T doit être positif, il faudra qu'on ait $PR - Q^2$, ou $T > 0$. Avec cette condition, la quantité $Pk^2 + 2Qkl + Rl^2$ ne pourra changer de signe; et comme elle se réduit à Pk^2, lorsque $l = 0$, il faudra pour qu'elle soit positive, ainsi que l'exige la nature de la question, qu'on ait aussi $P > 0$, ou $FH - G^2 > 0$. On voit par là que les coefficiens F et H doivent être positifs en même temps, ou négatifs en même temps : dans le premier cas, la quantité $Fh^2 +$ etc. conservant toujours le signe positif qu'elle a, lorsque k, l, etc. sont égaux à zéro, indique un minimum; le maximum aurait lieu dans le second cas où elle serait négative.

Pour se convaincre *à posteriori*, que lorsque les conditions qu'on vient de trouver sont remplies, l'ensemble des termes du second ordre de la série $A + Bh + Ck +$ etc. restera toujours de même signe, quels que soient h, k, l, etc.; il suffira de remarquer que l'équation du second degré dont les racines seraient $t = -\alpha \pm \sqrt{-\beta^2}$, aurait la forme $(t + \alpha)^2 + \beta^2 = 0$, et en représentant par $-Y^2$, $-Z^2$, etc. les quantités qui sont sous les radicaux des valeurs de h, k, etc., on transformera les expressions

$$\left.\begin{array}{l} Fh^2 + 2Gkh \ldots\ldots + Ll^2 + \text{etc.} \\ Pk^2 + 2Qkl + Rl^2 + \text{etc. ou } Y^2 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ en } \left\{\begin{array}{l} F\left\{\left(h + \frac{Gk + Il + \text{etc.}}{F}\right)^2 + \frac{Y^2}{F^2}\right\} \\ P\left\{\left(k + \frac{Ql + \text{etc.}}{P}\right)^2 + \frac{Z^2}{P^2}\right\} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

mettant dans Y^2, pour Z^2 sa valeur $Tl^2 +$ etc., et substituant le résultat dans $F\left[\left(h + \frac{Gk + Il + \text{etc.}}{F}\right)^2 + \frac{Y^2}{F^2}\right]$, il viendra

$$F\left(h + \frac{Gk + Il + \text{etc.}}{F}\right)^2 + \frac{FP}{F^2}\left(k + \frac{Ql + \text{etc.}}{P}\right)^2 + \frac{FPT}{F^2P^2}\left(l + \frac{\text{etc.}}{T}\right)^2 + \text{etc.}$$

On voit bien maintenant que cette expression ne saurait changer de signe, en même temps que h, k, l, etc., et que P et T étant positifs, son signe dépendra de celui de F.

Si u ne contenait que deux variables, les coefficiens $D, \ldots I$, K, L, etc. seraient nuls, et les conditions du maximum et du minimum se réduiraient à $FH - G^2 > 0$. Euler, dans son *Calcul différentiel*, n'indiqua que la nécessité d'avoir F et H positifs ou négatifs en même temps; M. Lagrange montra le premier que cette condition n'était pas suffisante, et on lui doit la théorie que nous venons d'exposer.

Si les coefficiens du second ordre s'anéantissaient en même temps que ceux du premier, il n'y aurait maximum ou minimum qu'autant que les coefficiens du troisième disparaîtraient aussi, et que les termes du quatrième ordre formeraient une quantité dont le signe ne dépendrait aucunement de h, k, l, etc. La considération des facteurs imaginaires que devrait avoir cette quantité pour satisfaire à la condition demandée, mènerait à des résultats analogues aux précédens.

167. On rencontre aussi pour les fonctions de plusieurs variables des maximums et des minimums dans lesquels les coefficiens différentiels prennent des valeurs infinies. Cela arrive, par exemple, à la fonction

$$u = b - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Il est visible que, quelque valeur que l'on donne aux variables indépendantes x et y, on obtiendra pour u des valeurs plus petites que celles qui résultent de la supposition de $x = 0$, $y = 0$: cette dernière valeur $u = b$ est donc un véritable maximum; cependant les coefficiens différentiels

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2x}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{-2y}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

deviennent infinis lorsqu'on y fait $x = 0$, $y = 0$ (142).

Il suit de là, que pour donner à la recherche des maximums et des minimums, par rapport aux fonctions de plusieurs variables, la même généralité qu'à l'égard des fonctions d'une seule, il faudrait ajouter à la règle du n° 165 des remarques analogues à celles du n° 159; mais je ne m'y arrêterai point, n'ayant eu intention que d'indiquer les cas singuliers, semblables au précédent. Je me bornerai à observer que dans ces cas, les maximums et les minimums se reconnaissent, parce que le changement de la fonction proposée, produit par la substitution de $a+h$ et de $b+k$, à la place de x et de y, peut s'exprimer de manière que sa totalité, ou au moins sa partie la plus considérable, ne change pas du signe avec les accroissemens h et k: dans l'exemple ci-dessus, il vient

$$u' - u = -(h^2 + k^2)^{\frac{1}{3}},$$

quantité qui conserve le même signe.

Il faut d'ailleurs remarquer que la possibilité de l'existence du maximum ou du minimum sera toujours indiquée par le calcul différentiel, puisqu'ils ne peuvent avoir lieu que dans une circonstance où les coefficiens différentiels prennent l'une de ces formes 0, $\frac{0}{0}$, ou $\frac{1}{0}$, qui servira d'indice pour examiner plus particulièrement la marche de la fonction proposée.

Dans cette circonstance, et quoi qu'il arrive après la substitution de a, b, c, etc. dans u et dans ses coefficiens différentiels, il faut toujours que les résultats obtenus par la supposition de $x = a \pm h$, $y = b \pm k$, $z = c \pm l$, etc. soient tous moindres ou tous plus grands que celui qui répond à $x = a$, $y = b$, $z = c$, etc.; et les diverses méthodes propres à faire reconnaître si cela a lieu, le seront aussi pour s'assurer de l'existence du maximum ou du minimum.

168. Pour donner un exemple, j'ai choisi la question suivante, analogue à celle du n° 161 : *partager la quantité* a *en trois parties* x, y, $a-x-y$, *telles que le produit* $x^m y^n (a-x-y)^p$ *soit un maximum.*

On a alors

$$u = x^m \; y^n \; (a-x-y)^p$$
$$\frac{du}{dx} = x^{m-1} y^n \; (a-x-y)^{p-1}\{ma - mx - my - px\} = 0$$
$$\frac{du}{dy} = x^m \; y^{n-1} (a-x-y)^{p-1}\{na - nx - ny - py\} = 0;$$

les facteurs $ma - mx - my - px$ et $na - nx - ny - py$, étant égalés à zéro, donnent les équations

$$m(a-x-y) - px = 0,$$
$$n(a-x-y) - py = 0,$$

qui, en éliminant $a-x-y$, conduisent d'abord à

$$mpy - npx = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{nx}{m};$$

et on trouve ensuite

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \quad y = \frac{na}{m+n+p}, \quad a-x-y = \frac{pa}{m+n+p}.$$

Pour savoir si ces valeurs appartiennent en effet à un maximum, on les substituera dans les expressions générales de $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$: en faisant, pour abréger, $m+n+p=q$, on trouvera

$$F = -(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$
$$G = -\frac{mna}{q}\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$
$$H = -(n+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}.$$

Les quantités F et H sont négatives, et on s'assurera sans peine qu'elles remplissent la condition $FH - G^2 > 0$, lorsque les exposans m, n, p sont positifs; ainsi on aura obtenu le maximum demandé.

Des limites de la série de Taylor.

169. La proposition du n° 155, qui sert de fondement à la détermination des maximums et des minimums, et d'autres du même genre, ont fait naître à M. Lagrange l'idée d'assigner des limites entre lesquelles soient comprises les diverses valeurs que prend la série de Taylor, lorsqu'on la commence à l'un quelconque de ses termes. Si, par exemple, on ne veut considérer que les deux premiers termes $u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1}$, il est satisfaisant de connaître des limites entre lesquelles soit comprise la partie

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

dont on ne tient pas compte.

Ces limites se découvriraient très-aisément, si tous les termes de la série étaient de même signe. En effet la série de Taylor, commencée au terme de l'ordre $n+1$, étant

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} + \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}\frac{h^{n+2}}{1.2.3\ldots(n+2)} + \frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}}\frac{h^{n+3}}{1.2.3\ldots(n+3)} + \text{etc.},$$

revient à

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\left\{\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}\frac{h}{n+2} + \frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}}\frac{h^2}{(n+2)(n+3)} + \text{etc.}\right\};$$

et on voit d'abord que la somme de la suite comprise entre les accolades, surpasse son premier terme

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}};$$

puis si l'on représente par $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$, ce que devient la fonction $\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}$, lorsqu'on y change x en $x+h$, on aura

$$\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}=\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}+\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}\frac{h}{1}+\frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.},$$

expression dont chaque terme est évidemment plus grand que celui qui lui correspond dans la série comprise entre les accolades ci-dessus, puisqu'il a des diviseurs moindres : cette série est donc

$$>\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\quad\text{et}\quad<\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}.$$

Il résulte de là que la valeur de la série de Taylor

$$u'=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

considérée dans son entier, sera comprise entre les quantités

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}\ldots\ldots+\frac{d^nu}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)},$$
$$u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}\ldots\ldots+\frac{d^nu}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

Dans cet état de choses, les valeurs de la fonction u et de ses coefficiens différentiels croissant depuis x jusqu'à $x+h$, il s'ensuit que $\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}$ et $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs que le coefficient différentiel de l'ordre $n+1$ prend dans cet intervalle, valeurs desquelles dépendent ainsi les limites de la somme de tous les termes qui suivent celui de l'ordre n.

170. Les considérations précédentes, qui ne laissent rien à desirer du côté de la simplicité, ne pouvant s'appliquer au cas où les signes $+$ et $-$ se combinent d'une manière quelconque dans la série de Taylor, il y a lieu de douter que les limites assignées ci-dessus à la partie de cette série commençant à l'ordre $n+1$, puissent convenir à tous les cas. Pour s'en assurer, M. Lagrange a eu recours à des artifices d'ana-

lyse qui sont très-élégans, mais que je suis forcé de modifier un peu pour ne pas intervertir l'ordre de ce Traité.

Je commencerai par établir comme proposition auxiliaire, que *toute fonction* U *d'une variable* t *qui s'évanouit en même temps que cette variable, et dont le coefficient différentiel du premier ordre, que je désignerai par* U', *ne change pas de signe dans l'intervalle de* t=o *à* t=b, *et ne devient pas infini, est nécessairement de même signe que ce coefficient, si* b *est positif, et de signe contraire si* b *est négatif.* Voici comme cette proposition peut se démontrer :

Si l'on partage l'intervalle b en un nombre n de parties égales, et qu'à

$$t = 0, \quad = \frac{b}{n}, \quad = \frac{2b}{n}, \quad = \frac{3b}{n}, \quad \text{etc.},$$

répondent

$$U = 0, \quad = U_1, \quad = U_2, \quad = U_3, \quad \text{etc.},$$
$$U' = U'_0, \quad = U'_1, \quad = U'_2, \quad = U'_3, \quad \text{etc.},$$

il suit des remarques du n° 17, et de l'hypothèse établie sur le coefficient différentiel U', que

$$U_1 = U'_0 \frac{b}{n} + V_0 \left(\frac{b}{n}\right)^a,$$
$$U_2 - U_1 = U'_1 \frac{b}{n} + V_1 \left(\frac{b}{n}\right)^a,$$
$$U_3 - U_2 = U'_2 \frac{b}{n} + V_2 \left(\frac{b}{n}\right)^a,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$U_n - U_{n-1} = U'_{n-1} \frac{b}{n} + V_{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^a,$$

V_0, V_1, V_2, ... V_{n-1}, étant des quantités que la supposition de $b=0$ ne rend pas infinies, et a étant >1. Cette dernière circonstance permet de rendre le second terme de chacune des expressions ci-dessus aussi petit que l'on voudra, par rapport au premier ; le signe de ces expressions ne dépendra donc que de celui de leur premier terme, et si ce dernier signe est le même dans toutes, il affectera nécessairement leur somme ; or en ajoutant les premiers membres, et effaçant ce qui se détruit, on trouvera que cette somme est égale à U_n, c'est-à-dire à la valeur de U correspondante à b, qui sera par conséquent de même signe que les produits $U'_0 b$, $U'_1 b$, etc., c'est-à-dire de même signe que les quantités U'_0, U'_1, etc. si b est positif, et de signe contraire, si b est négatif.

171. Cela posé, soient m et M des quantités constantes, respectivement plus petites et plus grandes que toutes les valeurs que reçoit, dans l'intervalle de x à $x+h$, la série

$$\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h}{2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.},$$

en donnant à h des valeurs successives commençant par o; on aura, d'après la série de Taylor,

$$u'-u>mh \quad \text{et} \quad u'-u<Mh,$$

ou

$$u'-u-mh>0 \quad \text{et} \quad Mh-(u'-u)>0:$$

mais il est visible que ces quantités peuvent être regardées comme des fonctions de h, qui s'évanouissent quand $h=0$, puisqu'alors $u'=u$; et, sous ce point-de-vue, elles seront de même signe que leur coefficient différentiel du premier ordre, pris par rapport à h, s'il ne change pas de signe et ne devient pas infini pour quelque valeur de h inférieure à celle où l'on s'arrête; or ces coefficiens différentiels, qui sont respectivement

$$\frac{du'}{dh}-m, \quad M-\frac{du'}{dh},$$

demeureront positifs, si l'on prend m moindre que la plus petite des valeurs de $\frac{du'}{dh}$, et M plus forte que la plus grande de ces mêmes valeurs; ce qui s'accorde avec le n° 169, puisque $\frac{du'}{dh}=\frac{du'}{dx}$ (105).

Supposons ensuite que m et M représentent des quantités respectivement plus petites et plus grandes que la série

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h}{3}+\frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^2}{3.4}+\text{etc.};$$

en considérant toute la série de Taylor, on aura

$$u'-u-\frac{du}{dx}\frac{h}{1}>\frac{mh^2}{1.2},$$

$$u'-u-\frac{du}{dx}\frac{h}{1}<\frac{Mh^2}{1.2};$$

et par conséquent les quantités

$$u'-u-\frac{du}{dx}\frac{h}{1}-\frac{mh^2}{1.2}, \quad \frac{Mh^2}{1.2}-\left(u'-u-\frac{du}{dx}\frac{h}{1}\right);$$

qui s'évanouissent quand $h=0$, devront être toutes deux positives. Si l'on en prend les coefficiens différentiels par rapport à h, il viendra

$$\frac{du'}{dh}-\frac{du}{dx}-mh, \qquad Mh-\frac{du'}{dh}+\frac{du}{dx},$$

quantités qui s'évanouissent encore lorsque $h=0$, parce que, dans ce cas,

$$\frac{du'}{dh}=\frac{du'}{dx}=\frac{du}{dx};$$

leur signe sera donc encore le même que celui de leurs coefficiens différentiels, pris par rapport à h. Ces derniers étant

$$\frac{d^2u'}{dh^2}-m, \qquad \text{et} \qquad M-\frac{d^2u'}{dh^2},$$

seront toujours positifs si m est moindre que la plus petite des valeurs de $\frac{d^2u}{dh^2}$, et si M surpasse la plus grande; et comme $\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u'}{dx^2}$ (105); on verra donc encore, dans ce cas, que la série

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h}{3}+\frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^2}{3.4}+\text{etc.}$$

est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $\frac{d^2u'}{dx^2}$.

La marche précédente peut se continuer dans tous les ordres, et je ne ferai qu'indiquer le calcul pour les limites m et M de la série

$$\frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^4u}{dx^4}\frac{h}{4}+\frac{d^5u}{dx^5}\frac{h^2}{4.5}+\text{etc.},$$

en observant qu'il faut différentier trois fois de suite, par rapport à h, les expressions

$$u'-u-\frac{du}{dx}\frac{h}{1}-\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{mh^3}{1.2.3}, \qquad \frac{Mh^3}{1.2.3}-\left(u'-u-\frac{du}{dx}\frac{h}{1}-\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\right),$$

ce qui donne successivement

$$\frac{du'}{dh}-\frac{du}{dx}-\frac{d^2u}{dx^2}h-\frac{mh^2}{1.2}, \qquad \frac{Mh^2}{1.2}-\left(\frac{du'}{dh}-\frac{du}{dx}-\frac{d^2u}{dx^2}h\right),$$

$$\frac{d^2u'}{dh^2}-\frac{d^2u}{dx^2}-mh, \qquad Mh-\left(\frac{d^2u'}{dh^2}-\frac{d^2u}{dx^2}\right),$$

$$\frac{d^3u'}{dh^3}-m, \qquad M-\frac{d^3u'}{dh^3},$$

et en raisonnant comme ci-dessus, on verra que m et M doivent représenter la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{d^3u'}{dx^3}$.

J'ai supposé h positive: si cette quantité était négative, il faudrait prendre les limites dans un ordre inverse; m répondrait à la limite en excès, et M à la limite en défaut.

L'application de cette règle ne présentant aucune difficulté, je me bornerai au premier des exemples donnés par M. Lagrange. Soit $u=x^\mu$; l'expression

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}=\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-n)x^{\mu-n-1}$$

donnera la plus petite valeur de $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$, et

$$\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}=\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-n)(x+h)^{\mu-n-1}$$

sera la plus grande: la valeur de $u'=(x+h)^\mu$, sera donc toujours comprise entre celles des expressions

$$x^\mu+\frac{\mu x^{\mu-1}h}{1}+\frac{\mu(\mu-1)x^{\mu-2}h^2}{1.2}\ldots.+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)\,x^{\mu-n-1}h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)},$$

$$x^\mu+\frac{\mu x^{\mu-1}h}{1}+\frac{\mu(\mu-1)x^{\mu-2}h^2}{1.2}\ldots.+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)(x+h)^{\mu-n-1}h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

Cette remarque peut être utile dans les cas où la série produite par le développement des puissances n'est pas convergente (*Introd.*, 5).

172. Les valeurs de la partie

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}+\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}\,\frac{h}{n+2}+\frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}}\,\frac{h^2}{(n+2)(n+3)}+\text{etc.},$$

devant être comprises entre la plus grande et la plus petite valeur que prend $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$ pour toutes les valeurs que l'on peut donner à h, depuis o jusqu'à celle où l'on s'arrête, il est visible qu'il existe une valeur intermédiaire du même coefficient différentiel, qui est précisément égale à la série ci-dessus, et qu'en la substituant dans la série de Taylor, elle donnerait, par un nombre $n+2$ de termes, la valeur exacte du développement de u'.

Soit U_{n+1} cette valeur de $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$, qui doit être nécessairement finie toutes les fois que le coefficient différentiel dont elle dérive ne devient pas infini pour les valeurs précédentes de h; on aura rigoureusement

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \ldots\ldots + \frac{d^n u}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \frac{U_{n+1}h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

On voit maintenant comment il est possible d'assigner pour h une valeur telle, que le terme $\frac{d^n u}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ surpasse la somme de tous ceux qui doivent le suivre dans la série de Taylor; car les deux derniers termes de l'expression ci-dessus revenant à

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}\left\{\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{U_{n+1}}{(n+1)}h\right\},$$

il suffit, pour remplir le but indiqué, de faire

$$h < \frac{n+1}{U_{n+1}}\frac{d^n u}{dx^n}.$$

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de U_{n+1}; on peut la remplacer par une quantité qui la surpasse, et employer à cet effet la plus grande valeur que prend $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$ dans un intervalle plus étendu que la valeur de h à laquelle on s'arrête.

173. On peut généraliser sans peine les déterminations précédentes, en suivant la marche que nous allons indiquer par rapport aux fonctions de deux variables. Soit u une fonction de x et de y; et faisons pour un moment

$$x = a + ht, \qquad y = b + kt,$$

t étant une nouvelle variable dont u sera par conséquent une fonction implicite: on aura alors

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k;$$

et comme $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont des constantes, on trouvera

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2}\frac{dx^2}{dt^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy^2}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2,$$

etc.;

ensorte que si t se change en $t+\alpha$, on aura les deux développemens identiques,

$$u' = u + \frac{du}{dt}\frac{\alpha}{1} + \frac{d^2u}{dt^2}\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dt^3}\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\begin{aligned} u' = u &+ \frac{\alpha}{1}\left\{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right\} \\ &+ \frac{\alpha^2}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

En arrêtant le premier au terme $\frac{d^nu}{dt^n}\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}$, la somme de tous les termes suivans aura pour limites ce que devient

$$\frac{d^{n+1}u'}{dt^{n+1}}\frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)},$$

lorsqu'on y met successivement pour $\frac{d^{n+1}u'}{dt^{n+1}}$, la plus grande et la plus petite valeur que prend ce coefficient différentiel, depuis $\alpha = 0$ jusqu'à la valeur où l'on s'arrête. Il suit de là qu'en poussant le second développement jusqu'aux termes

$$\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\left\{\frac{d^nu}{dx^n}h^n + n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k \ldots\ldots + \frac{d^nu}{dy^n}k^n\right\},$$

la somme du reste de la série aura pour limites ce que devient

$$\frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left\{\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}h^{n+1} + (n+1)\frac{d^nu'}{dx^ndy}h^nk \ldots\ldots + \frac{d^{n+1}u'}{dy^{n+1}}k^{n+1}\right\},$$

lorsqu'on y met, au lieu de la fonction

$$\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}h^{n+1} + (n+1)\frac{d^nu'}{dxdy}h^nk \ldots\ldots + \frac{d^{n+1}u'}{dy^{n+1}}k^{n+1},$$

la plus grande et la plus petite valeur qu'elle prend depuis $\alpha = 0$ jusqu'à la dernière valeur que l'on donne à α; et il faut observer que le changement de t en $t+\alpha$, change respectivement x en $x+\alpha h$, et y en $y+\alpha k$.

Il est visible qu'en prenant $\alpha = 1$, le second développement de u' devient la série

$$\begin{aligned} u' = u &+ \frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right\} \\ &+ \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\} \\ &+ \text{etc.}, \end{aligned}$$

dont on a par conséquent les limites, d'après ce qui vient d'être dit.

Je ne m'étendrai pas davantage sur ces formules ; je me bornerai à faire observer que l'application du Calcul intégral fournit une méthode plus directe et plus générale de concentrer, pour ainsi dire, une série dans un seul terme, et que D'Alembert est le premier qui ait donné le moyen d'atteindre ce but à l'égard de la série de Taylor, en ne la développant que successivement ; mais il ne se proposait que d'en démontrer la formation. C'est M. Lagrange qui a, le premier, envisagé la chose sous le point-de-vue précédent, et qui a simplifié le procédé mis en usage par D'Alembert. M. Ampère a depuis traité le même sujet avec élégance, dans le XIII^e^ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Ces diverses méthodes seront rapprochées dans le troisième volume de ce Traité, où je donne l'application du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la sommation des suites.

CHAPITRE IV.

Théorie des Lignes courbes.

Quoique le principal objet de ce Chapitre soit l'application du Calcul différentiel à la théorie des lignes courbes, j'ai cru devoir y comprendre, d'une manière succincte, la partie purement algébrique de cette théorie, afin d'offrir un ensemble complet, et de lier entre elles des notions qui sont éparses et présentées sous des points-de-vue très-différens. Il ne sera question ici que des courbes qu'on peut tracer sur un plan: on trouvera dans le chapitre suivant ce qui regarde les courbes tracées sur des surfaces courbes.

174. On sait que toute équation à deux inconnues peut être construite par une courbe, dont ces inconnues sont les coordonnées, et que réciproquement, dans toute courbe assujétie à une loi régulière par sa description, ou douée de quelque propriété commune à tous ses points, il existe toujours entre les abscisses et les ordonnées, une relation constante qui exprime sa nature, et de laquelle on peut déduire toutes ses propriétés (Voyez le *Traité Élém. de Trig. et d'appl. de l'Alg. à la Géom.*). Cette relation ne saurait, dans tous les cas, s'obtenir sous une forme algébrique; et de là naît la distinction des courbes, en *courbes algébriques* et en *courbes transcendantes*.

Comment les diverses circonstances du cours d'une ligne sont indiquées par son équation.

On appelle aussi ces dernières, *courbes mécaniques;* mais cette dénomination me paraît fort impropre, car la description d'une courbe quelconque, à commencer par celle du cercle, ne s'exécute que par des moyens mécaniques, et telle courbe algébrique en exige de plus compliqués que certaines courbes transcendantes.

On divise les lignes en différens ordres, d'après le degré de leur équation. La ligne droite forme le premier ordre, parce qu'elle représente l'équation générale du premier degré à deux indéterminées. Les lignes du second ou du troisième ordre sont celles dont les équations montent au second ou au troisième degré, et ainsi des autres. Newton considérant que le premier ordre ne renfermait que la ligne droite, et que les courbes ne commençaient à se montrer que dans le second, divisa ces dernières en genres, et nomma *courbes du premier genre,* les lignes du second ordre; *courbes du deuxième genre,* celles du troisième ordre, et ainsi de suite.

Les lignes d'un même ordre se subdivisent en espèces, par la considération des principales circonstances de leur cours.

175. S'il était possible de résoudre les équations de tous les degrés, rien ne serait plus facile que de suivre le cours de la courbe représentée par une équation algébrique quelconque. En effet, supposons que cette équation étant résolue par rapport à l'une des indéterminées qu'elle renferme, y, par exemple, ait donné les différentes racines X', X'', X''', etc., qui seront nécessairement des fonctions de x et de constantes; la question se réduira à examiner en particulier le cours de chacune des lignes produites par les équations $y = X'$, $y = X''$, $y = X'''$, etc., lorsqu'on donne à x toutes les valeurs, tant positives que négatives, que peuvent admettre les fonctions X', X'', X''', etc., sans cesser d'être réelles. Ces lignes seront autant de branches de la courbe que représente l'équation proposée.

L'étendue de chaque branche sera déterminée par celle que comprennent les diverses solutions dont est susceptible l'équation qui la représente. Si parmi les quantités X', X'', X''', etc. il s'en trouve qui deviennent infinies, ou dans lesquelles on puisse supposer x infini, il en naîtra des branches dont le cours sera infini, puisqu'elles pourront s'éloigner indéfiniment de l'un des axes ou de tous les deux à-la-fois.

Une branche ne s'arrête que parce que l'expression de son ordonnée devient imaginaire; mais le cours de la courbe proposée n'est pas interrompu pour cela : il arrive seulement alors que deux branches se réunissent et se continuent réciproquement. On s'en convaincra en observant que les valeurs imaginaires de y sont nécessairement en nombre pair, et que celles d'un même couple ont été réelles et égales avant de devenir imaginaires. En effet, l'équation proposée pouvant toujours se décomposer en facteurs réels du premier et du second degré, si on représente par $y^2 - 2Py + Q = 0$ un de ces derniers, on verra que ses racines, $P \pm \sqrt{P^2 - Q}$, ne deviennent imaginaires qu'à cause que Q devient plus grand que P^2, de moindre qu'il était d'abord, et qu'il y a par conséquent un point où les fonctions de x que désignent les lettres P et Q, sont telles qu'on a $P^2=Q$, ce qui anéantit la quantité radicale, et donne pour y deux valeurs égales. L'exemple suivant fera disparaître les difficultés qui pourraient résulter de cette manière générale de considérer les courbes.

176. Soit l'équation $y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0$; en la résolvant par rapport à y, à la manière des équations du second degré, on en tirera les quatre suivantes :

$$y=\sqrt{48a^2+\sqrt{x^4-100a^2x^2+2304a^4}}\ldots(1),$$
$$y=\sqrt{48a^2-\sqrt{x^4-100a^2x^2+2304a^4}}\ldots(2),$$
$$y=-\sqrt{48a^2+\sqrt{x^4-100a^2x^2+2304a^4}}\ldots(3),$$
$$y=-\sqrt{48a^2-\sqrt{x^4-100a^2x^2+2304a^4}}\ldots(4).$$

Il faut, d'après ce qui précède, examiner le cours de la ligne que chacune d'elles exprime en particulier, lorsqu'on suppose x positif et lorsqu'on le suppose négatif.

On voit d'abord que les branches que représentent l'équation (1) et l'équation (3) sont semblables, et que l'une est placée au-dessus de AB, *fig.* 4, tandis que l'autre se trouve au-dessous; il en est de même FIG. 4.
à l'égard des branches que produisent les équations (2) et (4) : il suffira donc de considérer les équations (1) et (2). La valeur de y tirée de l'équation (1) sera réelle, tant que la quantité $x^4-100a^2x^2+2304a^4$ sera positive; et comme elle ne peut devenir négative qu'après avoir été nulle, les racines de l'équation $x^4-100a^2x^2+2304a^4=0$ seront les limites des valeurs qu'on peut donner à x. On trouvera que cette équation a pour facteurs

$$x-6a,\quad x+6a,\quad x-8a,\quad x+8a;$$

la quantité $x^4-100a^2x^2+2304a^4$ sera donc positive tant que x sera au-dessous de $6a$, parce qu'alors elle aura deux facteurs positifs et deux facteurs négatifs; mais elle deviendra négative, si on prend $x>6a$ et $<8a$, parce que le seul facteur $x-8a$ sera négatif; enfin elle redeviendra positive pour toujours, lorsqu'on y supposera $x>8a$: on observera qu'en faisant $x=0$, $x=6a$ et $x=8a$, l'équation (1) donne $y=\sqrt{96a^2}$, $y=\sqrt{48a^2}$, $y=\sqrt{48a^2}$. On tirera donc de l'équation (1), 1°. une branche qui s'étendra du point D pris dans l'axe AC, à une distance du point A égale à $\sqrt{96a^2}$, au point F, pour lequel l'abscisse $AE=6a$; 2°. une autre branche HX qui, partant du point H, dont l'abscisse $AG=8a$, et l'ordonnée $GH=\sqrt{48a^2}$, s'étendra à l'infini dans l'angle BAC, où les x et les y sont positifs.

Passons maintenant à l'équation (2): on voit premièrement qu'elle donnera des valeurs imaginaires pour y dans les mêmes circonstances que l'équation (1), c'est-à-dire, tant que x sera compris entre $6a$ et $8a$, et que de plus elle sera encore imaginaire, lorsque $\sqrt{x^4-100a^2x^2+2304a^4}$ surpassera $48a^2$. Pour avoir la limite, on fera $48a^2=\sqrt{x^4-100a^2x^2+2304a^4}$, ou $x^4-100a^2x^2=0$, ce qui donnera $x^2=0$ et $x^2-100a^2=0$, d'où $x=\pm 10a$. Puisque dans cette équation y est nul lorsque x est nul, et qu'il devient imaginaire lorsque x surpasse $6a$, elle produira une branche qui se terminera à l'abscisse $AE=6a$: et il faut bien remarquer que pour cette abscisse, elle donnera encore $y=\sqrt{48a^2}$, et que par conséquent cette branche se réunira en F, à celle qu'on a déduite ci-dessus de l'équation (1). Lorsque dans l'équation (2) on supposera $x=8a$, la quantité $x^4-100a^2x^2+2304a^4$ s'évanouissant de nouveau, il en résultera $y=\sqrt{48a^2}$, ce qui fait voir que le point H, appartenant à la branche HX fournie par l'équation (1), est en même temps le premier point de la deuxième branche tirée de l'équation (2). Cette branche ne peut s'étendre au-delà de l'abscisse $AI=10a$, puisque passé ce terme y devient imaginaire; mais au point I il est nul, ainsi l'équation (2), lorsqu'on y fait x positif, donne, depuis $x=8a$ jusqu'à $x=10a$, la branche HI.

La supposition de x négatif produirait les mêmes résultats que celle de x positif, puisque l'équation proposée ne contient que les puissances paires de x; on trouverait donc dans l'angle bAC, où x est négatif et y positif, des branches absolument semblables à celles dont on vient de montrer l'existence dans l'angle CAB, où les x et les y sont positifs.

177. Pour mieux connaître la figure de la courbe proposée, on peut la construire par points, c'est-à-dire, assigner un certain nombre de points qui, étant joints entre eux, approcheront d'autant plus d'exprimer ses contours, qu'ils seront plus serrés.

Pour exécuter commodément cette opération, on prendra a pour l'unité, on fera successivement $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, etc., et en calculera ensuite les valeurs de y, au moins par approximation.

Lorsque $x =$	l'équation (1) donne $y =$	l'équation (2) donne $y =$
0	9,798	0
$=$ 1	$=$ 9,744	$=$ 1,021
$=$ 2	$=$ 9,582	$=$ 2,045
$=$ 3	$=$ 9,302	$=$ 3,076
$=$ 4	$=$ 8,887	$=$ 4,125
$=$ 5	$=$ 8,289	$=$ 5,224
$=$ 6	$=$ 6,928	$=$ 6,928
$=$ 7	$=$ *imagin.*	$=$ *imagin.*
$=$ 8	$=$ 6,928	$=$ 6,928
$=$ 9	$=$ 8,698	$=$ 4,510
$=$ 10	$=$ 9,798	$=$ 0
$=$ 11	$=$ 10,845	$=$ *imagin.*
$=$ 12	$=$ 11,872	$=$ *imagin.*
etc.	etc.	etc.

On construira ces résultats en prenant arbitrairement une ligne pour représenter l'unité, et en la portant sur l'axe AB, de chaque côté du point A, autant de fois qu'il sera nécessaire pour exprimer les valeurs de x; par les points où elles se terminent, on mènera parallèlement à l'axe AC des droites sur lesquelles on portera, tant au-dessus qu'au-dessous de AB, les valeurs de y.

178. La courbe que nous venons de *discuter* n'a que quatre branches infinies; mais il s'en trouve du même ordre qu'elle, qui en ont jusqu'à huit: telle serait celle qui résulterait de l'équation

$$y^4 - 2x^2y^2 + x^4 - a^2x^2 + b^4 = 0;$$

dont les racines sont comprises dans la formule

$$y = \pm\sqrt{x^2 \pm \sqrt{a^2x^2 - b^4}}.$$

En effet, cette formule donne pour y quatre valeurs réelles et infinies, lorsqu'on y fait x positif et infini, et elle en donne encore un pareil nombre dans la supposition de x négatif et infini.

On verra dans le cours de ce chapitre, que le nombre des branches infinies d'une courbe ne peut surpasser le double de celui qui marque le degré de son équation.

179. Nous ferons encore sur l'équation $y^4 - 2x^2y^2 + x^4 - a^2x^2 + b^4 = 0$,

une remarque importante; c'est que dans le cas où b serait nul, elle ne représenterait plus comme auparavant une courbe unique, mais elle appartiendrait au système de deux courbes du second ordre; car elle se réduirait à $y^4 - 2x^2y^2 + x^4 - a^2x^2 = 0$, et son premier membre se décomposerait en deux facteurs $y^2 - x^2 + ax$ et $y^2 - x^2 - ax$, qui, étant égalés à zéro, seraient les équations de deux courbes distinctes; et parce que ces équations satisfont toutes deux à la proposée, il s'ensuit que l'ensemble des points de chacune des courbes qu'elles expriment y satisfait aussi.

En général, une équation ne peut représenter une courbe unique qu'autant que tous ses facteurs sont irrationnels par rapport à l'une des indéterminées x ou y; si cette condition n'a pas lieu, elle donne autant de courbes distinctes qu'elle a de facteurs rationnels en x et en y. Il y a même dans tous les degrés des équations qui n'expriment qu'un assemblage de lignes droites; et ce sont celles qui peuvent se décomposer en facteurs de la forme $y + ax + b$, a et b étant des quantités rationnelles ou irrationnelles, mais constantes.

Le plus simple de ces cas, et qu'on reconnait sur-le-champ, a lieu quand l'équation proposée manque de terme constant, et qu'en outre elle est homogène par rapport à x et y. Soit, par exemple, l'équation

$$y^3 - pxy^2 + qx^2y - rx^3 = 0;$$

la supposition de $y = ax$ la rendant divisible par x^3, la réduit à $a^3 - pa^2 + qa - r = 0$; et désignant par a', a'', a''', les valeurs de a que donnera cette dernière, si elles sont réelles, on en déduira

$$y = a'x, \qquad y = a''x, \qquad y = a'''x;$$

ainsi l'équation proposée appartiendra à trois droites passant par l'origine des coordonnées, ou bien à une seule, si a n'a qu'une valeur réelle.

Dans le cas général, si on substitue $ax + b$, au lieu de y, on doit pouvoir déterminer a et b, au moyen des constantes de l'équation proposée, de manière à ce qu'elle soit satisfaite, quelle que soit la valeur de x; en égalant donc à zéro, après la substitution, le coefficient de chaque puissance de x, on aura les équations qui expriment les conditions relatives à cette circonstance, et qui donnent les valeurs de a et de b.

180. Après la considération du nombre et de l'étendue des branches

d'une courbe, se présente celle de ses *points singuliers*. On appelle ainsi les points de son cours qui offrent quelques particularités remarquables. La courbe qui nous a servi d'exemple n° 176, en a de plusieurs espèces.

Le point A, *fig.* 4, dans lequel se coupent plusieurs branches est un point *multiple;* et il est facile à reconnaître, parce qu'en faisant $x=0$, les équations (2) et (4) donnent en même temps $y=0$. FIG. 4.

Les points F et H ne sont pas des points multiples, quoiqu'il s'y réunisse deux branches; ce sont seulement deux *limites* de la courbe proposée dans le sens de l'axe AB, et ils perdraient cette propriété, si on changeait la direction des ordonnées.

La branche IH offre une espèce particulière de point singulier. Après avoir tourné sa concavité vers l'axe AC, elle lui présente ensuite sa convexité; ce changement s'appelle *inflexion*, et le point K où il arrive se nomme *point d'inflexion*.

181. En donnant diverses valeurs aux constantes d'une équation à deux indéterminées, on en tire des courbes qui, quoique de formes très-différentes, ont cependant un caractère commun; et la manière dont les circonstances que présente le cas le plus général, se trouvent modifiées dans chaque cas particulier, mérite d'être remarquée. L'équation

$$ay^2-x^3+(b-c)x^2+bcx=0$$

nous fournira un exemple bien simple de ces divers changemens.

Elle donne $y=\pm\sqrt{\frac{x^3-(b-c)x^2-bcx}{a}}=\pm\sqrt{\frac{x(x-b)(x+c)}{a}}$. On voit d'abord que la courbe qu'elle représente doit avoir de chaque côté de l'axe AB, *fig.* 5, des parties semblables, et que les valeurs de l'ordonnée y seront imaginaires du côté des x positifs, tant qu'on fera $x<b$; mais que du côté des x négatifs, elles seront réelles depuis $x=0$ jusqu'à $x=-c$, terme passé lequel elles redeviendront imaginaires pour toujours. L'expression de y est facile à construire; en le faisant pour un nombre suffisant d'abscisses, on trouvera que la courbe que donne l'équation proposée est celle que représente la figure, et qu'elle a du côté des x négatifs, un ovale dont le diamètre $AF=c$, et du côté des x positifs, deux branches infinies. FIG. 5.

Si on fait $c=0$, l'équation proposée se réduit à $ay^2-x^3+bx^2=0$; d'où on tire $y=\pm\sqrt{\frac{x^2(x-b)}{a}}$; cette formule, toujours imaginaire

quand x est négatif, donne $y=0$ lorsqu'on y fait $x=0$, et redevient ensuite imaginaire jusqu'à ce qu'on fasse $x =$ ou $> b$. Le point A,
FIG. 6. *fig.* 6, où x et y sont nuls en même temps, satisfaisant à l'équation $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$, doit quoiqu'isolé, faire partie de la ligne résultante de cette équation. Cette circonstance, qui paraît singulière au premier coup-d'œil, se conçoit facilement quand on fait attention que plus la constante c est petite, plus l'ovale AF de la figure 5 est petit; et on sent qu'il doit se réduire à un point, lorsque son diamètre c devient nul. On voit ainsi que la courbe donnée par l'équation $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$, conserve encore des traces de la forme qu'affecte celle que représente l'équation plus générale $ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0$, dont elle dérive.

Les points isolés, tels que le point A, dans l'exemple ci-dessus, se nomment *points conjugués*. Il y a des équations qui n'expriment qu'un nombre déterminé de ces points. Si on avait, par exemple, l'équation $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = 0$; on ne pourrait y satisfaire qu'en faisant $x^2 - a^2 = 0$, $y^2 - b^2 = 0$, car un quarré ne pouvant jamais devenir négatif, la somme de tant de quarrés qu'on voudra, ne peut être nulle, à moins que chacun d'eux ne le soit en particulier: cette équation donnera donc $x = \pm a$, $y = \pm b$. Il est facile de voir qu'en faisant dans ces résultats toutes les combinaisons de signes possibles, on n'en tirera jamais que quatre points situés respectivement dans les quatre angles des coordonnées. J'observerai que l'équation proposée peut être regardée comme un cas particulier de cette autre plus générale $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = c^4$, qui donne une courbe composée de quatre parties fermées, quand a et b surpassent c.

Revenons à l'équation

$$ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0;$$

si l'on y supposait $b = 0$, en conservant c, on aurait $ay^2 - x^3 - cx^2 = 0$: dans ce cas les branches EX et EX' de la courbe de la figure 5, passant par le point A, se réuniraient aux deux moitiés de l'ovale AF
FIG. 7. et formeraient la figure 7.

Enfin, si on donne à c, dans l'équation $ay^2 - x^3 - cx^2 = 0$, des valeurs de plus en plus petites, la *feuille* AF se resserrera de plus en plus, et finira par disparaître lorsqu'on fera $c = 0$; comme il est aisé de s'en assurer en examinant la courbe donnée par l'équation très-simple
FIG. 8. $ay^2 - x^3 = 0$, et représentée dans la figure 8.

Si on considère y comme l'abscisse, et x comme l'ordonnée, l'équation $ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0$, étant du troisième degré par rapport à cette dernière inconnue, en donnera trois valeurs pour chacune de celles de la première; et si on fait $y=0$, il en résultera l'équation $-x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0$, dont les racines $x=0$, $x=b$, $x=-c$, expriment les distances des points A, E et F, à l'axe AC, *fig.* 5.

Lorsqu'on fait $b=0$, les deux racines $x=0$ et $x=b$ devenant égales, montrent que le point E et le point A se sont réunis, et quand on suppose ensuite $c=0$, l'égalité des trois racines $x=0$, $x=b$, $x=-c$, prouve que les points A, E et F n'en font qu'un seul.

Dans les divers changemens que subit la courbe donnée par l'équation $ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0$, lorsqu'on fait successivement c et b nuls, le point A devient d'abord un point *conjugué* et ensuite un *nœud;* il est multiple dans l'un et l'autre cas, parce qu'il réunit deux branches de la courbe proposée : enfin, si on décrit par points la courbe représentée par l'équation $ay^2 - x^3 = 0$, ce qui est facile, puisqu'on a $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a}}$, on verra que les deux branches AX et AX', *fig.* 8, qui ne s'étendent point du côté des x négatifs, ont leurs convexités opposées l'une à l'autre, et le point A où elles se réunissent est alors un *point de rebroussement de la première espèce.* FIG. 8.

On voit en A, *fig.* 9, un *point de rebroussement de la seconde espèce,* qui diffère de la première, en ce que l'une des branches, AX par exemple, tourne sa convexité vers la concavité de l'autre. FIG. 9.

La courbe représentée dans la figure, est déduite de l'équation $(ay - x^2)^2 = \frac{x^5}{a}$, d'où on tire

$$y = \frac{x^2}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}x^5} = \frac{x^2}{a} \pm \frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{a}x^3}.$$

182. La transformation des coordonnées sert d'abord à débarrasser l'équation d'une courbe, des termes qui la compliquent inutilement, parce qu'ils ne tiennent qu'à un défaut de symétrie dans la position des axes des coordonnées par rapport à la courbe, ainsi qu'on peut le voir à l'égard des lignes du second degré, dans le Traité

De la transformation des coordonnées et de ses principaux usages.

cité n° 174; ici j'indiquerai son emploi dans la discussion des courbes, et dans la recherche de leurs formes.

Le plus grand changement qu'on puisse apporter dans le système des coordonnées, sans cesser de les prendre droites et respectivement parallèles à deux lignes fixes, consiste à leur donner une nouvelle origine et d'autres directions. J'ai construit ailleurs (*Traité Élém. de Trig. et d'applic. de l'Alg. à la Géom.*) les formules qu'il faut employer à ce changement. Elles ne sont autre chose que l'expression de la relation du premier degré, la plus générale qui puisse exister entre les nouvelles coordonnées et les coordonnées primitives; ensorte que si x et y sont ces coordonnées, t et u les autres, il faut poser les équations

$$x = mt + pu + \alpha,$$
$$y = nt + qu + \beta,$$

dans lesquelles on doit observer que α et β, sont les distances de la nouvelle origine à l'origine primitive, prises dans le sens des coordonnées primitives; que les quantités m, n, p, q, sont des rapports de côtés de triangles, ou des lignes trigonométriques, et que si on désigne par g le cosinus de l'angle des coordonnées primitives, par h celui de l'angle des nouvelles coordonnées, on aura les trois équations

$$m^2 + n^2 + 2gmn = 1, \quad p^2 + q^2 + 2gpq = 1,$$
$$mp + nq + g(np + mq) = h,$$

dont les deux premières établissent entre m, n, p et q, la relation

$$(m^2 + n^2)pq - (p^2 + q^2)mn = pq - mn.$$

Lorsqu'on désigne par φ l'angle compris entre les axes des x et des t, par ψ celui que l'axe des y fait avec l'axe des u, par ω celui que l'axe des x fait avec l'axe des y, les expressions générales des coordonnées primitives x et y, deviennent

$$x = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega} t + \frac{\sin \psi}{\sin \omega} u + \alpha,$$
$$y = \frac{\sin \varphi}{\sin \omega} t + \frac{\sin(\omega - \psi)}{\sin \omega} u + \beta,$$

l'angle des nouvelles coordonnées est $\omega - \varphi - \psi$, et il n'y a plus d'équation de condition.

Quand l'angle des coordonnées primitives est droit, $\sin \omega = 1$, et

$$x = t \cos \varphi + u \sin \psi + \alpha,$$
$$y = t \sin \varphi + u \cos \psi + \beta.$$

Sin ψ dans la première de ces expressions et sin φ dans la seconde, entrent comme cosinus des angles compris entre les axes des x et des u, des y et des t; si donc on désigne ces angles par φ' et ψ', on aura

$$x = t\cos\varphi + u\cos\varphi' + \alpha,$$
$$y = t\cos\psi' + u\cos\psi + \beta,$$

formules où le signe de chaque terme se déterminera facilement quand les angles des nouveaux axes avec les anciens seront donnés.

Lorsque l'angle des nouveaux axes est droit, g et h sont nuls,

$$m^2 + n^2 = 1, \quad x = mt - nu + \alpha, \quad y = nt + mu + \beta,$$

ou bien
$$x = t\cos\varphi - u\sin\varphi + \alpha,$$
$$y = t\sin\varphi + u\cos\varphi + \beta.$$

183. On a cherché à retrouver dans les courbes des ordres supérieurs, des propriétés analogues à celles des courbes du second; c'est ce qui a donné lieu à la considération des *centres* et des *diamètres*.

Le *centre* d'une courbe est un point de son plan, tel que toutes les droites qui y passent, ont, de part et d'autre de ce point, des portions égales terminées à la courbe proposée. L'origine des coordonnées dans l'exemple du n° 176, est le centre de la courbe représentée par la figure 4; car si on tire par ce point une droite quelconque Mm, les deux FIG. 4.
parties AM et Am seront égales entre elles, puisqu'en prenant $Ap = AP$, on trouvera au-dessous de AB l'ordonnée pm égale à PM.

La courbe citée pour exemple ne doit cette propriété qu'à ce que son équation demeure la même lorsqu'on y change x et y en $-x$ et $-y$, ce qui fait que chaque valeur négative de x donne une ordonnée de même grandeur que celle qui répond à la valeur positive correspondante, mais de signe contraire; et on voit que cela arrivera dans toute équation de degré pair, qui ne contiendra que des termes où la somme des exposans de x et de y fera un nombre pair, ou bien dans toute équation de degré impair, pour laquelle cette somme sera toujours un nombre impair : telles seraient, par exemple,

$$x^4 - x^2y^2 + a^2y^2 - b^4 = 0 \quad \text{et} \quad x^3 - xy^2 + a^2y - y^3 = 0.$$

Il suit de là que pour savoir si une courbe a un centre, il faut chercher si, en transportant l'origine des coordonnées dans un point quelconque, on ne pourrait pas faire évanouir tous les termes de degré impair, dans le cas où l'équation proposée serait d'un degré pair, ou tous les termes de degré pair, si elle était d'un degré impair.

En substituant $x'+\alpha$ et $y'+\beta$, au lieu de x et de y, dans l'équation générale du second degré

$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2=0,$$

par exemple, on peut égaler à zéro les coefficiens de x' et de y', excepté quand $E^2=4DF$; aussi la parabole qui répond à ce cas particulier, est-elle la seule des courbes du second ordre qui n'ait pas de centre.

Pour obtenir les courbes du troisième ordre, qui ont un centre, il faudra, dans l'équation générale des lignes de cet ordre

$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2+Gx^3+Hx^2y+Ixy^2+Ky^3=0;$$

substituer $x'+\alpha$, au lieu de x, et $y'+\beta$, au lieu de y; égaler ensuite à zéro les coefficiens de chacun des quatre termes de degré pair, c'est-à-dire le terme tout constant et ceux qui sont affectés respectivement de x'^2, $y'x'$ et y'^2; et comme on n'a introduit que deux quantités arbitraires, il restera deux équations de condition. Je ne m'arrêterai point à ces calculs, qui n'ont d'autre difficulté que leur longueur.

184. Les diamètres des courbes du second ordre sont, comme on sait, des droites telles, que pour chacun de leurs points l'ordonnée positive est égale à l'ordonnée négative; un diamètre perpendiculaire à ses ordonnées s'appelle *axe*. Dans les courbes des ordres supérieurs, on a étendu l'acception du mot *diamètre* en l'appliquant à tout axe des abscisses, tel que, dans chacun de ses points, la somme des ordonnées positives soit égale à celle des ordonnées négatives.

L'équation générale des lignes de l'ordre r, étant ordonnée par rapport à y, peut être représentée par l'équation

$$\left.\begin{array}{l} y^r+(A+Bx)y^{r-1}+(C+Dx+Ex^2)y^{r-2}+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+P+Qx+Rx^2\ldots\ldots+Ux^r \end{array}\right\}=0;$$

et il est évident qu'en considérant une valeur particulière de x, $A+Bx$ exprimera la somme des valeurs correspondantes de y, prises avec un signe contraire, $C+Dx+Ex^2$ celle de leurs produits deux à deux... et enfin $P+Qx+Rx^2\ldots\ldots+Ux^r$ le produit de toutes ces valeurs.

On pourrait tirer beaucoup de conséquences importantes de cette manière de présenter l'équation d'une ligne courbe; mais pour me renfermer dans mon sujet, je me bornerai à faire observer que lorsque le terme affecté de y^{r-1} manquera, la courbe proposée sera rapportée à l'un de ses diamètres, puisqu'alors la somme des ordonnées positives et négatives sera nulle pour une abscisse quelconque. Si le terme y^{r-1} se trouve dans l'équation, on pourra toujours le faire disparaître en changeant la position de l'axe des abscisses et celle de l'origine des ordonnées. Les formules générales du n° 182 donnent, dans ce cas, $x = mt$ et $y = nt + u + \beta$. Cette substitution étant faite, il viendra pour les deux premiers termes de la transformée, ordonnée par rapport à u,

$$u^r + [r(nt + \beta) + A + Bmt]u^{r-1};$$

il faudra égaler séparément à zéro la partie constante du coefficient de u^{r-1} et celle qui est affectée de t, ce qui donnera

$$rn + Bm = 0, \quad r\beta + A = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{n}{m} = -\frac{B}{r}, \quad \beta = -\frac{A}{r}.$$

On voit par ces résultats, qu'il sera toujours possible de chasser le terme affecté de u^{r-1}; mais en changeant la direction des ordonnées, à laquelle nous n'avons pas touché, on changerait aussi la position du diamètre : il s'ensuit donc qu'une même courbe a une infinité de diamètres.

185. Si en changeant à-la-fois, d'une manière quelconque, la position de l'axe des abscisses et l'angle des coordonnées, c'est-à-dire, en substituant $mt + pu$ à x, et $nt + qu + \beta$ à y, on parvenait à chasser tous les termes dans lesquels u se trouve élevé à une puissance impaire, le nouvel axe des abscisses t, serait un diamètre du même genre que ceux du second ordre, un diamètre *absolu*, à tous les points duquel répondraient autant d'ordonnées positives que de négatives, et chacune des premières aurait son égale parmi les secondes. En effet, on pourrait alors regarder u^2 comme l'inconnue dans l'équation proposée, et faisant $u^2 = z$, il en résulterait $u = \pm\sqrt{z}$, ou autant de couples de valeurs de u, égales et de signe contraire, que l'équation en z aurait de racines. Il n'en est pas des diamètres absolus comme des diamètres simples, car le nombre de termes qu'il faut faire disparaître pour obtenir les courbes susceptibles des premiers, devient de plus en plus grand, à mesure qu'on passe à des ordres plus élevés; et parmi les cinq quantités m, p, n, q et β, il n'y en a, comme on sait, que trois dont on puisse disposer.

186. La transformation des coordonnées fournit un moyen très-élé-

gant pour déterminer la position d'une droite qui touche une courbe proposée, dans un point quelconque, et par là fait connaître si ce point est simple ou multiple, et si la courbe y subit une inflexion.

FIG. 10 et 11. En effet, si on conçoit que l'origine des coordonnées, située d'abord en A, *fig.* 10 et 11, ait été transportée sur un point quelconque de la courbe MX, qu'on ait pris pour axe des abscisses la droite MB', parallèle à AB, et pour axe des ordonnées une droite quelconque MM' passant par le point M, il est visible que ce dernier axe rencontrera la courbe deux fois au moins, savoir en M et en M'. Nommant t et u les nouvelles abscisses et les nouvelles ordonnées, et faisant $AP=\alpha$, $PM=\beta$, on obtiendra l'équation entre t et u, par la substitution de $t+pu+\alpha$ au lieu de x, et de $qu+\beta$ au lieu de y; et pour trouver les points dans lesquels le nouvel axe des ordonnées MM' rencontre la courbe, il faudra faire $t=0$ dans cette équation: les valeurs de u qui en résulteront, seront celles des différentes ordonnées qui répondent à l'origine M. Supposons maintenant que la ligne MM' en tournant autour du point M, se rapproche de la ligne MT, qui ne fait que toucher la courbe; le point M' se rapprochera aussi de plus en plus du point M, et ces deux points se confondront, lorsque MM' et MT coïncideront. Il y aura donc dans ce cas deux valeurs de u qui deviendront nulles en même temps, et par conséquent l'équation en t et u devra être divisible par u^2, dans l'hypothèse de $t=0$, ce qui exige que le terme multiplié par u disparaisse ainsi que le terme constant. L'exemple suivant montrera l'usage qu'on peut faire de cette condition.

Soit l'équation $y^2=ax$; on y mettra seulement $pu+\alpha$ pour x, et $qu+\beta$ pour y, parce que devant faire $t=0$, après les substitutions, il est inutile d'avoir égard à cette variable. En ordonnant par rapport à u, on trouvera

$$q^2u^2+(2\beta q-ap)u+\beta^2-a\alpha=0.$$

Pour que cette équation soit divisible par u^2, il faudra qu'on ait

$$\beta^2-a\alpha=0,\qquad 2\beta q-ap=0.$$

La première de ces deux équations, qui n'est autre chose que la proposée, dans laquelle on aurait remplacé x par α et y par β, sera toujours identique, puisque le point M étant sur la courbe donnée, il doit y avoir entre α et β la même relation qu'entre x et y. La seconde équation donnera $\frac{q}{p}=\frac{a}{2\beta}$; et les formules rapportées au bas de la page 398, montrent que $\frac{q}{p}$ exprime la tangente de l'angle que l'ordonnée u fait avec l'abscisse x, et que par conséquent l'axe parallèle à cette ordonnée doit avoir pour équation, par rapport aux axes primitifs, $y-\beta=\frac{q}{p}(x-\alpha)$. En y mettant la valeur de $\frac{q}{p}$ que l'on vient de trouver, il en résultera $y-\beta=\frac{a}{2\beta}(x-\alpha)$ qui sera l'équation de la droite TM.

Si dans cette dernière on fait $y=0$, il viendra $x=-\frac{2\beta^2}{a}+\alpha$; en observant que par la nature de la courbe proposée, $\beta^2=a\alpha$, on trouvera $x=-\alpha$. Cette valeur répondant au point T, donnera

$$AT=-\alpha \quad \text{et} \quad PT=AP-AT=2\alpha:$$

on reconnaîtra sans peine dans ce résultat la soutangente de la parabole dont l'équation est $\beta^2=a\alpha$.

Il est à propos de remarquer ici que, connaissant l'expression de $\frac{q}{p}$, en α et β, on peut déterminer le point de la courbe proposée où la tangente a une direction donnée; car si on représente par V l'angle qu'elle doit faire alors avec l'axe des abscisses, l'équation $\frac{q}{p}=\text{tang}\,V$ fournira une relation entre α et β, qui, jointe à celle que donne l'équation de la courbe, achevera de déterminer ces quantités.

Dans l'exemple ci-dessus, on aura les équations

$$\frac{a}{2\beta}=\text{tang}\,V, \qquad \beta^2=a\alpha,$$

et on voit par la première, que la tangente à la parabole est perpendiculaire à l'axe des abscisses, à l'origine des coordonnées, et qu'elle tend à devenir parallèle à cet axe, à mesure que l'ordonnée β augmente. Ces considérations pourraient mener à beaucoup de conséquences; mais devant revenir bientôt sur ce sujet, au moyen du Calcul différentiel, je ne m'y arrêterai pas maintenant.

187. Si le point M, *fig.* 12, était commun à plusieurs branches de la courbe, il y aurait, quelle que fût la position de l'axe MM', autant de valeurs de u qui deviendraient nulles dans la supposition de $t=0$, qu'il passe de branches par ce point; l'équation en t et u serait FIG. 12.

donc divisible par une puissance de u, du degré marqué par le nombre de ces branches, et cela, quelque valeur qu'on puisse donner au rapport $\frac{q}{p}$.

Il suit de là, que pour connaître si le point dont les coordonnées sont α et β appartient ou non à plusieurs branches de la courbe proposée, il faut substituer $pu + \alpha$ et $qu + \beta$, au lieu de x et de y, et chercher ensuite combien de termes de la transformée disparaissent. Si elle devenait divisible par u^2, le point que l'on considère serait *double*, c'est-à-dire, qu'il appartiendrait à deux branches; il serait *triple*, ou appartiendrait à trois branches, si cette transformée était divisible par u^3; et ainsi de suite.

En regardant les quantités α et β comme indéterminées, et tâchant, par leur moyen, de rendre la transformée divisible par u^2, u^3, etc., indépendamment de toute valeur de p et de q, on découvrira si la courbe proposée a des points doubles, triples, etc. Cherchons, par exemple, les points doubles que peut avoir la courbe représentée par l'équation

$$ay^2 - 2agy + ag^2 - x^3 - cx^2 = 0.$$

Si l'on change x et y en $pu + \alpha$ et $qu + \beta$, il vient

$$\left.\begin{array}{l} -p^3u^3 + (aq^2 - 3\alpha p^2 - cp^2)u^2 \\ + [(2a\beta - 2ag)q - (3\alpha^2 + 2c\alpha)p]u \\ + a\beta^2 - 2ag\beta + ag^2 - \alpha^3 - c\alpha^2 \end{array}\right\} = 0,$$

résultat qui doit être divisible par u^2, quels que soient p et q, lorsque α et β auront les valeurs qui conviennent à un point double. Pour exprimer cette condition, on égalera séparément à zéro le terme constant, la partie du coefficient de u qui est multipliée par p, et celle qui l'est par q; ce qui produira les équations suivantes,

$$a\beta^2 - 2ag\beta + ag^2 - \alpha^3 - c\alpha^2 = 0,$$
$$3\alpha^2 + 2c\alpha = 0, \quad 2a\beta - 2ag = 0.$$

La troisième donne $\beta = g$, la seconde $\alpha = 0$ et $\alpha = -\frac{2c}{3}$; mais il faut que ces valeurs vérifient aussi la première équation, ce qui n'a lieu que pour $\beta = g$ et $\alpha = 0$: ainsi le point où $y = g$ et $x = 0$, est double ou commun à deux branches de la courbe proposée.

188. Pour achever de connaître le caractère de ce point, il faut savoir si les branches qui s'y réunissent se coupent comme le montre la figure 12, ou ne font que se toucher, ainsi qu'on le voit dans les figures 13 et 14, circonstances qui se distinguent par le nombre des tangentes que l'on peut mener par ce point à la courbe proposée; lorsque les branches se coupent, elles ont chacune leur tangente, tandis qu'il n'y en a qu'une seule pour toutes les branches qui se touchent. FIG. 13 et 14.

La détermination du rapport $\frac{q}{p}$, relativement à la droite qui touche la courbe en un point double, s'opère en égalant à zéro le coefficient de u^2; et en général, pour un point multiple qui ferait disparaître un nombre quelconque des derniers termes de la transformée en u, on égalerait à zéro le coefficient du premier des termes qui ne s'évanouissent pas : voici la raison de cette règle.

On peut mener par le point M, *fig.* 12, une infinité d'axes tels que MM', qui rencontreront une même branche MX, dans deux points au moins; d'abord en M et ensuite quelqu'autre part en M'; le second de ces points se rapprochera de plus en plus du premier, à mesure que l'axe MM' deviendra plus voisin de la tangente MT. Quand ces deux droites coïncideront, les points M et M' seront réunis; il y aura donc, relativement à l'axe MT, une nouvelle valeur de u qui deviendra nulle; et par conséquent la transformée, prise par rapport à cet axe, se trouvera divisible par une puissance de u supérieure d'une unité à celle qu'on rencontrerait pour tout autre axe. FIG. 12.

Le point qu'on a considéré dans l'exemple du n° précédent étant double, la tangente doit être regardée comme rendant nulles trois valeurs de u, puisqu'il y en a toujours deux qui s'évanouissent par rapport à un axe quelconque : il faut donc faire disparaître le terme affecté de u^2 dans la transformée, afin qu'elle devienne divisible par u^3, et l'on a

$$aq^2 - 3\alpha p^2 - cp^2 = 0;$$

mais comme, au point dont il s'agit, $\alpha = 0$, il reste seulement

$$aq^2 - cp^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{q}{p} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}};$$

ainsi il y a deux tangentes pour ce point, et il est par conséquent l'intersection de deux branches.

Cette conclusion est facile à vérifier, car l'équation proposée étant mise sous la forme

$$a(y-g)^2 - x^3 - cx^2 = 0,$$

on voit qu'elle rentre dans l'équation $ay^2 - x^3 - cx^2 = 0$ de la page 396, lorsqu'on change $y-g$ en y, ce qui revient à relever l'axe des abscisses parallèlement à lui-même, d'une quantité g, et réduit à zéro l'ordonnée g. On tombe ainsi sur le point A, *fig.* 7, qui est bien en effet l'intersection de deux branches symétriques, dont les tangentes forment le même angle avec l'axe es abscisses, mais l'une au-dessus et l'autre au-dessous de cet axe.

FIG. 7.

On doit observer en passant qu'il ne suffirait pas de s'appercevoir que la supposition de $x=0$ rend l'équation $ay^2 - x^3 - cx^2 = 0$ divisible par y^2, pour être en droit d'en conclure que l'origine A est un point multiple; on a le même résultat en faisant $x = -c$ abscisse du point F, qui ne saurait être considéré comme un point double que par rapport aux ordonnées auxquelles sa tangente est parallèle. Ceci fait voir qu'il y a des points singuliers qui ne tiennent qu'à la position relative des axes des coordonnées et de la courbe, et qu'il faut par conséquent distinguer de ceux dont la multiplicité est inhérente à la courbe elle-même.

Lorsqu'il arrive que les branches se touchent au point multiple que l'on considère, l'équation qui donne le rapport $\frac{q}{p}$ offre autant de racines égales qu'il y a de branches qui se touchent, et dont les tangentes, distinctes dans tout le reste du cours de ces branches, viennent coïncider au point multiple.

Si l'on ne trouvait pour le rapport $\frac{q}{p}$ que des racines imaginaires, il en faudrait conclure que les coordonnées α et β appartiennent à un point conjugué de l'espèce de celui que l'on a remarqué page 395, puisqu'il en résulterait qu'une droite passant par ce point ne saurait réunir deux intersections de la courbe proposée.

Les points de rebroussement sont des points multiples, dans lesquels deux branches se touchent, et ne passent point au-delà. Dans celui de la première espèce, la tangente, *fig.* 8, se trouve entre les deux branches, et elle les laisse toutes deux du même côté, dans celui de la seconde, *fig.* 9. Si les branches, au lieu de s'arrêter en A, se continuaient de l'autre côté, il y aurait *osculation*, comme dans la figure 13, ou *embrassement*, comme dans la figure 14; mais ces cas ne

FIG. 8 et 9.

FIG. 13 et 14.

se distinguent généralement des rebroussemens, que parce que l'ordonnée a des valeurs réelles ayant et après le point multiple.

189. Si la courbe proposée subit une inflexion, il y aura alors trois intersections de l'axe MM', avec la même branche MX, *fig.* 15, qui se réduiront à une seule, quand il coïncidera avec la tangente. Il suit de là que dans le cas d'une inflexion, la transformée en u doit être divisible par u^3, comme pour un point triple, mais avec cette différence, que s'il passait réellement trois branches de la courbe par le point M, les termes affectés de u et de u^2 s'évanouiraient pour toutes les valeurs possibles de $\frac{q}{p}$, tandis que ce n'est qu'en donnant à ce rapport la valeur qui convient à la tangente, que les termes dont on vient de parler disparaissent. FIG. 15.

Nous prendrons pour exemple la courbe représentée par l'équation $x^3+ax^2+b^2y=0$. En faisant $x=pu+\alpha$, $y=qu+\beta$, il vient

$$p^3u^3+(3\alpha p^2+ap^2)u^2+[(3\alpha^2+2a\alpha)p+b^2q]u+\alpha^3+a\alpha^2+b^2\beta=0.$$

Si la courbe proposée a un point d'inflexion, d'après ce qui précède, la transformée ci-dessus deviendra divisible par u^3, lorsqu'on donnera à $\frac{q}{p}$ la valeur qui convient à ce point; les trois équations

$$\alpha^3+a\alpha^2+b^2\beta=0,\quad (3\alpha^2+2a\alpha)p+b^2q=0,\quad 3\alpha p^2+ap^2=0,$$

auront donc lieu en même temps. La dernière donne $\alpha=-\frac{a}{3}$; substituant dans la première et dans la seconde, on trouvera

$$\beta=-\frac{2a^3}{27b^2}\quad \text{et}\quad \frac{q}{p}=\frac{a^2}{3b^2}.$$

Les valeurs de α et de β n'appartiennent pas à un point multiple, puisqu'elles ne font pas évanouir séparément chacun des coefficiens de p et de q, mais bien à un point d'inflexion.

190. Si une valeur de $\frac{q}{p}$ rend la transformée divisible par u^n, et que le point où cela arrive ne soit pas multiple, il n'y aura inflexion que dans le cas où n serait un nombre impair. Pour se peindre cette circonstance, il faut concevoir une courbe XY, *fig.* 16, qui ait un nombre FIG. 16.

quelconque d'inflexions, trois, par exemple; on voit qu'une semblable courbe pourra être coupée en cinq points par une ligne droite, et que les distances des intersections dépendront non-seulement de la position de cette droite, mais encore des intervalles qui séparent chaque inflexion, intervalles qui eux-mêmes tiennent aux valeurs des constantes de l'équation de la courbe proposée. Il est évident que si, pour quelques valeurs particulières de ces constantes, les deux inflexions M et M' se réunissaient, elles s'effaceraient mutuellement, ensorte que si la courbe, dans son état primitif, n'avait que ces deux-là, elle n'en montrerait plus aucune trace. Mais si elle en a une troisième M'', elle la conserverait encore, quand même le point M'' viendrait à se confondre avec les deux autres M et M' supposés réunis. Les points qui résultent ainsi de la réunion de plusieurs inflexions, sont nommés *points de serpentement;* ils sont visibles ou invisibles, selon que le nombre des inflexions est impair ou pair.

191. Une courbe d'un ordre quelconque ne peut avoir de point singulier qui soit la réunion d'un nombre de points simples plus grand que l'exposant de son ordre. En effet, les expressions de x et de y en u et t (182) n'étant que du premier degré, leur substitution dans l'équation d'une courbe ne change point le degré de son équation; ainsi les nouvelles ordonnées, quelque position qu'on leur donne, ne peuvent avoir pour la même abscisse plus de valeurs qu'il n'y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de cette équation. C'est pour cette raison qu'une courbe du second ordre, qui n'a que deux ordonnées au plus, pour une même abscisse, ne présente aucun point double; car en portant l'origine sur un point de cette nature, et prenant pour axe des ordonnées la tangente, il devrait résulter de la réunion de trois points distincts. Les courbes du troisième ordre admettent des points doubles et des points d'inflexion, parce qu'elles peuvent avoir trois ordonnées sur une même abscisse.

192. La transformation des coordonnées peut être employée utilement pour déterminer la position des branches infinies des courbes;
FIG. 17. car si, d'un point quelconque A, *fig.* 17, on tire une droite AD qui rencontre une branche infinie EX d'une courbe donnée, il est visible que la dernière intersection M' s'éloignera de plus en plus du point A, à mesure que la droite AD approchera de devenir parallèle à la direction

vers laquelle tend la branche de courbe EX. Il suit de là, que si l'on prend la ligne AD pour axe des ordonnées u, on pourra lui donner une direction telle, que l'une des valeurs de u, correspondantes à $t=0$, soit infinie; et comme la situation du point A est arbitraire, il sera permis de le faire coïncider avec l'origine des coordonnées primitives x et y, en ne changeant que la seule direction de l'axe des ordonnées, et posant en conséquence $\alpha=0$, $\beta=0$. Il viendra alors

$$x=t+pu, \quad y=qu, \quad \text{ou seulement} \quad x=pu, \quad y=qu,$$

à cause que l'on doit supposer $t=0$ dans la transformée.

Au moyen de ces valeurs, l'équation de la courbe proposée étant mise sous la forme

$$A+Bu+Cu^2\ldots+Lu^{r-2}+Mu^{r-1}+Nu^r=0,$$

pour reconnaître si elle peut avoir des racines infinies, on y fera $u=\frac{1}{u'}$, ce qui la changera en cette autre

$$Au'^r+Bu'^{r-1}+Cu'^{r-2}\ldots+Lu'^2+Mu'+N=0,$$

dans laquelle il doit y avoir autant de racines qui deviennent nulles, qu'il y en a qui deviennent infinies dans l'équation précédente. Or, comme on n'a introduit dans ces transformées que les quantités p et q, dont une seule est arbitraire, on ne peut d'abord poser que $N=0$, ce qui revient à égaler à zéro le coefficient de la plus haute puissance de u, dans la première transformée. Les valeurs réelles du rapport $\frac{q}{p}$, tirées de cette équation, indiqueront les directions dans lesquelles il faut placer l'axe des u, pour que l'une de ses intersections, avec la courbe proposée, s'éloigne à l'infini. Si l'on ne trouvait pour $\frac{q}{p}$ que des valeurs imaginaires, la courbe n'aurait aucune branche infinie. Eclaircissons ceci par quelques applications.

193. L'équation générale des lignes du second ordre,

$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2=0,$$

lorsqu'on y change x en pu et y en qu, devient

$$A+(Bp+Cq)u+(Dp^2+Epq+Fq^2)u^2=0;$$

et posant

$$Dp^2 + Epq + Fq^2 = 0;$$

on en tire

$$\frac{q}{p} = -\frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4FD}}{2F}.$$

Cette dernière expression est imaginaire tant que $E^2 < 4FD$; les courbes comprises dans ce cas ne s'étendront donc point à l'infini.

Lorsque $E^2 = 4FD$, les deux valeurs de $\frac{q}{p}$ se trouvant égales, les branches infinies de la courbe tendent à devenir parallèles; mais quand $E^2 > 4FD$, elles tendent vers deux directions différentes.

Ces considérations partagent toutes les lignes du second degré en trois groupes, dans lesquels on reconnaît aisément les ellipses, les paraboles et les hyperboles.

Si, ne supposant plus $t = 0$, on effectue la transformation complète, en faisant

$$x = t + pu, \qquad y = qu,$$

et qu'on ait égard à l'équation

$$Dp^2 + Epq + Fq^2 = 0,$$

posée plus haut, il viendra

$$A + Bt + Dt^2 + [Bp + Cq + (2Dp + Eq)t]u = 0;$$

équation qui, pour chaque valeur de t, n'en donne plus qu'une seule pour u.

L'équation générale des courbes du troisième degré,

$$A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 = 0,$$

se transformant en

$$A + (Bp + Cq)u + (Dp^2 + Epq + Fq^2)u^2 + (Gp^3 + Hp^2q + Ipq^2 + Kq^3)u^3 = 0,$$

conduit à

$$Gp^3 + Hp^2q + Ipq^2 + Kq^3 = 0,$$

d'où

$$K\frac{q^3}{p^3} + I\frac{q^2}{p^2} + H\frac{q}{p} + G = 0,$$

équation du troisième degré, qui peut avoir,

1°. une seule racine réelle,
2°. trois racines réelles, toutes égales,
3°. .... deux égales,
4°. .... toutes inégales.

Ces quatre cas offrent un moyen de partager en groupes les courbes du troisième degré; et si l'on achève la transformation des coordonnées par la substitution de $t+pu$ et de qu, au lieu de x et de y, en ayant égard à l'équation ci-dessus qui détermine le rapport $\frac{q}{p}$, on tombera sur un résultat de la forme

$$A+Bt+Dt^2+Gt^3+(C'+E't+H't^2)u+(F'+I't)u^2=0,$$

dans lequel l'ordonnée u ne passera pas le second degré.

194. On voit par ce qui précède, qu'il existera des branches infinies dans toutes les courbes du troisième degré, ce qui n'a pas lieu pour celles du second. Il était facile de le prévoir, d'après le degré même des équations générales en x et y; car lorsque leur degré est impair, par rapport à l'une de ces indéterminées, elles en donnent toujours au moins une valeur réelle, pour toute valeur réelle qu'il plait d'assigner à l'autre, que l'on peut par conséquent supposer infinie.

Dans une courbe de l'ordre r, le nombre des branches infinies peut aller jusqu'à $2r$; car si les r valeurs de l'une des indéterminées demeurent réelles, quand on suppose l'autre infinie, tant négativement que positivement, ces valeurs produiront un pareil nombre de branches infinies. La même chose résulte des articles ci-dessus; car chaque direction fournie par les valeurs de $\frac{q}{p}$ peut convenir à deux branches situées l'une du côté des u positifs, l'autre du côté des u négatifs, et c'est en effet ce que l'on voit sur l'hyperbole, dans les courbes du second degré. Il y aurait lieu de s'arrêter ici sur la discussion des différens cas que peut offrir l'équation qui détermine la valeur $\frac{q}{p}$; mais tout ce détail, quelque curieux qu'il puisse être, m'écarterait trop du but principal de cet Ouvrage: je me bornerai à deux remarques qui me paraissent plus importantes.

195. La première, que les équations

$$Dp^2 + Epq + Fq^2 = 0,$$
$$Gp^3 + Hp^2q + Ipq^2 + Kq^3 = 0,$$

du n° 193, sont au fond les mêmes que les équations

$$Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0,$$
$$Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 = 0,$$

que l'on formerait en égalant à zéro l'ensemble des termes du degré le plus élevé dans les équations générales du second et du troisième degré en x et y, termes qui sont les seuls dont il faudrait tenir compte si l'on supposait que x et y eussent en même temps des valeurs infinies, et qui par conséquent font connaître la marche que tendent à prendre les courbes proposées à mesure qu'elles se prolongent. C'est par les facteurs dont ces dernières équations sont susceptibles, et qui appartiennent à des lignes droites (179), qu'Euler discute et classe les branches infinies des courbes, dans son *Introduction à l'analyse des infinis*; le procédé que j'ai indiqué ci-dessus, qui réduit tout à la considération d'une seule variable, est tiré du petit *Traité des courbes algébriques*, de du Séjour et Goudin.

196. Il faut encore observer qu'en général, l'axe des u, déterminé comme on l'a indiqué n° 192, ne doit pas être confondu avec la droite qui tendrait à s'approcher de plus en plus de cette branche, ainsi que le font les asymptotes de l'hyperbole, qui sont les limites de toutes ses tangentes; il est seulement parallèle à cette droite, qui, comme toutes les tangentes, est la limite de celles qui rencontrent la même branche en deux points. Lorsqu'elle existe, on la trouve en cherchant à
FIG. 18. transporter l'axe AD, *fig.* 18, parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que l'intersection M s'éloigne à une distance infinie. Pour cela, on change t en $t+\alpha$, ou l'on écrit $\alpha+pu$ au lieu de x, en même temps que qu au lieu de y, et on dispose de la quantité α pour faire disparaître le terme affecté de u^{m-1}. La droite HI, déterminée par ce procédé, peut être regardée comme réunissant deux intersections placées à une distance infinie sur la branche EX. Lorsqu'on trouve pour α une valeur finie, on peut mener la droite HI; et dans le cas contraire, la chose est impossible, puisque cette droite est reculée à une distance

infinie de l'axe AD. Dans le premier cas, la branche EX a une asymptote; dans le second, elle en est dépourvue.

Si l'on change t en α dans la transformée

$$A+Bt+Dt^2+[Bp+Cq+(2Dp+Eq)t]u=0,$$

relative aux lignes du second degré (page 409), et que l'on égale à zéro le coefficient de u, on trouvera

$$\alpha=-\frac{Bp+Cq}{2Dp+Eq}=-\frac{B+C\frac{q}{p}}{2D+E\frac{q}{p}},$$

valeur dont le dénominateur s'évanouit quand on y substitue pour le rapport $\frac{q}{p}$, la quantité $-\frac{E}{2F}$ qui convient au cas où $E^2=4FD$, c'est-à-dire à la parabole, courbe dépourvue d'asymptote.

Il est visible que si l'origine primitive A se trouvait sur l'asymptote de la branche EX, la valeur de $\frac{q}{p}$ ferait disparaître à-la-fois les deux premiers termes de la transformée en u, puisqu'il y aurait alors deux valeurs de u qui deviendraient infinies en même temps, et par conséquent deux valeurs de u' qui s'évanouiraient (192) : il disparaîtrait un plus grand nombre de termes, si cette asymptote était commune à plusieurs branches (*).

(*) Tout ce qui précède reposant sur la considération du nombre de points dans lesquels une droite peut rencontrer une courbe, il est naturel de montrer à cette occasion que deux courbes algébriques dont les équations seraient, l'une du degré m, l'autre du degré n, ne sauraient se couper en plus de mn points. En effet, si l'on élimine entre ces équations, l'une quelconque des coordonnées qui leur sont communes dans les points d'intersection des courbes proposées, l'équation finale ne pourra s'élever au-delà du degré mn (*Complém. des Élém. d'Alg.*).

On voit encore par là qu'une ligne droite ne peut rencontrer une courbe algébrique en plus de points qu'il n'y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de l'équation de cette courbe.

Quand on compare le nombre de points dans lequel peuvent se couper deux lignes dont les équations passent le second degré, on rencontre une difficulté dont il est à propos de dire un mot ici, et qui consiste en ce que ces deux courbes semblent pouvoir se couper en plus de points qu'il n'en faudrait pour déterminer l'une d'elles d'après le degré de son équation.

La détermination d'une courbe quelconque, en l'assujétissant à passer par des points

Application du développement des fonctions en séries, à la théorie des courbes.

197. Le développement des fonctions en séries est le procédé analytique le plus fécond pour déduire de l'équation d'une courbe toutes les circonstances de son cours. En appliquant à l'équation d'une courbe quelconque la méthode exposée dans le n° 61 de l'Introduction, on parvient, lorsque l'abscisse est très-petite ou très-grande, à exprimer l'ordonnée par des séries convergentes, qui, dans l'un et l'autre cas, font connaître la direction des branches qu'elles représentent, en offrant le moyen de comparer ces branches à des courbes très-simples, et dont le cours est facile à déterminer.

Nous allons faire usage de ce procédé, par rapport à l'équation

$$ax^3 + x^3y - ay^3 = 0,$$

dont nous avons tiré, dans le n° 65 de l'Introduction, les quatre séries

$$y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4} - \text{etc.} \ldots\ldots (1),$$

$$y = -a - a^4x^{-3} - 3a^7x^{-6} - 12a^{10}x^{-9} - 55a^{13}x^{-12} - \text{etc.} \;(2),$$

$$y = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a - \frac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^4x^{-3} - \text{etc.} \ldots\ldots (3),$$

$$y = -a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a + \frac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^4x^{-3} + \text{etc.} \ldots\ldots (4).$$

La série (1) est d'autant plus convergente que x est plus petit, et on

---

donnés, est complète lorsque le nombre de ces points est égal à celui des coefficiens nécessaires de son équation. Ces coefficiens sont au nombre de 2 pour l'équation du premier degré à deux variables, de 5 pour celle du second degré, de 9 pour celle du troisième, et en général de $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ pour l'équation du degré n, attendu qu'on peut toujours, par la division, réduire à l'unité le coefficient de l'un quelconque de ses termes.

D'après cela, il ne peut passer qu'une ligne du quatrième ordre par 14 points donnés, et cependant deux courbes de cet ordre peuvent se couper en 16 points; il semblerait donc que 16 points ne seraient pas même suffisans pour particulariser une courbe du quatrième ordre, puisqu'ils peuvent être communs à deux courbes de cet ordre; mais le paradoxe s'explique en observant que quoique pour déterminer les 14 coefficiens de l'équation du quatrième ordre, relativement à ces points, on eût 16 équations du premier degré, il arriverait que plusieurs de ces équations rentreraient l'une dans l'autre, et qu'il resterait des coefficiens arbitraires.

peut prendre cette variable telle, que le premier terme x surpasse la somme de tous ceux qui le suivent; ensorte que la valeur de y différera aussi peu qu'on voudra de celle que donnerait l'équation $y=x$, qui appartient à une droite menée par l'origine des coordonnées, et faisant un angle de $0^q,5$ avec l'axe des abscisses. Il suit de là qu'une très-petite portion de la courbe proposée, prise vers le point A, *fig.* 19, se confondra sensiblement avec la droite AY, dont on vient de parler, et cela d'autant mieux qu'elle aura moins d'étendue. On va voir, de plus, qu'il est impossible de mener par le point A une droite qui passe entre la droite AY et la branche de courbe AX. FIG. 19.

Pour distinguer l'ordonnée de la droite AY de celle de la courbe, relativement à la même abscisse, marquons la première d'un accent; nous aurons $PM'=y'=x$, et par conséquent

$$MM'=y-y'=\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{81a^3}+\text{etc.}$$

Comparons maintenant la droite AY avec une autre droite quelconque AZ, représentée par l'équation $y''=Ax$; la différence des ordonnées PM'' et PM', correspondantes à une même abscisse dans l'une et dans l'autre, sera $M''M'=y''-y'=(A-1)x$; mais on peut prendre x assez petit pour que la somme des termes $\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{81a^3}+$ etc., soit moindre que $(A-1)x$: en supposant donc que AP représente la valeur qui remplit cette condition, on aura alors $MM'<M'M''$. On pourra pareillement donner à x une valeur négative Ap, telle qu'on ait encore $mm'<m'm''$; par conséquent, quelqu'hypothèse qu'on fasse sur le signe de la quantité $A-1$, jamais dans l'espace $M''m''$, la droite AZ ne pourra se trouver entre la courbe AX et la droite AY.

Il est facile de voir qu'on peut prendre pour le caractère de la tangente, l'impossibilité de faire passer une autre droite entre elle et la courbe; la ligne AY touche donc la courbe proposée au point A.

Le signe de la différence $y-y'=\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{81a^3}+$etc. fait connaître de quel côté de la droite AY se trouve la courbe proposée, avant et après le point de contact; or ce signe ne dépend que de celui du premier terme, qui, étant constamment positif, nous montre que l'ordonnée de la courbe, plus grande que celle de la droite, lorsque x est positif, devient plus petite lorsqu'il est négatif, et que par conséquent la courbe est au-dessus de la tangente, soit en deçà, soit en delà du point A.

De là résulte la forme assignée sur la figure, à cette portion de la courbe proposée; car une courbe quelconque doit toujours opposer immédiatement sa convexité à la droite qui la touche, et ne saurait par conséquent subir d'inflexion sans passer d'un côté à l'autre de cette droite, ce qui n'arrive pas au point A.

198. Considérons maintenant la série (2), qui n'est convergente que lorsque x est très-grand par rapport à a. Plus x augmente, plus la valeur de y donnée par cette série approche de la quantité a, soit qu'on prenne x positif, soit qu'on le prenne négatif, mais sans y atteindre jamais. Si on prend sur l'axe AC, au-dessous de AB, la distance $AD = -a$, et qu'on tire la droite DU parallèle à AB, y étant égal $-a$ dans toute l'étendue de cette droite, les branches représentées par la série (2), ne pourront jamais la couper, quelque prolongée qu'on la suppose; mais elles s'en approcheront de plus en plus et l'auront par conséquent pour *asymptote*.

Le second terme de la série (2) étant positif, lorsque x est négatif, et négatif lorsque x est positif, on en conclura comme dans le n° précédent, que l'asymptote est au-dessous de la courbe du côté des x négatifs, et au-dessus du côté des x positifs; on verra d'ailleurs que l'ordonnée y est négative dans l'un et l'autre cas : les branches FS et Ax seront donc situées, par rapport à leur asymptote, comme le représente la figure.

On n'a tracé en plein que leurs extrémités, parce que ce sont les seules parties que puisse représenter la série (2), qu'on ne doit employer qu'autant qu'elle est convergente.

199. Passons enfin aux séries (3) et (4). Elles donnent pour y des valeurs qui diffèrent d'autant moins de celles qui résultent des équations $y = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a$ et $y = -a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a$ que x est plus grand; les courbes que ces dernières représentent s'approchent donc de plus en plus des branches auxquelles appartiennent les séries (3) et (4).

Les deux équations $y = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a$ et $y = -a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a$ sont les racines de $\left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{x^3}{a}$, et produisent une courbe composée de deux branches semblables ER et ET, dont la première sert d'asymptote à la branche positive AX, résultante de la série (3), et la seconde remplit le même objet à l'égard de la branche négative FV, donnée par la série (4): on remarquera que les séries (3) et (4) deviennent imaginaires, lorsqu'on suppose x négatif (*).

200. L'exemple traité dans les deux articles précédens montre bien comment la convergence des séries, en permettant de se borner à leurs premiers termes, ramène à des formes simples le cours d'une courbe; mais pour compléter l'exposition de ce procédé, il faut considérer des séries d'une forme générale: je prendrai pour celle des séries ascendantes

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.},$$

les exposans α, β, γ, etc. étant rangés par ordre de grandeur. Dans cette forme, x et y s'évanouissent en même temps; mais on peut toujours préparer une équation pour que cela soit ainsi, en changeant convenablement la position de l'origine des coordonnées. Plus x sera petit, plus la branche à laquelle répond la série ci-dessus approchera de se confondre avec celle que représente l'équation à deux termes $y = Ax^{\alpha}$; la discussion de cette dernière fera donc connaître la forme de la courbe proposée, dans les environs de l'origine des coordonnées: tout dépend de la nature de l'exposant α, qui peut être égal à l'unité, ou non.

Dans le premier cas, il vient $y = Ax$; on prouvera, comme dans le n° 197, que la droite à laquelle répond cette équation est tangente à la branche représentée par la série

$$y = Ax + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.},$$

et le terme Bx^{β} fera connaître la position de cette branche par rapport à sa tangente.

(*) On peut construire facilement par points, la courbe que représente l'équation $ax^3 + x^2y - ay^3 = 0$; car en faisant $y = tx$, cette équation devient divisible par x^3, et se réduit à $a + xt - at^3 = 0$, d'où on tire $x = \frac{at^3 - a}{t}$; donnant ensuite à t des valeurs arbitraires, on aura x et y, sans qu'il soit besoin d'extraire aucune racine. De semblables artifices conduisent souvent à exprimer les indéterminées d'une équation, d'une manière simple et qui permet d'en trouver autant de valeurs rationnelles qu'on veut. On voit par là que la résolution des questions de l'*analyse indéterminée* peut être très-utile pour la construction des courbes.

Quand l'exposant α est différent de l'unité, la courbe à laquelle appartient l'équation $y = Ax^\alpha$ touche l'axe des x ou celui des y, selon que $\alpha > 1$ ou < 1. En effet, si on désigne par $y' = A'x'$ l'équation d'une droite quelconque, on aura

$$y - y' = x(Ax^{\alpha-1} - A'),$$

d'où l'on voit qu'il sera toujours possible de prendre x assez petit pour que $Ax^{\alpha-1} < A'$, ou $y < y'$, à moins que A' ne soit nul, et que par conséquent toute droite qui différera de l'axe des abscisses passera au-dessus de la courbe, par rapport à cet axe. Quand $\alpha < 1$, le facteur $Ax^{\alpha-1} - A'$ revenant à $\frac{A}{x^{1-\alpha}} - A'$, il est toujours possible de prendre x assez petit pour rendre $\frac{A}{x^{1-\alpha}} > A'$, ou $y > y'$, tant que A' n'est pas infini, et il suit de là que toute droite qui différera de l'axe des ordonnées ne saurait passer entre cet axe et la courbe, dans les environs de l'origine.

Il suit de ce qu'on vient de voir, que si l'on transforme les coordonnées de manière à prendre la tangente pour axe des abscisses, ce qui est toujours possible, le développement de la nouvelle ordonnée commencera par un terme où l'exposant α surpassera l'unité; et afin de diminuer le nombre de cas à considérer, supposons qu'on ait d'abord effectué la transformation dont il s'agit, ensorte que la branche proposée touche à l'origine la ligne des x.

201. Cela posé, la discussion de l'équation $y = Ax^\alpha$ peut se réduire à trois cas, que je vais successivement examiner.

1°. Lorsque α est un nombre impair ou bien une fraction de numérateur et de dénominateur impairs, c'est-à-dire de la forme $\frac{2p+1}{2q+1}$, y changeant de signe en même temps que x, la branche passe de l'un des angles des axes des coordonnées, à l'angle opposé; elle coupe en même temps les deux axes, et comme elle touche nécessairement celui des x, elle subit une inflexion, ainsi que le montrent les figures 20 et 21.

FIG. 20 et 21.

2°. Lorsque α est un nombre pair, ou une fraction de numérateur pair et de dénominateur impair, c'est-à-dire de la forme $\frac{2p}{2q+1}$, y demeurant réel et conservant le même signe, quel que soit celui de

x, la branche passe de l'un des angles des axes des coordonnées à l'angle adjacent, et prend nécessairement l'une des formes représentées dans les figures 22 et 23, puisqu'elle touche l'axe des abscisses. FIG. 22 et 23.

3°. Enfin lorsque α sera une fraction de numérateur impair et de dénominateur pair, ou de la forme $\frac{2p+1}{2q}$, le changement de signe fera passer y du réel à l'imaginaire, ou *vice versâ*, et la branche ne s'étendra que dans un seul angle des axes des coordonnées; mais il faut remarquer qu'il y a nécessairement une autre valeur de y qui vient se rattacher à celle-là au moment où elle cesse d'être réelle (175), et que le développement de cette valeur doit commencer par le terme Ax^{α} pris avec un signe contraire, ce qui est d'ailleurs évident, puisque $x^{\frac{2p+1}{2q}}$ est une expression radicale de degré pair. Il suit de là que les deux branches touchant l'axe des x, l'une au-dessus, l'autre au-dessous, la courbe offrira à l'origine un rebroussement de la première espèce, *fig.* 24 et 25. FIG. 24 et 25.

La formule du retour des suites (*Int.* 58) faisant voir que l'équation indéfinie

$$y = Ax^{\alpha} + By^{\beta} + Cy^{\gamma} + \text{etc.},$$

conduit à

$$x = A'y^{\frac{1}{\alpha}} + B'y^{\beta'} + C'y^{\gamma'} + \text{etc.};$$

il en résulte que les cas où $\alpha < 1$, dans la première série, répondent à ceux où $\frac{1}{\alpha} > 1$, dans la seconde, que par conséquent tout ce qui a été dit plus haut à l'égard de l'axe des abscisses, convient alors à celui des ordonnées; et il n'y a qu'à supposer que les figures qui s'y rapportent aient fait un quart de révolution autour de l'origine A.

202. L'énumération faite dans le n° précédent, quoiqu'elle paraisse embrasser tous les cas qui peuvent se présenter, ne nous a pourtant pas offert le rebroussement de la seconde espèce (181), et cela parce que l'existence de ce point singulier ne dépend pas seulement du premier terme de la série

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.}$$

En effet, l'équation

$$(ay - x^2)^2 = \frac{x^5}{a^3},$$

rapportée dans le n° 181, étant résolue par rapport à y, donne les deux valeurs

$$y = \frac{x^2}{a} \pm \frac{x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}};$$

et en se bornant au premier terme, comme au plus considérable, on ne trouverait à la courbe qu'une seule branche, passant dans les deux angles adjacens placés au-dessus de l'axe des abscisses; mais le second terme devenant imaginaire, montre que la courbe ne s'étend pas du côté des x négatifs, et que du côté des x positifs elle a deux branches qui ont pour tangente commune l'axe des abscisses, puisque l'exposant α surpasse 1. On voit ensuite que tant que l'on supposera x très-petit, le premier terme de la valeur de y l'emportera sur le second, et que par conséquent près de l'origine des coordonnées, les deux branches de la courbe seront du même côté de l'axe des abscisses, ainsi que le
FIG. 26. montre la figure 26.

En général, il est visible que lorsqu'il y aura plusieurs branches qui passeront à l'origine des coordonnées, on trouvera un pareil nombre de séries, et que parmi ces séries, toutes celles dont le premier terme contiendra x avec un exposant plus grand que l'unité, ayant l'axe des abscisses pour tangente commune, se toucheront par conséquent. C'est ce qui a lieu pour les deux espèces de rebroussement; mais quand les séries n'ont pas de termes qui deviennent imaginaires par le changement du signe de x, les deux branches se continuant de chaque côté de l'origine, produisent une *osculation* ou un *embrassement* (188).

S'il se rencontrait dans une série un terme dont le coefficient fût imaginaire, c'est-à-dire de la forme $(a + b\sqrt{-1})\,x^{\beta}$, la série ne pourrait devenir réelle que par la supposition de $x = 0$, qui donnerait $y = 0$, et ne représenterait par conséquent qu'un point situé à l'origine des coordonnées; ce serait un point conjugué avec les branches produites par les autres séries tirées de la même équation.

Pour rendre applicables à tous les cas les remarques précédentes, il resterait à donner des procédés abrégés pour transporter l'origine des coordonnées à un point quelconque, et placer l'axe des abscisses sur la tangente à ce point, puis à déterminer les diverses séries ascendantes que peut fournir l'équation proposée, lorsqu'elle est ainsi transformée: c'est à cela que reviennent les méthodes qu'on trouve dans l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes*, par Cramer; mais je n'ai voulu ici que montrer la liaison des diverses formes de points singuliers avec les équations des courbes, puisque je dois indiquer, dans le Calcul différentiel, des moyens plus simples pour en reconnaître l'existence.

203. La considération des diverses séries descendantes, qu'on peut tirer d'une équation à deux variables, fait connaître combien la courbe qu'elle représente a de branches infinies, et quelle est la nature de la ligne vers laquelle ces branches concourent. Il est évident qu'une courbe ne peut avoir des branches infinies, que dans les deux cas suivans :

1°. Lorsque x étant infini, y a une valeur réelle, soit finie, soit infinie; 2°. lorsque y devient infini, quoique x reste fini.

Pour le premier, on cherchera toutes les séries qui expriment la valeur de y dans l'hypothèse de x très-grand (*Int.* 63). Ces séries ne pourront être que de la forme suivante :

$$y = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} + B'x^{-\beta'} + C'x^{-\gamma'} + \text{etc.} \ldots (\text{I}),$$

dans laquelle le nombre des termes affectés des puissances positives de x sera toujours limité. En faisant... $Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} = y'$, on aura

$$y - y' = B'x^{-\beta'} + C'x^{-\gamma'} + \text{etc.};$$

d'où l'on voit que plus x sera grand, moins y' différera de y; et comme on pourra toujours prendre x de manière que $y - y'$ soit moindre qu'une grandeur donnée, la branche représentée par la série (I) s'approchera sans cesse de l'une des branches de la ligne donnée par l'équation $y' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha}$.

C'est sur la nature de cette ligne que repose la distinction des branches infinies en branches *hyperboliques* et en branches *paraboliques*.

Les premières sont celles qui, comme les branches de l'hyperbole ordinaire, ont une ligne droite pour asymptote; elles répondent au cas où $y' = Bx + A$. Lorsque $B = 0$, l'asymptote est parallèle à l'axe des abscisses, ainsi qu'on l'a vu dans l'exemple du n° précédent, et elle se confond avec cet axe quand B et A sont nuls.

L'équation $y' = Cx^2 + Bx + A$, la plus simple après $y = Bx + A$, appartient à la parabole; et comme elle est comprise dans l'équation générale $y' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha}$, on nomme *paraboliques* les courbes que cette dernière représente; et les branches dont elles sont les asymptotes, dans une courbe quelconque, s'appellent *branches paraboliques*.

Les deux branches AX et FV données par les séries (3) et (4) du n° 199, sont paraboliques, puisque leur asymptote, qui a pour équation $y' = \pm a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a$, est une courbe parabolique.

On trouvera les branches infinies dans lesquelles y seul devient infini, en cherchant les séries qui expriment la valeur de x, lorsque y est très-grand.

204. Si dans la série (I) on fait successivement

$$y' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha},\quad y'' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} + B'x^{-\beta'},$$
$$y''' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} + B'x^{-\beta'} + C'x^{-\gamma'},\ \text{etc.},$$

les quantités y', y'', etc., approcheront de plus en plus de la valeur de y; et par conséquent les courbes dont elles expriment les ordonnées s'approcheront aussi sans cesse de la branche infinie à laquelle appartient la série (I). Ces courbes seront en nombre infini, si la série (I) est infinie; et dans ce cas la branche qu'elle représente aura une infinité d'*asymptotes courbes*. Cependant cette dénomination est plus particulièrement affectée à la courbe dont l'ordonnée est y', parce qu'elle est unique et qu'elle est elle-même l'asymptote de toutes les autres.

Lorsque la branche que l'on considère est hyperbolique, ou qu'on a $y' = Bx + A$, la première asymptote courbe est donnée par l'équation $y'' = Bx + A + B'x^{-\beta'}$, qu'on peut ramener à une forme très-simple, en changeant la position de l'axe des abscisses. Si on y substitue mt pour x, $nt + u + b$ pour y'' (182), et qu'on fasse $n = Bm$, $b = A$, elle deviendra $u = B'm^{-\beta'}t^{-\beta'}$; et à cause que les coordonnées x et y sont perpendiculaires entre elles, on aura $m^2 + n^2 = 1$, d'où

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 + B^2}} \quad \text{et} \quad n = \frac{B}{\sqrt{1 + B^2}}.$$

Il faut remarquer que l'équation $u = B'm^{-\beta'}t^{-\beta'}$ comprend comme cas particulier l'équation $u = Pt^{-1}$, qui appartient à l'hyperbole ordinaire rapportée à ses asymptotes, et que les courbes qu'elle représente ont aussi pour asymptotes l'axe des t et celui des u, puisque t devient nul lorsque u est infini, et réciproquement. Ces courbes sont connues sous le nom d'*hyperboles des degrés supérieurs*.

En exécutant sur la série (I), la transformation précédente, on trouvera $u = B'm^{-\beta'}t^{-\beta'} + C'm^{-\gamma'}t^{-\gamma'} + \text{etc.}$; la branche qu'elle représente aura pour asymptote droite l'axe des t, et pour asymptote courbe l'hyperbole donnée par l'équation $u = B'm^{-\beta'}t^{-\beta'}$.

Il suffit de connaître le premier terme de la série (I), pour juger si la branche à laquelle elle appartient est *hyperbolique* ou *parabolique*. Le second cas aura lieu toutes les fois que ce terme sera de la forme Cx^{γ}, γ étant un nombre quelconque, mais positif et différent de l'unité. Cependant l'existence de la branche ne sera certaine que lorsqu'on n'aura point à craindre qu'aucun des termes de la série devienne imaginaire (202), ce dont on ne peut répondre qu'après être parvenu à des termes dont la loi de succession soit évidente.

Le nombre et la nature des branches infinies forment les caractères les plus propres à distinguer entre elles les lignes d'un même ordre; Euler et Cramer s'en sont servis pour partager celles du troisième et du quatrième ordres en grandes familles, auxquelles ils ont donné le nom de *genres*, et qu'ils ont subdivisées en *espèces*, par la considération des points singuliers. Newton, dans le troisième degré seulement, a indiqué 73 espèces de courbes : les géomètres cités plus haut en ont trouvé quelques-unes de plus, et ils ont reconnu que le détail analogue pour les courbes du quatrième degré, était si considérable qu'on ne pouvait guère se flatter de l'épuiser; mais toutes ces divisions, souvent assez arbitraires, sont inutiles; car la solution analytique des problèmes conduisant à l'équation des courbes qu'il importe de considérer, on n'a besoin que de savoir discuter cette équation, ce qui peut toujours se faire par les méthodes exposées précédemmment, et avec encore plus de facilité, en s'aidant du calcul différentiel, comme on va le voir.

205. Le Calcul différentiel fournit un moyen très-simple et très-élégant, d'appliquer à un point quelconque les considérations par lesquelles

Usage du Calcul différentiel pour trouver les tangentes des courbes.

nous avons déterminé la tangente du point situé à l'origine des coordonnées, sur la courbe que représente l'équation $ax^3 + x^2y - ay^3 = 0$ (197). En effet, si x et y désignent les coordonnées du point qu'on veut considérer, et que l'on substitue $x+h$ pour x, et $y+k$ pour y, dans l'équation proposée, on pourra regarder h et k comme de nouvelles coordonnées ayant leur origine à ce point; et le théorème de Taylor donnera l'expression de k en série ascendante, suivant les puissances de h, savoir:

$$k = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \ldots \quad (20),$$

série d'autant plus convergente que la quantité h sera plus petite, et pour abréger, je la représenterai par $k = Ph + Qh^2 + Rh^3 + \text{etc.}$ Cela posé, le coefficient du premier terme de cette série détermine la position de la tangente; car il est aisé de prouver qu'une droite, dont l'équation rapportée à la nouvelle origine serait $k' = Ph$, touche à ce point la courbe proposée; c'est-à-dire, qu'*aucune droite menée par ce point ne peut, immédiatement avant et après le contact, passer entre elle et la*
FIG. 27 et 28. *courbe*. En effet, soient M, *fig.* 27 et 28, le point donné sur la courbe proposée, et MN' la droite dont il s'agit; h et k représenteront les coordonnées MQ et QN d'un second point de la courbe, k' l'ordonnée correspondante, QN', de la droite, et l'on aura

$$NN' = QN - QN' = k - k' = Qh^2 + Rh^3 + \text{etc.};$$

et en désignant par $k'' = Ah$ l'équation d'une autre droite MZ, on trouvera $N'N'' = QN' - QN'' = k' - k'' = (P - A)h$. Or, tant qu'aucun des coefficiens P, Q, R, etc. ne devient infini, on peut toujours prendre h, soit positivement, soit négativement, d'une petitesse telle que la somme de tous les termes $Qh^2 + Rh^3 + \text{etc.}$ soit moindre que la quantité $(P - A)h$; dans cette hypothèse NN' sera moindre que $N'N''$, et nn' moindre que $n'n''$: la droite MZ ne pourra donc, quel que soit A, passer entre la courbe MX et la droite MT, dans l'espace $N''n''$.

Pour rapporter l'équation de la droite MT aux axes primitifs AB et AC, il faut considérer que les coordonnées de l'un quelconque de ses points, par rapport à l'origine primitive A, seront respectivement $x + h$ et $y + k$; et en les représentant par x' et y', il viendra

$$h = x' - x, \qquad k' = y' - y:$$

on aura ainsi

$$y' - y = P(x' - x), \quad \text{ou} \quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

en remplaçant P par le coefficient différentiel qu'il représente, et qui exprime, comme l'on voit, la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec l'axe des abscisses, la droite qui touche la courbe.

206. Le coefficient du second terme de la série $k = Ph + Qh^2 +$ etc. fait en général connaître la position de la courbe à l'égard de sa tangente et de l'axe des abscisses; car le signe de la quantité $NN' = k - k' = Qh^2 + Rh^3 +$ etc. ne dépend que de celui de Q, tant que l'on donne à h une valeur assez petite pour que le terme Qh^2 surpasse la somme de tous ceux qui le suivent; et il est visible que la courbe sera en dehors de sa tangente, par rapport à l'axe des abscisses, si NN' est de même signe que PM, et en dedans si NN' et PM sont de signes différens. Dans le premier cas, la courbe proposée présentera sa convexité à l'axe des abscisses, *fig.* 27, et dans le second, sa concavité, *fig.* 28. On peut donc juger par le signe de Q, ou celui du coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$, comparé à celui de l'ordonnée, comment est tournée, dans un point quelconque, par rapport à la ligne des abscisses, la concavité d'une courbe dont on a l'équation.

Il est à propos de remarquer que le Calcul différentiel n'entre dans toutes ces recherches que comme un procédé purement analytique, que pourrait remplacer, d'une manière moins commode à la vérité, toute autre méthode propre à donner le développement de k. Arbogast présenta le premier sous ce point-de-vue l'application du Calcul différentiel à la théorie des courbes, et M. Lagrange y fut conduit aussi par sa manière d'envisager ce calcul (16).

207. La manière la plus simple de construire la tangente pour un point donné sur la courbe, est d'en chercher un second point; on choisit ordinairement le point T, où elle rencontre l'axe des abscisses. Il est évident que pour trouver AT, il faut faire $y' = 0$ dans l'équation $y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$; et on en tirera

$$AT = x' = x - y\frac{dx}{dy},$$

en observant que lorsque y est fonction de x, et réciproquement, $\frac{dx}{dy}$ est l'inverse de $\frac{dy}{dx}$ (57). Si on retranche AT de AP, il en résultera l'expression de la *soutangente* PT; on aura donc $PT = y\frac{dx}{dy}$.

208. Voici maintenant quelques applications des formules trouvées ci-dessus.

1°. Soit l'équation de la parabole $y^2 = mx$; on en tirera $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{2y}$, et l'équation de la tangente deviendra

$$y' - y = \frac{m}{2y}(x' - x);$$

en réduisant au même dénominateur, et en mettant pour y^2 sa valeur mx, on trouvera $2y'y = m(x' + x)$. Si on fait $y' = 0$, on aura $x' = AT = -x$, et par conséquent $PT = 2x$, résultats conformes à ceux du n° 186; on peut aussi calculer immédiatement AT et PT, en substituant dans leur expression la valeur de $\frac{dx}{dy}$ et celle de y.

2°. Pour le cercle dont l'équation serait $x^2 + y^2 = a^2$, on aurait $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y' - y = -\frac{x}{y}(x' - x)$, ou $y'y + x'x = x^2 + y^2$, ou enfin $y'y + x'x = a^2$; on trouvera ensuite $AT = \frac{a^2}{x}$, $PT = -\frac{a^2 - x^2}{x}$.

3°. L'équation $y^2 = mx + nx^2$, qui représente toutes les courbes du second degré, donne $\frac{dy}{dx} = \frac{m + 2nx}{2y}$, et par conséquent la soutangente PT devient $\frac{2y^2}{m + 2nx}$; substituant au lieu de y^2 sa valeur, on aura $PT = \frac{2(mx + nx^2)}{m + 2nx}$.

4°. Enfin on tire de l'équation

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

l'équation de la tangente deviendra

$$y'y^2 - axy' - y^3 + axy = ax'y - x'x^2 - axy + x^3,$$

et mettant pour y^3 sa valeur, on aura, en réduisant,

$$y'(y^2 - ax) + x'(x^2 - ay) = axy:$$

on trouvera aussi $PT = \frac{y^3 - axy}{ay - x^2} = \frac{2axy - x^3}{ay - x^2}$.

209. Pour mener une tangente à une courbe, par un point extérieur donné, il faut observer que les coordonnées de ce point doivent, conjointement avec celles du point de contact, satisfaire à l'équation générale des tangentes à cette courbe; ensorte que si α et β désignent les

valeurs de x' et de y' au point donné, on aura l'équation $\beta-y=\frac{dy}{dx}(\alpha-x)$, dans laquelle les coordonnées x et y du point de contact seront des inconnues à déterminer, en s'aidant de l'équation de la courbe proposée, à laquelle elles doivent aussi satisfaire.

Prenons pour premier exemple la parabole dont l'équation est $y^2=mx$; celle de sa tangente étant $2y'y=m(x'+x)$, deviendra $2\beta y=m\alpha+mx$, et donnera $y=m\frac{(\alpha+x)}{2\beta}$; le point dans lequel la droite représentée par cette équation rencontrera la parabole, sera le point de contact cherché.

L'équation à la tangente du cercle étant $y'y+x'x=a^2$ (n° précéd.), on aura pour cette courbe $\beta y+\alpha x=a^2$.

Enfin dans la courbe dont l'équation est $x^3-3axy+y^3=0$, le point de contact se trouverait en cherchant l'intersection de cette courbe avec celle du second degré donnée par l'équation

$$\beta(y^2-ax)+\alpha(x^2-ay)=axy.$$

210. Pour mener une droite qui touche une courbe donnée, et qui soit en même temps parallèle à une droite donnée de position, ou qui fasse, avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente soit représentée par a, il suffira de poser $\frac{dy}{dx}=a$ (205); combinant cette équation avec celle de la courbe proposée, on déterminera les valeurs de x et de y qui conviennent au point de contact demandé.

Dans le cas où cette courbe serait la parabole ordinaire, on aurait $\frac{m}{2y}=a$, ce qui donnerait $y=\frac{m}{2a}$ et $x=\frac{m}{4a^2}$.

Si on prend $a=1$, il vient $y=\frac{m}{2}$, $x=\frac{m}{4}$; d'où il suit que la tangente menée à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le foyer de la parabole, fait avec l'axe des abscisses un angle de $0^q,5$, et que sa direction tient le milieu entre celle de la tangente au sommet, qui est perpendiculaire sur cet axe, et la limite des directions des tangentes, qui tendent sans cesse à devenir parallèles au même axe, puisque le coefficient différentiel, $\frac{dy}{dx}=\frac{m}{2y}$, s'évanouit lorsque y est infini.

211. La partie MT de la tangente, comprise entre le point de contact et l'axe des abscisses, est facile à déterminer lorsqu'on connaît la

soutangente PT et l'ordonnée PM, car on a $\overline{TM}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{PM}^2$; mais on peut la calculer immédiatement, au moyen de son expression générale, qu'on trouvera en mettant pour PT et PM leurs valeurs $y\frac{dx}{dy}$ et y, ce qui donnera

$$TM = \sqrt{y^2 + y^2\frac{dx^2}{dy^2}} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

En appliquant cette formule à la parabole, on trouve

$$TM = y\sqrt{1 + \frac{4y^2}{m^2}} = \frac{y}{m}\sqrt{m^2 + 4y^2};$$

et remplaçant y par sa valeur $\sqrt{mx}$, il vient $TM = \sqrt{mx + 4x^2}$.

212. La relation qui existe entre les équations de deux droites perpendiculaires passant par le même point, appliquée à l'équation de la tangente (205), donne pour celle de la ligne MR, perpendiculaire à MT,

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$

Si, pour construire cette perpendiculaire, on veut avoir le point R où elle rencontre l'axe des abscisses, on fera $y' = 0$, et il viendra $AR = x' = y\frac{dy}{dx} + x$: retranchant AP ou x, de AR, on aura $PR = y\frac{dy}{dx}$.

Le triangle rectangle PRM donnant $\overline{MR}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PM}^2$, on en déduira $MR = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$.

La ligne MR a reçu le nom de *normale*, ou de *perpendiculaire* à la courbe, et la partie PR de l'axe des abscisses s'appelle la *sounormale*.

Dans la parabole on a

$$MR = y\sqrt{1 + \frac{m^2}{4y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 + m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4mx + m^2}, \text{ et } PR = \frac{m}{2}.$$

Dans le cercle $MR = y\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = a$, et $PR = -x$; par conséquent $AR = 0$: et en effet, la normale d'un cercle n'est autre chose que le rayon, dont la valeur est constante et qui passe toujours par le centre.

S'il fallait mener la normale par un point pris hors de la courbe, ou parallèlement à une ligne donnée, on opérerait comme on a fait pour la tangente (209).

213. En rapprochant les résultats trouvés dans les numéros précédens, nous aurons

$$AT = x - y\frac{dx}{dy}, \quad PT = y\frac{dx}{dy}, \quad MT = y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}},$$
$$AR = x + y\frac{dy}{dx}, \quad PR = y\frac{dy}{dx}, \quad MR = y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

et pour appliquer ces formules à une courbe quelconque, il suffira d'y substituer la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ou celle de $\frac{dx}{dy}$, tirée de l'équation différentielle; on chassera ensuite, à l'aide de l'équation primitive, celle des coordonnées x ou y qu'on voudra.

On trouvera ainsi, pour les lignes du second degré, d'après l'équation $y^2 = mx + nx^2$,

$$AT = -\frac{mx}{m+2nx}; \quad PT = \frac{2(mx+nx^2)}{m+2nx},$$
$$MT = \sqrt{mx+nx^2+4\left(\frac{mx+nx^2}{m+2nx}\right)^2},$$
$$AR = x+\frac{m+2nx}{2}, \quad PR = \frac{m+2nx}{2},$$
$$MR = \sqrt{mx+nx^2+\tfrac{1}{4}(m+2nx)^2}.$$

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les coordonnées x et y étaient perpendiculaires entre elles: mais il est aisé de voir que quand même elles feraient un angle quelconque, l'équation de la tangente ne changerait pas de forme, non plus que les valeurs de AT et de PT, qui en sont immédiatement déduites; à l'égard de MT, de MR et de PR, on trouverait leur expression par le moyen des triangles MTP, MTR et MPR, dans lesquels on connait ou un angle et deux côtés, ou deux angles et un côté.

214. En cherchant les positions que prend la tangente d'une courbe proposée, lorsque le point de contact s'éloigne de plus en plus de l'origine des coordonnées, on peut reconnaître si cette courbe a des asymptotes, et déterminer leur position.

FIG. 29. On voit en effet que dans une courbe MX, *fig.* 29, qui a une asymptote droite RS, à mesure que le point M s'éloigne de l'origine, la tangente MT s'approche de l'asymptote, et les points T et D marchent respectivement vers les points R et E, ensorte que AR et AE sont des limites que les valeurs de AT et de AD ne sauraient franchir, ni même atteindre, mais dont elles peuvent différer aussi peu qu'on voudra. Il suit de là que pour trouver si une courbe a des asymptotes, il faut chercher si les expressions de AT et de AD, relatives à cette courbe, sont susceptibles de limites finies, et lorsque cela arrivera, ces limites étant construites, donneront les deux points R et E, par lesquels on mènera la droite RS, qui sera l'asymptote demandée.

Nous avons déjà calculé (207) l'expression de AT; quant à celle de AD, on la trouvera en faisant $x'=0$, dans l'équation de la tangente, et il en résultera $AD=y'=y-x\frac{dy}{dx}$.

Appliquons ce qui précède à l'équation $y^2=mx+nx^2$, nous en tirerons

$$AT=x-y\frac{dx}{dy}=x-\frac{2y^2}{m+2nx}=\frac{-mx}{m+2nx},$$

$$AD=y-x\frac{dy}{dx}=y-\frac{mx+2nx^2}{2y}=\frac{mx}{2\sqrt{mx+nx^2}};$$

les derniers membres de ces équations peuvent être mis sous les formes $\frac{-m}{\frac{m}{x}+2n}$ et $\frac{m}{2\sqrt{\frac{m}{x}+n}}$: par conséquent leurs limites respectives, dans le cas où on suppose x infini, sont $-\frac{m}{2n}=AR$ et $\frac{m}{2\sqrt{n}}=AE$.

Si n était nulle, les expressions de AT et de AD deviendraient infinies en même temps que x, et la courbe proposée n'aurait point d'asymptotes; elle n'en aura pas non plus, lorsque n sera négative, parce qu'alors son équation n'admettra point pour x une valeur infinie.

Considérons encore la courbe représentée par l'équation

$$x^3-3axy+y^3=0;$$

on a dans cette courbe

$$AT=\frac{axy}{x^2-ay},\quad AD=\frac{axy}{y^2-ax}.$$

Pour trouver la limite vers laquelle tendent ces expressions, à mesure que x augmente, il faudrait substituer au lieu de y sa valeur en x, ou du moins le premier terme de chacune des séries descendantes que l'on tirerait de l'équation proposée; mais on peut suppléer à ces résultats dans l'exemple présent, par un artifice analytique fort simple. Si on fait $x=ty$, l'équation proposée deviendra divisible par y^2, et l'on en déduira $y=\frac{3at}{1+t^3}$. Il est facile de voir maintenant que la supposition de $t=-1$, rendra y infini, et donnera $x=-y$; en changeant x en $-y$ dans les expressions de AT et de AD, et prenant les limites (*Introd.* n^{os} 10 et suiv.), on aura $AR=-=a=AE$. Menant donc par les points R et E, *fig.* 30, construits avec les valeurs précédentes, la droite ER, elle sera l'asymptote des branches AY et AZ. FIG. 30.

Si l'une des quantités AT ou AD, *fig.* 29, restant finie, l'autre devenait infinie, il est évident que l'asymptote serait parallèle à l'axe sur lequel se trouve cette dernière. Pour ne manquer aucune des asymptotes que doit avoir la courbe proposée, il faut faire successivement x infini et y infini, et substituer dans les expressions de AT et de AD, chacun des résultats différens que donnent l'une et l'autre hypothèse. Lorsque ces expressions deviendront infinies en même temps, on en conclura que la courbe proposée n'a pas d'asymptotes. Il pourrait arriver que ces quantités fussent toutes deux nulles: dans ce cas la courbe aurait pour asymptote une droite menée par l'origine des coordonnées; mais comme on n'en connaîtrait alors qu'un point, il faudrait en chercher la direction, et pour cela on prendrait la limite de l'expression $\frac{dy}{dx}$, qui représente la tangente de l'angle MTB pour un point quelconque de la courbe, et on aurait la tangente de l'angle SRB. FIG. 29.

215. Après avoir montré l'usage des différentielles dans la recherche des tangentes, il me paraît convenable de faire voir comment ces fonctions servent à exprimer des relations entre les coordonnées d'une courbe, la longueur de ses arcs, et l'étendue des aires qu'elle embrasse, relations qui, le plus souvent, sont transcendantes entre les fonctions primitives, et dont la connaissance nous sera utile par la suite. Expression des différentielles de l'arc et de l'aire d'une courbe.

On a supposé, dans un grand nombre de livres, comme une chose évidente, qu'*un petit arc de courbe peut être pris pour sa corde*, c'est-à-dire que *le rapport de l'arc et de sa corde a pour limite l'unité*; cette proposition très-importante a néanmoins besoin d'être démontrée (*). On peut y parvenir de plusieurs manières; la suivante m'a paru la plus analytique.

FIG. 32. Le triangle rectangle $MM'Q$, *fig.* 32, donne pour la corde de l'arc MOM',

$$MM' = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2};$$

or, en prenant $MQ = h$, on a

$$M'Q = k = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

développement que l'on peut mettre sous la forme

$$(p + Ph)\,h,$$

en faisant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^2}{1.2.3} + \text{etc.} = Ph;$$

et il est à propos de remarquer que la quantité P est toujours comprise entre des limites assignables (172). D'après ces dénominations, il vient

$$MM' = \sqrt{h^2 + (p+Ph)^2h^2} = h\sqrt{1 + (p+Ph)^2};$$

menant ensuite la tangente MN, on trouvera

$$NQ = MQ.\text{tang}\,NMQ = \frac{dy}{dx}h = ph \ (205),$$

$$MN = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{NQ}^2} = \sqrt{h^2 + p^2h^2} = h\sqrt{1+p^2},$$

$$M'N = NQ - M'Q = -\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - \text{etc.} = -Ph^2;$$

(*) Newton lui-même en a jugé ainsi. *Voyez* le lemme VI du premier livre des *Principes*. En effet, ce n'est pas à cause que l'arc et la corde s'évanouissent en même temps, qu'il est permis de les prendre l'un pour l'autre, puisque deux quantités peuvent avoir en s'évanouissant des rapports très-différens de l'unité, mais parce qu'on peut toujours inscrire dans un segment de courbe un angle aussi approchant de deux droits que l'on voudra.

FIG. 31. Ayant pris, par exemple, deux cordes AB et AC, *fig.* 31, égales, puis deux cordes AD et AE, encore égales, mais plus petites que les premières, l'angle DAE surpassera l'angle BAC; si maintenant on tire les cordes BC et DE, on aura

$$\frac{BC}{AB+AC} = \frac{2BP}{2AB} = \sin BAP, \quad \frac{DQ}{AD} = \sin DAQ;$$

les angles BAP et DAQ augmentent sans cesse et tendent à devenir droits, et les lignes brisées, à mesure que leur angle s'ouvre, tendent à devenir égales aux droites qui joignent leurs extrémités.

et on conclura de là

$$\frac{MN+M'N}{MM'}=\frac{h\sqrt{1+p^2}-Ph^2}{h\sqrt{1+(p+Ph)^2}}=\frac{\sqrt{1+p^2}-Ph}{\sqrt{1+(p+Ph)^2}}.$$

Ce rapport, lorsque $h=0$, a pour limite

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}=1;$$

mais un arc comme MOM', dont la concavité est tournée du même côté dans toute son étendue, est évidemment compris entre la corde MM' et la ligne brisée $MN+M'N$; donc à plus forte raison le rapport $\frac{MOM'}{MM'}$ a-t-il pour limite l'unité.

On voit aussi qu'il en est de même du rapport de l'arc MOM' à la partie MN de la tangente comprise entre les deux ordonnées PM et $P'M'$, puisque l'expression

$$\frac{MN}{MM'}=\frac{h\sqrt{1+p^2}}{h\sqrt{1+(p+Ph)^2}}$$

a pour limite l'unité; mais cette circonstance n'a lieu que parce que les ordonnées sont menées perpendiculairement à l'axe des abscisses (*).

216. Ce qu'on vient de voir mène à l'expression de la différentielle de l'arc d'une courbe par celles de son abscisse et de son ordonnée.

(*) M. Lagrange (*Théorie des fonctions analytiques*) a fait remarquer que *la longueur de l'arc d'une courbe, quand sa concavité demeure tournée du même côté, est comprise entre les parties que les ordonnées qui le terminent, interceptent sur la tangente la plus inclinée, et sur celle qui l'est le moins.*

En effet, l'arc MOM', *fig.* 33, étant plus grand que la corde MM', surpasse à plus forte raison la tangente $M'N'$, qui, faisant un plus grand angle que cette corde avec les ordonnées parallèles PM et $P'M'$, s'approche plus de la perpendiculaire menée entre ces ordonnées : d'un autre côté, le même arc est moindre que la ligne brisée MGM' qui l'enveloppe, et celle-ci est moindre que MN, puisque GM' est moindre que GN, comme étant opposé dans le triangle $M'GN$ à l'angle GNM', moindre que $GM'N$. FIG. 33.

On conclut aisément de là, que la limite du rapport entre l'arc et la corde est l'unité; car il est visible que la valeur de p pour le point M', sera de la forme $p+Qh$, et que par conséquent les rapports de MM' à MN et à $M'N'$, qui, d'après ce qu'on vient de voir, comprennent celui de MM' à MOM'; ont tous deux l'unité pour limite.

Il est d'abord évident que l'arc DM variant de grandeur avec l'abscisse AP, est une fonction de cette abscisse. Soit donc s cette fonction lorsque x se change en $x+h$, elle deviendra

$$s+\frac{ds}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2s}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3s}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

et par conséquent on aura

$$MOM'=\frac{ds}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2s}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3s}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

mais MOM' étant toujours compris entre MM' et $MN+NM'$, son développement le sera aussi entre ceux des expressions

$$h\sqrt{1+(p+Ph)^2} \quad \text{et} \quad h\sqrt{1+p^2}-Ph^2.$$

Celui de la première reste seul à effectuer ; et comme

$$\begin{aligned} h\sqrt{1+(p+Ph)^2} &= h\{1+p^2+2Pph+P^2h^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= h\{1+p^2+h(2Pp+P^2h)\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

en développant la puissance fractionnaire indiquée, on obtient un résultat de la forme

$$h(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+Qh^2,$$

ayant le même premier terme que $h\sqrt{1+p^2}-Ph^2$, il suit du nº 40 de l'Introduction, que le développement de la quantité intermédiaire MOM' aura également $h\sqrt{1+p^2}$ pour premier terme : ainsi

$$\frac{ds}{dx}h=h\sqrt{1+p^2}=h\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

et par conséquent

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}, \qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

En appliquant cette formule au cercle, dont l'équation

$$x^2+y^2=a^2$$

donne

$$xdx + ydy = 0, \quad \text{d'où} \quad dy = -\frac{xdx}{y},$$

il vient

$$ds = \sqrt{dx^2 + \frac{x^2dx^2}{y^2}} = \frac{dx}{y}\sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \frac{adx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

résultat qui rentre dans celui du n° 58, lorsqu'on y change x en y, et qu'on fait $a=1$.

217. Je placerai ici, comme une recherche analogue à la précédente, celle de la différentielle du *segment* $DAPM$, *fig.* 32, de l'aire d'une courbe, compris entre deux ordonnées, dont la première, DA, est supposée fixe, et la dernière, PM, varie avec l'abscisse AP. L'étendue de l'espace $DAPM$ étant déterminée par cette abscisse, en est une fonction; et en la représentant par z, on aura l'aire $DAP'M'$, correspondante à l'abscisse $AP' = x + h$, pour le développement FIG. 32. 34

$$z + \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

d'où, retranchant l'espace primitif $DAPM$, il restera

$$PMM'P' = \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Cela posé, l'espace $PMM'P'$ est toujours compris entre les rectangles $PMQP'$ et $PRM'P'$, dont le premier a pour expression $\overline{PM}.\overline{PP'} = yh$, et le second,

$$\overline{P'M'}.\overline{PP'} = \left(y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}\right)h:$$

c'est donc entre les fonctions

$$yh \quad \text{et} \quad yh + \frac{dy}{dx}\frac{h^2}{1} + \text{etc.},$$

que doit se trouver compris le développement

$$\frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

et ces fonctions ayant le même premier terme yh, il faudra par conséquent que

$$\frac{dz}{dx}h = yh, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx} = y, \quad dz = y\,dx.$$

Dans le cercle où $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, il viendra

$$dz = dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

J'observerai en passant que l'on pourrait se servir de cette différentielle pour former, au moyen du théorème de Taylor, le développement de l'aire du segment; mais ce moyen conduirait à des calculs assez longs et peu symétriques.

Des contacts des courbes; des lignes osculatrices.

218. Quoiqu'on ne puisse mener aucune droite entre une courbe et sa tangente, on y peut néanmoins faire passer une infinité de lignes courbes différentes, qui toucheront toutes la courbe proposée, et seront touchées par sa tangente. La série de Taylor, en l'arrêtant successivement à chacun de ses termes, fournit elle-même une suite indéfinie de courbes qui jouissent de cette propriété.

En effet, si dans la série

$$k = Ph + Qh^2 + Rh^3 + Sh^4 + \text{etc.},$$

on fait successivement

$$\begin{aligned} k' &= Ph, \\ k'' &= Ph + Qh^2, \\ k''' &= Ph + Qh^2 + Rh^3, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

FIG. 35. k' sera l'ordonnée de la tangente, prise par rapport à l'axe MB', *fig.* 35, la nouvelle origine étant en M; k'' sera l'ordonnée d'une parabole passant aussi par le point M et déterminée par la valeur que prennent les quantités P et Q pour ce point; k''' sera encore l'ordonnée d'une courbe parabolique de l'ordre supérieur à celui de la précédente, et ainsi de suite. Toutes ces courbes auront la même tangente que la proposée, puisque

$$P = \frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dh} = \frac{dk'}{dh} = \frac{dk''}{dh} = \frac{dk'''}{dh};$$

et si on prend la différence entre les ordonnées de ces courbes et celle de la proposée, il viendra

$$\begin{aligned} NN' &= k - k' = Qh^2 + Rh^3 + Sh^4 + \text{etc.},\\ NN'' &= k - k'' = \qquad\quad Rh^3 + Sh^4 + \text{etc.},\\ NN''' &= k - k''' = \qquad\qquad\qquad Sh^4 + \text{etc.}; \end{aligned}$$

d'où il suit que l'abscisse h étant prise assez petite pour qu'un terme quelconque de la série qui exprime la valeur de k, soit plus grand que la somme de tous les suivans, alors NN'' sera moindre que NN', NN''' moindre que NN'', etc., et quand on fera h négative, on trouvera de même $nn'' < nn'$, $nn''' < nn''$, etc. La courbe MY'' passe donc entre la tangente MY' et la courbe proposée MX; de même la courbe MY''' passe entre MY'' et MX, etc., et chacune des lignes MY', MY'', MY''', etc. s'approchant plus de la courbe proposée que celle qui la précède, peut être regardée comme ayant un contact plus parfait, ou d'un *ordre supérieur* à celui du contact qui se trouve entre ces deux dernières. Il est visible que l'ordre du contact est marqué par le nombre de termes qui sont communs au développement de k et à l'équation de la courbe touchante.

Les courbes MY'', MY''', etc. jouissent toutes d'une propriété analogue à celle qui forme le caractère de la tangente (205) : de même qu'entre cette ligne et la courbe, on ne peut faire passer aucune autre droite, de même entre la parabole MY'' et la courbe MX, on ne peut faire passer aucune parabole du second ordre, dont l'équation serait de la forme

$$k_{,} = Ah + Bh^2;$$

car tant que A et B différeront de P et de Q, on aura

$$k - k_{,} = (P - A)h + (Q - B)h^2 + Rh^3 + \text{etc.};$$

et cette expression, lorsqu'on prendra h très-petite, surpassera, soit positivement, soit négativement, celle de $k - k''$ qui commence par une puissance de h plus élevée. Si on avait $A = P$, quelque valeur qu'ait d'ailleurs le coefficient B, la parabole donnée par l'équation $k_{,} = Ph + Bh^2$, aurait la même tangente que la proposée MX, et la toucherait par conséquent ; mais elle passerait en dehors de la seconde parabole puisque l'expression de $k - k_{,}$ commencerait encore par une puissance de h moins élevée que la 3^e. Il suit de là que l'équation

$$k_{,} = Ah + Bh^2$$

comprend une infinité de paraboles, qui peuvent avoir un contact du premier ordre, avec une courbe donnée, mais qu'il n'y en a qu'une seule qui puisse en avoir un du second; pour distinguer cette dernière de toute autre, nous la nommerons *parabole osculatrice*. On verra de même que parmi les courbes paraboliques représentées par l'équation

$$k_{\prime\prime\prime} = Ah + Bh^2 + Ch^3,$$

il y en aura une infinité qui auront avec la courbe MX des contacts du premier et du second ordre; mais qu'une seule, savoir celle où $A = P$, $B = Q$, $C = R$, peut en avoir un du troisième: elle sera donc la deuxième parabole osculatrice, et ainsi des autres.

Lorsque la courbe proposée ne subit pas d'inflexion au point qu'on considère, elle se trouve du même côté de la tangente, immédiatement avant et après le contact, mais il n'en est pas ainsi à l'égard de la première parabole osculatrice; car la différence NN'', dont le signe peut toujours dépendre de son premier terme Rh^3, en prenant h convenablement, change de signe en même temps que cette quantité, ce qui prouve que la courbe MY'' passe d'un côté à l'autre de la courbe MX: il y a donc en quelque sorte contact et intersection entre ces deux courbes. Si on avait de la peine à concevoir cette circonstance, il faudrait se rappeler que dans un point d'inflexion, la tangente coupe la courbe proposée, et ne la touche pas moins pour cela. Pareille chose arrivera dans tous les contacts d'un ordre pair; mais dans les contacts d'ordre impair, les deux courbes ne feront que se toucher.

219. Je ferai remarquer en passant, que les différences entre les ordonnées correspondantes des diverses courbes paraboliques que je viens de considérer, répondent aux termes successifs de la série de Taylor, et en donnent la grandeur linéaire; car on a

$$QN' = k' = Ph = \frac{dy}{dx}\,\frac{h}{1},$$

$$QN'' - QN' = k'' - k' = Qh^2 = \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{h^2}{1.2},$$

$$QN''' - QN'' = k''' - k'' = Rh^3 = \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{h^3}{1.2.3},$$

etc.:

je me bornerai ici à indiquer les données de la construction de la première parabole osculatrice.

Son équation

$$k'' = Ph + Qh^2$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{Q}\left\{k' + \frac{P^2}{4Q}\right\} = \left(h + \frac{P}{2Q}\right)^2,$$

et on voit alors que les coordonnées de son sommet sont

$$-\frac{P^2}{4Q}, \text{ ou } -\frac{dy^2}{2d^2y}, \text{ dans le sens des } y;$$

$$-\frac{P}{2Q}, \text{ ou } -\frac{dydx}{d^2y}, \text{ dans celui des } x;$$

que son axe est parallèle aux y, et qu'elle a pour paramètre $\dfrac{1}{\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}}$.

220. Les courbes du genre parabolique ne sont pas les seules qui puissent être osculatrices. Si on conçoit qu'une courbe quelconque que je désignerai, ainsi que son équation, par (V'), passe par le point M, et ait par conséquent à ce point les mêmes coordonnées AP et PM que la proposée, et qu'on représente par K l'ordonnée de cette courbe relative à l'axe MB' et à l'abscisse $MQ = h$, en substituant dans son équation $x' + h$, $y' + K$ à la place de ses coordonnées primitives x' et y', on trouvera pour K une série de la forme

$$K = P'h + Q'h^2 + R'h^3 + S'h^4 + \text{etc.},$$

où il faudra faire ensuite $x' = x$, et $y' = y$, pour placer au point M la nouvelle origine; et il viendra par conséquent

$$k - K = (P - P')h + (Q - Q')h^2 + (R - R')h^3 + (S - S')h^4 + \text{etc.}$$

Lorsque P' sera égal à P, cette courbe aura la même tangente que la proposée, et dans ce cas, elles se toucheront l'une et l'autre. On voit aussi que tant que Q et Q' ne seront pas de signe contraire, la seconde courbe passera entre la courbe proposée et sa tangente, car $k - K$ étant réduit alors à $(Q - Q')h^2 + (R - R')h^3 + \text{etc.}$ sera moindre que $k - K = Qh^2 + Rh^3 + \text{etc.}$, quand l'abscisse h sera prise de manière que le premier terme de chacune de ces séries surpasse tous ceux qui le suivent. La différence $Q - Q'$, comparée à Q, fera connaître la situation respective de la courbe touchante (V'), à l'égard de la courbe proposée et de sa tangente. Le contact de la courbe proposée avec la courbe (V') serait du second ordre, si on avait en même temps $P - P' = 0$, $Q - Q' = 0$; du troisième, si on avait $P - P' = 0$, $Q - Q' = 0$, $R - R' = 0$; et en général de l'ordre marqué par le nombre de coefficiens qui s'évanouissent dans l'expression de $k - K$.

Pour un point quelconque de la courbe (V'), les coefficiens

$$P' = \frac{dy'}{dx'}, \quad Q' = \frac{1}{1.2}\frac{d^2y'}{dx'^2}, \quad R' = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y'}{dx'^3}, \quad \text{etc.}$$

sont des fonctions données de x', de y' et des constantes qui entrent dans son équation; et comme au point M, x' et y' se changent en x et y, et que les coefficiens

$$P = \frac{dy}{dx}, \quad Q = \frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}, \quad R = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}, \quad \text{etc.}$$

sont des fonctions de x et de y, les équations $P - P' = 0$, $Q' - Q = 0$, etc. ne renfermeront que les constantes dont on vient de parler, et les coordonnées du point M, et ne seront satisfaites que lorsque les relations qu'elles expriment se trouveront avoir lieu d'elles-mêmes entre ces quantités; mais si la courbe (V') n'est pas entièrement déterminée, soit dans sa position, soit dans son espèce, son équation contiendra alors des constantes arbitraires dont on pourra disposer pour satisfaire à quelques-unes des équations $P - P' = 0$, $Q - Q' = 0$, etc. et déterminer par là un contact d'un ordre plus ou moins élevé, suivant le nombre de ces constantes.

221. Pour éclaircir ceci par un exemple, supposons que la courbe (V') soit un cercle dont la position du centre et la grandeur du rayon soient quelconques; cherchons les divers contacts que ce cercle peut avoir avec une courbe donnée, et comment les constantes qui entrent dans son équation sont déterminées par la nature du contact et par la position du point où ce contact a lieu.

Représentons par α et β les coordonnées du centre du cercle que nous considérons, par γ son rayon, et par x' et y' les coordonnées d'un point quelconque de sa circonférence; elle aura pour équation

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \gamma^2.$$

La première condition qu'elle doit remplir, avant de toucher la courbe proposée, est de passer par le point M, et pour cela il faut que son équation soit satisfaite, lorsqu'on remplacera x' et y' par x et y, ce qui donnera

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2 \ldots\ldots (1).$$

Puisqu'on doit regarder les variables x et y comme déterminées par le point M qu'on considère, il s'ensuit que des trois constantes arbitraires

α, β et γ, il n'en reste plus que deux dont on puisse disposer pour remplir les conditions du contact, et que par conséquent ce cercle ne pourra avoir, en général, avec la courbe proposée, un contact d'un ordre plus élevé que le second.

L'équation $(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=\gamma^2$ donne

$$P'=\frac{dy'}{dx'}=\frac{-(x'-\alpha)}{y'-\beta}:$$

changeant x' en x et y' en y dans cette valeur, et la substituant dans $P-P'=0$, il viendra

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x-\alpha}{y-\beta}=0,\quad \text{ou}\quad (y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha)=0\ldots\ldots\ldots(2).$$

Cette équation ne suffit pas pour déterminer α et β, mais elle établit la relation qui doit exister entre ces quantités, pour chacune des valeurs particulières de x et de y. En lui donnant la forme

$$\beta-y=-\frac{dx}{dy}(\alpha-x),$$

on verra qu'elle est la même que celle de la normale, dans laquelle on aurait changé x' en α et y' en β (212), et on en conclura que tous les cercles qui ont leur centre sur la normale au point M, et qui passent par ce point, ont un contact du premier ordre avec la courbe proposée.

Formons encore l'équation $Q-Q'=0$, pour achever de déterminer le cercle *touchant*. Nous tirerons d'abord de l'équation de ce cercle

$$Q'=\frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2}=-\frac{(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2}{2(y'-\beta)^3};$$

mettant ensuite x pour x' et y pour y', nous aurons

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}{2(y-\beta)^3},$$

ou

$$(y-\beta)^3\frac{d^2y}{dx^2}+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Les équations (1), (2) et (3) réunies sont en nombre suffisant pour déterminer α, β et γ : la seconde donne $(x-\alpha)=-(y-\beta)\frac{dy}{dx}$, subtituant cette valeur dans la troisième, on trouve

$$y-\beta=-\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\ \text{d'où}\ \ x-\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

et au moyen de ces expressions, l'équation (1) donnera

$$\gamma=\pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Les deux premiers résultats font connaître, par rapport au point M, la position du centre du cercle qui a dans ce point un contact du second ordre, avec la courbe proposée.

Après cet exemple, il sera facile d'entendre le résumé que je vais donner, de la théorie importante développée dans les articles précédens.

222. Lorsque deux courbes, dont les ordonnées et les abscisses sont désignées par x et y, x' et y', ont un point commun, et pour lequel par conséquent, en faisant dans leur équation respective $x'=x$, on a $y'=y$, si on prend la différence des séries

$$y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$
$$y'+\frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

qui expriment les ordonnées des points correspondans à l'abscisse $x+h$, on trouvera

$$\left(\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy}{dx}\right)\frac{h}{1}+\left(\frac{d^2y'}{dx'^2}-\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2}+\left(\frac{d^3y'}{dx'^3}-\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3}$$
$$+\left(\frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}}-\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\left(\frac{d^ny'}{dx'^n}-\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\text{etc.},$$

pour l'expression de la distance des deux courbes, mesurée dans le sens de l'ordonnée, et pour une différence d'abscisse h, depuis le point qui leur est commun.

Cela posé, si les coordonnées x et y sont censées appartenir à un point déterminé d'une courbe dont l'équation $V=0$ ne renferme que des constantes données, tandis que l'équation $V'=0$ de la seconde courbe, renferme un nombre n de constantes à déterminer, ensorte que cette courbe soit seulement donnée d'espèce sans l'être de grandeur et de position, et que l'on regarde ses coordonnées x' et y' comme appartenant à un point indéterminé; au moyen de ces constantes, on pourra d'abord faire ensorte qu'en posant $x'=x$, on ait

$$y'=y,$$

et puis satisfaire encore aux $n-1$ équations suivantes:

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y'}{dx'^3}=\frac{d^3y}{dx^3},\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}}=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

ce qui réduira l'expression de la distance des deux courbes, à

$$\left(\frac{d^ny'}{dx'^n}-\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\text{etc.}$$

Toute autre courbe V'' qui ne vérifierait pas ces équations, doit nécessairement passer en dehors de l'espace compris entre la courbe V et la courbe V', aux environs de leur point de contact; car soient x'' et y'' les coordonnées de cette courbe, et supposons qu'en faisant $x''=x$, outre l'équation $y''=y$, elle ne vérifie que les $n-2$ équations

$$\frac{dy''}{dx''}=\frac{dy}{dx},\ldots\ldots\ldots \frac{d^{n-2}y''}{dx''^{n-2}}=\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},$$

sa distance à la courbe V sera exprimée par la série

$$\left(\frac{d^{n-1}y''}{dx''^{n-1}}-\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\left(\frac{d^ny''}{dx''^n}-\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\text{etc.};$$

mais il est aisé de voir que la valeur de cette expression devient d'autant plus grande, relativement à celle de la précédente, que l'on diminue la quantité h; car en supprimant dans l'une et dans l'autre le facteur $\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$, qui leur est commun, on réduit la première à

$$\left(\frac{d^ny'}{dx'^n}-\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{h}{n}+\text{etc.},$$

et la seconde à

$$\left(\frac{d^{n-1}y''}{dx''^{n-1}}-\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)+\left(\frac{d^ny''}{dx''^n}-\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{h}{n}+\text{etc.};$$

et le premier terme de celle-ci étant indépendant de h, finira par l'emporter sur la somme de tous ceux qui sont multipliés par h, dans les deux expressions. (*Voyez* la note de la page 362, ou le n° 172.) Il suit de là, qu'aux environs du point qui est commun aux trois courbes que nous considérons ici, la dernière passera en dehors de l'espace compris entre les deux premières.

Ainsi la seconde courbe, celle qui résultera de la détermination de toutes les constantes de l'équation $V'=0$, aura avec la proposée un contact de l'ordre $n-1$, et toutes les autres comprises dans l'équation générale dont elle est tirée, mais qui ne vérifieraient pas les n conditions qu'elle remplit, ne pourront avoir avec la courbe proposée que des contacts d'un ordre inférieur; c'est pourquoi je distinguerai le premier sous le nom d'*osculation*, et je nommerai *osculatrice* la courbe dont l'équation $V'=0$ est entièrement déterminée par les conditions du contact. D'après ces définitions, la tangente est une osculatrice, et son contact est une osculation du premier ordre : le cercle déterminé dans le n° 221, dont le contact avec la proposée est du second ordre, sera le *cercle osculateur*, distingué par ce nom de l'infinité de cercles qui peuvent avoir, au même point, un contact du premier ordre avec la courbe proposée; et cette osculation sera du second ordre. Enfin la courbe osculatrice dont l'équation $V'=0$, renferme n constantes arbitraires, aura une osculation de l'ordre $n-1$.

223. On remarquera, par rapport aux conditions de contact, que poser les équations

$$x'=x,\quad y'=y,\quad \frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx},\ \ldots\ldots\ \frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}}=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

entre les variables x, y et x', y', liées entre elles par les équations $V=0$ et $V'=0$, c'est la même chose que de rendre les deux premières variables x, y, qui sont censées connues, communes aux deux équations ci-dessus et à leurs différentielles, jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement : on pourra donc, pour déterminer les n constantes arbitraires de l'équation $V'=0$, employer immédiatement les n équations

$$V'=0,\quad dV'=0,\ \ldots\ldots\ d^{n-1}V'=0,$$

en y changeant x' et y', en x et en y; et les quantités

$$y,\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ldots\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

qui entreront dans les valeurs des constantes arbitraires, seront données en x, au moyen des n équations

$$V=0, \quad dV=0, \quad d^2V=0, \ldots\ldots d^{n-1}V=0,$$

où tout est connu.

Ce qui précède suffit pour déterminer les courbes osculatrices de la proposée, dans tel ordre et dans telle espèce qu'on voudra, en prenant pour ces courbes des équations contenant un nombre de constantes arbitraires supérieur d'une unité, à l'exposant de l'ordre de l'osculation que l'on veut établir, ou embrassant l'espèce entière des courbes que l'on veut considérer. Si, par exemple, on desirait prendre les paraboles osculatrices parmi toutes celles dont l'équation est du second degré, et dont par conséquent l'axe est dans une position quelconque, on pourrait établir entre ces paraboles et la courbe proposée une osculation du troisième ordre; car l'équation générale d'une parabole du second degré doit renfermer quatre constantes, savoir, deux pour fixer la position de son sommet, une pour indiquer la position de son axe, et enfin son paramètre. M. Ampère a considéré le premier ces paraboles, dans le 14ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et leur a trouvé des propriétés assez remarquables, sur lesquelles je ne saurais m'arrêter, devant m'occuper ici de celles du cercle osculateur, qui sont encore plus intéressantes.

Des propriétés du cercle osculateur, et des développées des courbes.

224. Le cercle osculateur ayant un contact du second ordre avec la courbe proposée, la touche et la coupe en même temps (218); et comme il est déterminé par les seules conditions du contact, il suit du nᵒ 221, qu'entre ce cercle et la courbe proposée, il n'en peut passer aucun autre : il est donc celui qui diffère le moins de cette courbe, aux environs du point particulier que l'on considère. La courbure du cercle est uniforme dans tous ses points; mais pour des arcs de même longueur, celle d'un petit cercle est plus considérable que celle d'un grand, en sorte que les courbures de ces arcs sont en raison inverse des rayons des cercles auxquels ils appartiennent : on peut donc, par le rayon du cercle osculateur, juger de la courbure d'une courbe dans l'un quelconque de ses points. Cette considération a fait donner au rayon du cercle osculateur le nom de *rayon de courbure;* et l'on voit, d'après ce qui précède, que *la courbure d'une courbe est en raison inverse de son rayon de courbure.*

225. La position du centre du cercle osculateur étant différente pour

chacun des points de la courbe proposée, l'ensemble de toutes ses positions formera une courbe dont les coordonnées seront α et β; or on a pour déterminer ces coordonnées, les équations

$$y-\beta=-\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad x-\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

qui reviennent à

$$\beta=y+\frac{dx^2+dy^2}{d^2y},\qquad \alpha=x-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx^2+dy^2}{d^2y},$$

dont le second membre se réduit alors à des fonctions de x seul, lorsqu'on y a substitué pour y, dy et d^2y, leurs valeurs tirées de l'équation de la courbe proposée; et il est visible que si on élimine entre ces dernières équations la variable x, qui particularise la position du point que l'on considère sur la courbe proposée, on aura la relation qui doit exister entre α et β dans toutes les positions que peut prendre le centre du cercle osculateur, c'est-à-dire l'équation de la courbe qui les contient toutes.

Il est visible encore qu'au lieu des expressions ci-dessus de $x-\alpha$ et de $y-\beta$, on peut employer les équations

$$(x-\alpha)dx+(y-\beta)dy=0\ldots\ldots(2),$$
$$dx^2+dy^2+(y-\beta)d^2y=0\ldots\ldots(3),$$

d'où elles sont tirées (page 444), et éliminer x, y, dy et d^2y entre ces deux équations, l'équation de la courbe proposée, et ses différentielles première et seconde.

Il est bon de remarquer à cette occasion, qu'en général l'élimination faisant disparaître certaines quantités, et rendant par là les autres indépendantes des valeurs particulières que peuvent prendre les premières, conduit à un résultat qui renferme collectivement tous ceux que l'on aurait eus pour chacune de ces valeurs : c'est par cette propriété que l'élimination joue un grand rôle dans les questions d'Analyse et de Géométrie, ainsi qu'on le verra dans la suite.

226. Voici encore deux propriétés importantes du cercle osculateur : 1°. son rayon, mené par le point où ce cercle touche la courbe proposée, est toujours tangent à la courbe dont il est parlé dans l'article

précédent ; 2°. la longueur de ce rayon varie de la même quantité que l'arc de la courbe des centres, c'est-à-dire que si DX, *fig.* 36, est la FIG. 36. courbe proposée, et FZ celle qui contient toutes les positions du centre du cercle osculateur, la différence des rayons de courbure OM et $O'M'$, relatifs aux points M et M', est égale à l'arc OO'.

Pour prouver plus commodément ces propriétés, au lieu des équations (1), (2) et (3) du n° 221, prenons les suivantes :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2 \ldots\ldots (1),$$
$$(x-\alpha)\mathrm{d}x+(y-\beta)\mathrm{d}y=0 \ldots\ldots (2),$$
$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+(y-\beta)\mathrm{d}^2y=0 \ldots\ldots (3),$$

qui sont équivalentes, suivant la remarque du n° 223. Puisque nous considérons ici l'ensemble des cercles osculateurs, il faut regarder les quantités α, β, et γ comme variables ; or en vertu des équations ci-dessus, dans lesquelles y est une fonction de x, ces mêmes quantités α, β, γ sont aussi des fonctions de x, et ne peuvent par conséquent changer de valeur, sans que cette variable n'en change elle-même. Ainsi pour obtenir des relations entre leurs différentielles, on doit différentier les équations ci-dessus, en y faisant tout varier. Les deux premières donneront alors

$$(x-\alpha)\mathrm{d}x+(y-\beta)\mathrm{d}y-(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha-(y-\beta)\mathrm{d}\beta=\gamma\mathrm{d}\gamma,$$
$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+(y-\beta)\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x-\mathrm{d}\beta\mathrm{d}y=0.$$

Les équations (2) et (3) réduisent celles-ci à

$$-(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha-(y-\beta)\mathrm{d}\beta=\gamma\mathrm{d}\gamma \ldots\ldots\ldots (4),$$
$$-\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x-\mathrm{d}\beta\mathrm{d}y=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

dont la dernière conduit à

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},$$

expression qui change l'équation (2) en

$$(x-\alpha)\mathrm{d}\beta-(y-\beta)\mathrm{d}\alpha=0 \ldots\ldots\ldots (6),$$

et donne par conséquent

$$y-\beta=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}(x-\alpha),$$

résultat qui indique une tangente à la courbe dont les coordonnées sont α et β, menée par un point extérieur à cette courbe, et dont les coordonnées sont x et y : ainsi, comme on l'a énoncé ci-dessus, la droite MO est tangente à la courbe FZ.

Ensuite, il est visible qu'entre les trois équations (6), (4) et (1), on peut éliminer les deux quantités $x-\alpha$, $y-\beta$, et qu'il restera une relation entre $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$, indépendante de x et de y. En effectuant les calculs, on trouve

$$d\gamma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2, \quad \text{ou} \quad \frac{d\gamma}{d\alpha} = \sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}},$$

ce qui donne le coefficient différentiel de γ, par rapport à la variable α; or cette expression est aussi celle du coefficient différentiel de l'arc de la courbe dont les coordonnées sont α et β (216), et il résulte de cette identité, que le rayon du cercle osculateur varie par les mêmes différences que l'arc de la courbe FZ (20), propriété qui mérite la plus grande attention.

En effet, le rayon MO du cercle osculateur du point M étant tangent à la courbe FZ, a nécessairement la même direction que celle que prendrait un fil enveloppé autour de la convexité de cette courbe, lorsqu'en le développant on serait parvenu au point O. On remarquera qu'en poursuivant le développement de O en O', ce fil s'alongerait d'une quantité égale à l'arc OO' de la courbe FZ; et comme, par ce qui précède, la différence des rayons OM et $O'M'$ est aussi égale au même arc OO', il s'ensuit que le bout M du fil doit encore se trouver en M' sur la courbe proposée, qu'il n'a pas dû quitter dans le développement effectué depuis l'un de ces points jusqu'à l'autre : on peut donc regarder la courbe DX comme engendrée par le développement de la courbe FZ.

Ce procédé a une grande analogie avec la description du cercle; c'est la courbe FZ qui fait l'office de centre; et le rayon MO, au lieu d'être constant, varie pour chaque point. La courbe FZ s'appelle la *développée*, la courbe DX, la *développante*, et le rayon du cercle osculateur, le *rayon de la développeé*. C'est par cette dernière considération que Huygens a déterminé le cercle osculateur, qu'il a remarqué le premier, et elle peut conduire directement aux formules du nº 221, comme on le verra plus loin; mais ce point-de-vue séparant la recherche du cercle osculateur, de la théorie générale du contact des courbes dont elle doit faire partie, est trop borné pour l'état actuel de la science.

Une conséquence bien remarquable de ce qui vient d'être prouvé, c'est que si la développante est algébrique, on a sur-le-champ l'expression de la longueur d'un arc quelconque de la développée, en prenant la différence des valeurs de γ, dans les points de la première courbe qui répondent aux extrémités de l'arc de la seconde, et l'on voit ainsi qu'il y a une infinité de courbes *rectifiables*, c'est-à-dire dont on peut assigner rigoureusement la longueur en ligne droite, ce que Descartes lui-même ne croyait pas possible.

227. Je viens maintenant aux applications des formules du n° 221, savoir :

$$\gamma = \pm \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y},$$

$$x-\alpha = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx^2+dy^2}{d^2y},$$

$$y-\beta = -\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}.$$

La valeur du rayon de courbure γ s'étant présentée avec le double signe $\pm$, on peut demander lequel des deux il faut employer; car il est bien visible qu'en général à chaque point de la courbe il n'y a qu'un seul rayon de courbure, et que ce rayon n'étant pas dirigé suivant l'ordonnée ou l'abscisse, excepté dans quelques points particuliers, n'a pas, à proprement parler, de signe par rapport à ces lignes. La détermination de celui dont on l'affecte ordinairement dépend de la convention que l'on a établie sur le sens de la courbure par rapport à la normale. Si l'on veut que le rayon de courbure soit positif pour les courbes dont la concavité est tournée vers l'axe des abscisses, comme la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est alors négative (206), il faut affecter l'expression de γ du signe $-$; et dans ce cas, le rayon de courbure deviendra négatif, si la concavité de la courbe passe du côté opposé, parce qu'il change de signe avec $\frac{d^2y}{dx^2}$. Pour se conformer à cette convention, on pourra supposer dans les applications,

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}.$$

L'équation générale des lignes du second ordre,

$$y^2 = mx + nx^2,$$

conduisant à

$$dy = \frac{(m + 2nx)dx}{2y},$$

$$d^2y = \frac{2nydx^2 - (m+2nx)dxdy}{2y^2} = \frac{[4ny^2 - (m+2nx)^2]dx^2}{4y^3},$$

il en résultera

$$\gamma = -\frac{[4y^2 + (m + 2nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{8ny^2 - 2(m+2nx)^2}.$$

Si l'on substitue la valeur de y^2 dans cette expression, on aura

$$\gamma = \frac{[4(mx + nx^2) + (m + 2nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

Telle est la valeur générale du rayon de courbure dans les lignes du second ordre; elle se réduit à $\frac{1}{2}m$ lorsque $x=0$: la courbure des lignes proposées est donc, à leur sommet, la même que celle du cercle décrit d'un rayon égal au demi-paramètre (*Traité élém. de Trig. et d'appl. de l'Alg. à la Géom.*).

En rapprochant la valeur de γ de celle qu'on a trouvée dans le

FIG. 28. n° 215, pour la normale, on verra que $\gamma = \frac{\overline{MR}^3}{\frac{1}{4}m^2}$, *fig.* 28, et que *le rayon de courbure, dans les lignes du second ordre, est égal au cube de la normale divisé par le quarré du demi-paramètre.*

On particularise la valeur générale de γ, en donnant à m et à n les valeurs qui conviennent à chaque espèce des lignes du second ordre. Dans la parabole, où $n=0$, on a seulement

$$\gamma = \frac{(m^2 + 4mx)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

A l'égard de l'ellipse et de l'hyperbole, il peut être commode d'introduire les axes dans la valeur de γ, et de rapporter les abscisses au centre; or, en désignant les demi-axes par a et b, on a d'abord

$$m = \frac{2b^2}{a}, \qquad n = \mp\frac{b^2}{a^2};$$

puis mettant y^2 au lieu de $mx+nx^2$, il vient

$$\gamma = \frac{\left[4y^2 + 4\frac{b^4}{a^4}(a\mp x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{8b^4}{a^2}} = \frac{\left[a^4y^2 + b^4(a\mp x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4};$$

et comme l'abscisse x est prise à partir du sommet, celle qui partirait du centre serait $a-x$ dans l'ellipse, et $a+x$ dans l'hyperbole; ainsi en affectant la lettre x à cette dernière abscisse, on aura seulement

$$\gamma = \frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Cette expression, très-symétrique, offre, par rapport à l'ellipse, quelques conséquences qu'il est à propos d'indiquer ici, parce qu'elles peuvent servir à la théorie de la figure de la terre. Aux points I et L, *fig.* 37, qui sont les sommets du grand axe et du petit axe, et où l'on a respectivement $x=a$, $y=0$, et $x=0$, $y=b$, on trouve, pour le rayon de courbure, les valeurs FIG. 37.

$$IE = \frac{b^2}{a}, \quad LF = \frac{a^2}{b}.$$

On voit par là que les points I et I' sont ceux de la plus grande courbure de l'ellipse, parce que le rayon de courbure y est le plus petit et que les points L et L' sont au contraire ceux de la moindre courbure, parce que le rayon de courbure y est le plus grand.

228. On trouverait l'équation de la développée des lignes du second ordre, au moyen des valeurs de $x-\alpha$ et de $y-\beta$, comme il est dit dans le n° 225; mais je me bornerai à appliquer ces valeurs à la parabole, parce que le calcul est plus simple.

On a dans ce cas,

$$y^2 = mx, \qquad dy = \frac{mdx}{2y}, \qquad d^2y = -\frac{m^2dx^2}{4y^3},$$

et il vient

$$y - \beta = \frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2+m^2}{4y^2}\right) = \frac{4y^3}{m^2} + y,$$

$$x - \alpha = -\frac{m}{2y}\,\frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2+m^2}{4y^2}\right) = -\frac{4y^2+m^2}{2m};$$

on conclut de là

$$-\beta = \frac{4y^3}{m^2}, \qquad x - \alpha = -\frac{2y^2}{m} - \frac{1}{2}m;$$

mettant dans chacune de ces équations, pour y sa valeur $m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, il viendra

$$-\beta = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}, \qquad x - \alpha = -2x - \frac{1}{2}m;$$

prenant ensuite la valeur de x dans le second résultat, pour la substituer dans le premier, on obtiendra

$$x = \frac{1}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}m\right), \qquad \beta^2 = \frac{16}{27m}\left(\alpha - \frac{1}{2}m\right)^3:$$

la dernière de ces équations appartient à la développée de la parabole.

Si l'on y change $\alpha - \frac{1}{2}m$ en α', ou qu'on porte l'origine des abs-
FIG 38. cisses en D, *fig.* 38, on pourra lui donner cette forme très-simple :

$$\beta^2 = \frac{16\alpha'^3}{27m},$$

qui montre que la développée DF est une des courbes paraboliques du troisième ordre, composée de deux branches DF et Df, dont la première engendre par son développement la branche AX de la parabole ordinaire XAx, et la seconde produit la branche Ax.

Il faut observer que pour la description de la parabole XAx, par le développement de la courbe FDf, le fil enveloppé autour de l'une ou de l'autre des branches DF et Df, doit avoir au point D, dans le prolongement de la tangente BD, une longueur AD égale au rayon de courbure au point A, c'est-à-dire à la moitié du paramètre de la parabole proposée; tout autre point tel que I, pris sur ce fil, produirait une courbe différente. Si le point I tombait sur le point D, par exemple, le rayon de courbure de la courbe décrite alors serait nul à son origine, et par conséquent elle aurait à ce point une courbure infinie (224).

Il suit de ce qui précède, que la courbe DF est du nombre de celles dont l'arc peut s'évaluer exactement en ligne droite; car la longueur de l'arc DF est égale à la différence qui se trouve entre le rayon de courbure correspondant MF, et le rayon de courbure AD qui appartient à l'origine, c'est-à-dire à

$$\frac{(m^2+4mx)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}-\frac{1}{2}m.$$

Il resterait à transformer cette expression en α', pour la rapporter aux abscisses mêmes de la courbe DF; mais je ne m'y arrêterai point maintenant.

Il est à propos de remarquer que la description entière d'une courbe ne peut pas toujours s'opérer par le moyen d'un seul fil. Ici la branche AX est engendrée par l'extrémité du fil MF qui se développe de la branche DF, tandis que c'est le fil mf, se développant de la branche Df, qui décrit la branche Ax.

On voit aisément, par la position des centres de courbure de l'ellipse, relatifs aux extrémités de ses axes, *fig.* 37, que la développée de cette courbe doit avoir la forme $EFE'F'$; de sorte que l'arc IL est engendré par le développement de l'arc EF; l'arc $I'L$, par celui de FE'; l'arc $I'L'$, par celui de $F'E'$; enfin l'arc IL', par celui de $F'E$. A la vérité, le même fil IEF qui se développe d'abord de l'arc EF pour engendrer l'arc IL, peut engendrer l'arc LI', en s'enveloppant sur FE'; mais il faut, pour la description de la demi-ellipse $IL'I'$, recourir à un second fil placé entre les arcs EF' et $F'E'$, ce qui rompt toujours la continuité de la description mécanique, et ajoute, ce me semble, aux motifs que l'on a de regarder comme l'origine la plus générale et la plus géométrique de la développée, sa formation par l'ensemble des centres des cercles osculateurs, puisque ce n'est que par ce moyen que l'on y observe exactement la loi de continuité: je reviendrai bientôt sur ce sujet, en m'occupant de nouveau des points singuliers des courbes. FIG. 37.

229. Quoique les considérations sur lesquelles la théorie des divers ordres de contacts est appuyée dans le n° 222, ne laissent rien à desirer, soit par rapport à la généralité, soit par rapport à l'exactitude, je crois indispensable cependant, pour compléter cette théorie, de montrer comment tous les contacts répondent aux limites des intersections des courbes. On a de fréquentes occasions d'envisager le contact d'une ligne droite et d'une courbe, comme la réunion de deux intersections, et ce point-de-vue peut s'étendre à deux courbes se coupant dans un nombre quelconque de points; on dira, à la vérité, que quand toutes ces intersections sont réunies, les deux courbes n'ayant qu'un

point de commun, leur contact n'offre à l'œil rien qui le distingue de celui qui résulterait de la réunion d'un nombre différent d'intersections; mais l'Analyse manifeste dans cette circonstance un *fait remarquable*, qui ne peut être apperçu par les sens; c'est l'accomplissement de la *loi de continuité*, qui conserve dans la coïncidence des points la trace des caractères que présentait leur ensemble lorsqu'ils étaient distincts : en voici la preuve.

Soit (V) une équation quelconque entre x', y' et un nombre n de constantes arbitraires; on pourra particulariser les courbes qu'elle représente, en les assujétissant à passer par un pareil nombre de points donnés. Imaginons que ces points soient situés sur la courbe DX,
FIG. 39. *fig.* 39, dont on a l'équation en x et y; pour fixer les idées, n'en considérons que trois, savoir: M, M' et M'', et supposons que les ordonnées PM, $P'M'$, $P''M''$, soient éloignées entre elles de la même quantité h. Il est évident que pour chacun de ces points, les valeurs des ordonnées déduites de l'équation (V) de la courbe EY doivent être les mêmes que celles qui résultent de la courbe DX, et que par conséquent si l'on met x, $x+h$, $x+2h$ à la place de x' dans l'équation (V), et qu'on écrive pour y' les valeurs de PM, $P'M'$, $P''M''$ que donne l'équation de la courbe DX, on obtiendra trois nouvelles équations qui serviront à déterminer autant de constantes arbitraires, en fonctions des abscisses et des ordonnées des points M, M' et M''. La série de Taylor fournit le moyen d'établir ce calcul, sans particulariser la forme des équations des courbes EY et DX.

En représentant, pour abréger, par

$$\begin{aligned} &y'+P'h+Q'h^2+R'h^3+\text{etc.},\\ &y+Ph+Qh^2+Rh^3+\text{etc.},\end{aligned}$$

les ordonnées qui répondent à $x'+h$ et à $x+h$, dans la première et dans la seconde courbe, il n'y aura qu'à mettre dans ces séries, $2h$ au lieu de h, pour passer aux développemens des ordonnées qui répondent aux abscisses $x'+2h$, $x+2h$. Cela fait, on écrira que les points M, M', M'', sont communs aux deux courbes, en posant les équations

$$\begin{aligned} y'&=y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),\\ y'+P'h+Q'h^2+R'h^3+\text{etc.}&=y+Ph+Qh^2+Rh^3+\text{etc.},\\ y'+2P'h+4Q'h^2+8R'h^3+\text{etc.}&=y+2Ph+4Qh^2+8Rh^3+\text{etc.}\end{aligned}$$

En vertu de la première équation, on peut effacer y et y' dans les deux dernières, qui deviendront divisibles par h, et se changeront en

$$P' + Q'h + R'h^2 + \text{etc.} = P + Qh + Rh^2 + \text{etc.} \ldots\ldots (2),$$
$$2P' + 4Q'h + 8R'h^2 + \text{etc.} = 2P + 4Qh + 8Rh^2 + \text{etc.}$$

Divisant la seconde de celles-ci par 2, et retranchant l'autre, il viendra

$$Q'h + 3R'h^2 + \text{etc.} = Qh + 3Rh^2 + \text{etc.},$$

qui se réduit à

$$Q' + 3R'h + \text{etc.} = Q + 3Rh + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (3).$$

Concevant ensuite que les points M, M', M'' se rapprochent de plus en plus, la quantité h diminuera sans cesse, et lorsqu'on fera coïncider ces points, elle s'anéantira, sans que pour cela les équations (2) et (3) cessent d'exister; elles se réduiront seulement à $P' = P$, $Q' = Q$; ensorte qu'au point de contact on aura encore les équations

$$y' = y, \qquad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

comme dans le n° 222. Il suit de là que le cercle osculateur est la limite de tous ceux qui, passant par le point donné sur la courbe proposée, ont en outre deux autres intersections avec cette courbe.

En considérant un quatrième point commun aux deux courbes EY, DX, et correspondant à l'abscisse $x + 3h$, on aurait pour ce point l'équation

$$y' + 3P'h + 9Q'h^2 + 27R'h^3 + \text{etc.} = y + 3Ph + 9Qh^2 + 27Rh^3 + \text{etc.},$$

de laquelle effaçant y et y', et éliminant ensuite les termes $P'h$ et Ph, $Q'h^2$ et Qh^2, au moyen des équations relatives aux deux points précédens, on aurait

$$R' + \text{etc.} = R + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (4);$$

et à la limite, où la réunion des intersections serait un contact du troisième ordre, il resterait

$$R' = R, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^3y'}{dx'^3} = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Il est aisé d'étendre ce procédé à tel nombre de points que l'on voudra, et de trouver par conséquent les conditions relatives à un contact d'un ordre quelconque, en l'envisageant comme la réunion de ces points. Le contact du premier ordre donné seulement par les équations (1) et (2), sera la réunion de deux intersections; celui du deuxième ordre, la réunion de trois intersections; et en général celui du $n^{\text{ième}}$ ordre, la réunion de $n+1$ intersections.

Détermination des points singuliers.

230. Après avoir montré l'usage de la série

$$k = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

pour comparer le cours d'une ligne courbe, soit à la ligne droite, soit à d'autres courbes, je passerai à l'examen de ce qui arrive à cette courbe, lorsque les termes de la série ci-dessus, c'est-à-dire les coefficiens différentiels de l'ordonnée, deviennent nuls ou infinis, ou prennent la forme $\frac{0}{0}$; je m'occuperai d'abord du premier cas.

Quand le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ s'évanouit, il en résulte que

FIG. 27 et 28. l'angle *MTB*, *fig.* 27 et 28, est nul, et que par conséquent la droite *TM* qui touche la courbe au point que l'on considère, est parallèle à l'axe des abscisses. Voilà la seule conclusion que l'on puisse tirer de cette circonstance analytique; car il faut qu'immédiatement avant et après le point proposé la courbe soit au-dessous de sa tangente pour le maxi-

FIG. 40 et 41. mum, *fig.* 40, et au-dessus pour le minimum, *fig.* 41, c'est-à-dire, que la distance de la courbe à sa tangente, dans le sens de l'ordonnée, doit alors se trouver de même signe aux abscisses $x+h$ et $x-h$, quelque petite que soit la quantité h. Or cette distance étant alors exprimée par

$$k = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

ne conservera le même signe, quel que soit celui de h, qu'autant que la valeur de x qui fait évanouir $\frac{dy}{dx}$ ne fera pas évanouir $\frac{d^2y}{dx^2}$, ou en général, lorsque le premier des coefficiens différentiels qui ne s'évanouit pas, sera d'ordre pair (156). Dans le cas contraire, la courbe passera

FIG. 42. d'un côté à l'autre de sa tangente, comme le montre la figure 42, et le point proposé, au lieu d'être un maximum ou un minimum, sera une inflexion qui aura cela de particulier, que la tangente à la courbe s'y trouvera parallèle à l'axe des abscisses.

Si le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$ s'évanouit sans qu'il en arrive autant à celui du premier, la tangente à la courbe demeure inclinée à l'égard de l'axe des abscisses ; mais la courbe passera d'un côté à l'autre de cette tangente, et subira par conséquent une inflexion, si $\frac{d^3y}{dx^3}$ ne s'évanouît pas, ou bien, en général, si le premier des coefficiens différentiels suivans, qui ne disparaît point, est d'ordre impair. Si ce dernier coefficient était d'ordre pair, du quatrième, par exemple, la courbe restant du même côté par rapport à sa tangente, avant et après le point proposé, ne présenterait aucune singularité visible.

Il est évident que l'évanouissement des coefficiens differentiels consécutifs, depuis $\frac{d^2y}{dx^2}$ inclusivement, élève l'ordre du contact de la tangente avec la courbe proposée. Dans les hypothèses établies ci-dessus, on aurait

$$k - k' = \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \quad (205);$$

et le contact serait du troisième ordre (222). La tangente prendrait alors la place des paraboles osculatrices du premier et du second ordre qui n'existeraient plus, puisque leurs équations se confondraient avec celles de la tangente (218).

On reconnaîtrait de même que l'évanouissement des coefficiens différentiels, à partir d'un ordre supérieur au second, ne peut apporter de singularité dans le cours de la courbe, que relativement à ses paraboles osculatrices, à commencer par celles de l'ordre immédiatement inférieur, et que ces singularités ne sont visibles qu'autant que les coefficiens différentiels qui s'évanouissent sont en nombre impair.

Le cercle osculateur, par exemple, qui touche et coupe la courbe, dans les points ordinaires, ne fait plus que la toucher dans ceux où l'on a, outre les équations qui déterminent ce cercle (220 et 221), la suivante :

$$R - R' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y'}{dx'^3},$$

ce qui revient à

$$3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + (y - \beta)\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Si l'on met dans cette équation pour $y-\beta$ sa valeur rapportée dans le n° 221, on en déduira l'équation

$$3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y^2}{dx^4}-\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

la même que celle que l'on obtiendrait en différentiant l'expression du rayon de courbure γ, pour en trouver le maximum ou le minimum; d'où l'on voit que le cercle osculateur a, dans ce cas, un contact du troisième ordre avec la courbe proposée.

231. Quand le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ devient infini, il s'ensuit que la droite qui touche la courbe proposée est perpendiculaire à l'axe des abscisses; cette conséquence résulte non-seulement du n° 205, mais on peut encore l'appuyer sur les n^{os} 133 et 200. Par le premier de ceux-ci, le développement de l'accroissement k doit être de la forme $Ph^{\alpha}+$ etc., α étant <1, et dans le second, on a montré directement qu'une courbe dont l'équation est de la forme $k=Ph^{\alpha}+$ etc., doit, lorsque $\alpha<1$, toucher l'axe des k, qui est ici parallèle à celui des y. Passé cela, on ne peut rien dire sur la nature du point singulier que l'on considère, car toutes les espèces de ces points peuvent se présenter dans une circonstance où la tangente soit perpen-
FIG. 43, 44 et 45. diculaire à l'axe des abscisses. La figure 43 indiquerait une limite de la courbe dans le sens des abscisses, c'est-à-dire un maximum ou minimum relatif à la variable x; la figure 44 des rebroussemens de la première espèce, dont l'un peut être regardé comme un maximum de l'ordonnée, l'autre comme un minimum, répondant au cas où $\frac{dy}{dx}$ change de signe en passant par l'infini (160); la figure 45, une inflexion due au changement de signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui passe alors, non pas par zéro, comme dans le n° précédent, mais par l'infini. Toutes ces circonstances ne peuvent se distinguer que par la discussion de la courbe aux environs du point particulier que l'on considère; car dès que quelqu'un des coefficiens différentiels devient infini, la série de Taylor cessant d'être applicable, il faut lui substituer un développement de la forme

$$k=Ph^{\alpha}+Qh^{\beta}+Rh^{\gamma}+\text{etc.},$$

dans lequel la suite des exposans α, β, γ, etc., prend, à partir d'un de ses termes, des valeurs fractionnaires; et l'on doit alors distinguer le cas où quelqu'un de ces exposans étant une fraction de dénominateur pair, le développement peut devenir imaginaire par le changement du signe de h, parce qu'il s'ensuit que la courbe ne s'étend que du côté des abscisses où ce changement n'a pas lieu. Quant à l'ordre du premier coefficient différentiel qui doit devenir infini, il dépend du terme où les exposans commencent à être des fractions proprement dites (133). C'est pour cela que l'inflexion et le rebroussement se présentent également lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nul, ou lorsqu'il est infini; car l'inflexion aura lieu si le développement de k ne contient que des puissances fractionnaires de numérateur et de dénominateur impairs; et α étant 1, le second exposant β peut être $>$ ou <2, et par conséquent $\frac{d^2y}{dx^2}$ nul ou infini. De même, lorsque la série des exposans contient des fractions de dénominateur pair, l'exposant β peut être également $>$ ou <2: dans l'un de ces cas, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera nul, dans l'autre, infini, et tous deux donneront lieu à un rebroussement.

Il est cependant à remarquer que l'existence de l'inflexion ne suppose pas toujours que la série des exposans renferme des termes fractionnaires, ou qu'il s'évanouisse des quantités radicales, mais que cela a nécessairement lieu à l'égard du rebroussement.

Le rebroussement de la première espèce a, par rapport à celui de la seconde, un caractère particulier, en ce que, comme on l'a déjà vu dans le n° 202, il se manifeste dès le deuxième terme de la série, tandis que celui de la seconde peut ne se faire reconnaître qu'à un terme quelconque. C'est aussi ce que l'on voit par le calcul différentiel; car dans les deux branches de la courbe qui forment un rebroussement de la première espèce, les convexités étant tournées de différens côtés, il faut que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit pour l'une d'un signe contraire à l'autre, et que par conséquent il change de signe au point de rebroussement, ce qui ne peut avoir lieu que dans le passage par zéro ou par l'infini. On pourrait cependant excepter le cas où la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses, puisqu'alors les deux branches ont leur convexité tournée dans le même sens; mais $\frac{dy}{dx}$ étant infini, $\frac{d^2y}{dx^2}$ l'est aussi.

232. Quand les coefficiens différentiels sont de la forme $\frac{0}{0}$, leur vraie valeur est nécessairement ou nulle, ou finie, ou infinie. Le premier et le dernier de ces cas rentrent dans ceux qui ont fait le sujet des deux articles précédens. A l'égard du second cas, comme il fournit simultanément plusieurs valeurs pour le coefficient différentiel (136), il montre que plusieurs branches passent par le même point. Ces branches se coupent lorsque le coefficient différentiel est du premier ordre et prend plusieurs valeurs réelles et inégales; si ces valeurs sont égales, les branches se touchent; leur contact peut même s'élever à des ordres supérieurs, et alors, outre une tangente commune, elles auront les mêmes paraboles osculatrices jusqu'à un certain ordre. Les coefficiens différentiels, jusqu'à cet ordre, auront des valeurs égales pour les deux branches; mais celui de l'ordre supérieur aura autant de valeurs inégales qu'il y aura de paraboles osculatrices distinctes, et l'on trouvera ces valeurs en faisant usage des procédés indiqués dans le chap. précéd.

233. Enfin, si l'un quelconque des coefficiens différentiels devenait imaginaire, la série de Taylor le devenant aussi, indiquerait alors que le point que l'on considère n'est précédé ou suivi immédiatement d'aucun autre, et que c'est par conséquent un point conjugué. Par exemple, les coefficiens différentiels de y, tirés de l'équation

$$y = (x-a)^m (x-b)^{\frac{2m+1}{2}},$$

m étant un exposant entier, deviennent imaginaires lorsque $x=a$, quand a est $<b$, mais seulement à partir de l'ordre m, ce qui, lorsque $m>2$, laisse subsister l'expression de la tangente et celle du rayon de courbure : il n'en faut pas cependant conclure, qu'un point conjugué puisse avoir une tangente et un centre de courbure; car les considérations sur lesquelles repose la détermination des tangentes et des cercles osculateurs supposent nécessairement l'existence de points consécutifs.

L'exemple ci-dessus pourrait être présenté de manière que les coefficiens différentiels parussent d'abord $\frac{0}{0}$ (134 et 135).

234. Les points singuliers inhérens à une courbe, comme les points d'inflexion, de rebroussement, ou multiples, se manifestent dans la développée. Cela s'apperçoit tout de suite à l'égard de l'inflexion et du

rebroussement de la première espèce : puisqu'à ces points $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nul ou infini, il s'ensuit que le rayon de courbure y est infini ou nul. Le centre de courbure se trouvant toujours dans l'espace vers lequel la courbe proposée tourne sa concavité, doit, après un point d'inflexion ou de rebroussement, passer, ainsi que la développée, d'un côté à l'autre de la tangente; mais la chose peut se faire de deux manières, savoir, comme dans les figures 46 et 47, où la développée rencontrant la courbe proposée, donne un rayon de courbure nul, ou bien comme dans les figures 48 et 49, où la développée a deux branches infinies qui ont pour asymptote commune la normale au point singulier. FIG. 46 et 47. FIG. 48 et 49.

La figure 50 fait voir que le rebroussement de la seconde espèce répond à une inflexion de la développée, car le rayon de courbure MF, parvenu en NG, revient sur ses pas en HO, et décrit la branche supérieure NO. C'est ainsi que l'Hopital reconnut l'existence de cette espèce de rebroussement, contestée ensuite par de Gua, mais mise hors de doute par d'Alembert et Euler. FIG. 50.

235. Ce qui précède, joint aux nos 201 et 202, me paraît rassembler les développemens les plus complets que l'on ait présentés jusqu'ici sur les points singuliers. Pendant long-temps on a donné, dans les Traités de Calcul différentiel, des règles particulières pour découvrir chaque espèce de points; mais on doit voir à présent comment il arrivait que ces règles étaient le plus souvent en défaut. Ce qu'il y a de constant pour tous les points singuliers, c'est que les coefficiens différentiels y deviennent ou nuls, ou infinis, ou imaginaires, ou y prennent la forme $\frac{0}{0}$; et ce qui a été dit dans le n° 230, montre que la série de Taylor, tant qu'elle conserve tous ses termes, ne peut partir que d'un point simple. Je crois avoir le premier cherché à rectifier l'application du Calcul différentiel à la détermination des points singuliers; et j'ai proposé en conséquence la règle suivante, aussi simple que sûre.

On obtiendra généralement l'indication de l'abscisse à laquelle répond un point singulier, en cherchant dans quels cas les coefficiens différentiels, à partir d'un ordre quelconque, deviennent nuls ou infinis, ou $\frac{0}{0}$ *: l'on assignera l'espèce du point, 1°. en examinant combien il passe de branches de courbes à ce point, et si elles s'étendent ou non en-deçà et au-delà;*

2°. *en déterminant la position de leur tangente;* 3°. *le sens dans lequel elles tournent leur concavité ou leur convexité* (206) (*).

Dans un grand nombre de cas, comme ceux qui ont été traités dans le n° 201, par exemple, la position de la tangente et le signe des ordonnées caractérisent suffisamment la situation respective des branches; mais lorsque cette tangente est inclinée par rapport aux axes des coordonnées, il faudrait comparer les valeurs de ses ordonnées et de celles des branches de la courbe, pour savoir comment ces branches sont placées, tandis que la seule connaissance du signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$ remplit ce but.

Il est facile d'appliquer la règle ci-dessus, aux diverses équations qui ont été données précédemment, comme exemples de points singuliers; et pour cette raison, je n'en offrirai ici que deux. La première sera

$$y = bx^m + c(x-a)^{\frac{p}{q}},$$

dont je me suis déjà occupé page 332. On en tire

$$\frac{dy}{dx} = mbx^{m-1} + \frac{p}{q}c(x-a)^{\frac{p}{q}-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)bx^{m-2} + \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)c(x-a)^{\frac{p}{q}-2}.$$

Si l'on y fait $x=a$, l'expression de $\frac{dy}{dx}$ restera finie quand $\frac{p}{q}$ sera >1, mais celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, ou des coefficiens différentiels d'un ordre plus élevé, deviendra infinie; ainsi le point où $x=a$ peut être un point singulier. L'inclinaison de la tangente est donnée alors par l'expression

$$\frac{dy}{dx} = mba^{m-1};$$

(*) *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, 1^re^ *édition*, 1802. Si l'on voulait se rendre raison pourquoi l'Analyse semble ne donner pour tous les points singuliers qu'une seule indication générale, il faudrait observer que ces points ne sont que des limites séparant, dans les courbes, des parties qui sont diverses sous certains rapports, et que par conséquent il est tout simple qu'on ne puisse reconnaître l'espèce de ces points que par l'examen de chacune des parties entre lesquelles ils se trouvent.

si, de plus, le nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$ est de numérateur et de dénominateur impairs, la courbe s'étendra sur les abscisses plus grandes et plus petites que a. Si maintenant on a $m > 1$ et $\frac{p}{q} > 2$, en prenant x très-peu différent de a, on peut toujours faire ensorte que le second terme de l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit moindre que le premier; le signe de cette expression sera donc le même, immédiatement avant et après le point où $x=a$: dans l'un et l'autre cas, la courbe tournera sa concavité dans le même sens, et ce point ne présentera par conséquent alors aucune singularité visible. Il n'en serait pas de même si l'exposant m était égal à 1, alors on aurait seulement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)c(x-a)^{\frac{p}{q}-2},$$

expression qui changerait de signe, en y faisant successivement $x<a$, $x>a$, puisque le nombre fractionnaire $\frac{p}{q}-2=\frac{p-2q}{q}$ aurait un numérateur et un dénominateur impairs : le point où $x=a$ serait donc alors une inflexion.

Si le nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$ avait un dénominateur pair, l'ordonnée de la courbe proposée aurait deux valeurs

$$y = bx^m \pm c(x-a)^{\frac{p}{q}},$$

et l'on ne pourrait pas y faire $x<a$; mais si l'on supposait encore $m>1$, $\frac{p}{q}>2$, l'inclinaison de la tangente resterait la même, et $\frac{d^2y}{dx^2}$ serait de même signe dans chacune des branches. De tout cela il résulte que les branches de la courbe proposée s'arrêteraient au point où $x=a$, qu'elles s'y toucheraient, et qu'elles tourneraient leur concavité dans le même sens; il y aurait donc à ce point un rebroussement de la seconde espèce: il serait de la première si l'exposant m était égal à 1; car alors l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$ serait différente pour chacune des branches, et leur concavité serait tournée dans des sens opposés.

236. Jusqu'ici je n'ai considéré que des équations où l'ordonnée est exprimée immédiatement en fonction de l'abscisse: soit maintenant l'équation $x^3-3axy+y^3=0$, déjà traitée n° 164. On en tire $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$, et

en égalant d'abord à zéro le numérateur, il vient $ay - x^2 = 0$; substituant la valeur de y que donne cette équation dans la proposée, on trouve $x^6 - 2a^3x^3 = 0$.

L'examen que nous avons fait, dans le n° cité, de chacune des valeurs que donne cette dernière équation, nous a fait reconnaître que $x = a\sqrt[3]{2}$ est la seule qui réponde à un maximum; on en tire $y = a\sqrt[3]{4}$:

FIG. 30. en prenant, *fig.* 30, $AS = a\sqrt[3]{2}$ et $SL = a\sqrt[3]{4}$, le point L sera celui où le maximum a lieu.

Si on égale ensuite à zéro le dénominateur de $\frac{dy}{dx}$, on trouvera $y^2 - ax = 0$: sans faire le calcul, on voit par la symétrie des résultats, que dans ce second cas, la valeur de x sera la même que celle de y dans le précédent, celle de y la même que celle de x, et que par conséquent, on trouvera le point X, en prenant $AV = a\sqrt[3]{4}$ et $VX = a\sqrt[3]{2}$.

En faisant nuls le numérateur et le dénominateur, en même temps, il vient $x = 0$ et $y = 0$, valeurs qu'on retrouve aussi dans les équations qui donnent les maximums et les minimums, mais qui, appartenant à l'origine, font voir qu'elle peut être un point singulier. Pour connaître la tangente à ce point, on différentiera une seconde fois l'équation proposée, en regardant dx et dy comme constantes (136); et en supposant x et y nuls, on trouvera $6adxdy = 0$, équation à laquelle on satisfera, soit en faisant $\frac{dy}{dx} = 0$, soit en faisant $\frac{dx}{dy} = 0$; il s'ensuit que la courbe à l'origine, a deux tangentes distinctes, que l'une de ces tangentes est l'axe même des abscisses, et l'autre celui des ordonnées : ainsi l'origine est un point multiple.

Pour montrer comment l'analyse retrace fidellement toutes les circonstances géométriques, je ferai remarquer que parmi les deux valeurs nulles qu'on a trouvées pour x dans le n° 164, il y en a une qui satisfait aux conditions du minimum; et en effet, dans la branche YAX de la courbe proposée, qui touche l'axe des abscisses AB, l'ordonnée est bien un minimum au point A. On voit pareillement que l'abscisse du même point est un minimum dans la branche AZ touchée par l'axe des ordonnées (*).

(*) La courbe de la figure 30 joint aux particularités remarquables que nous avons

237. La courbe dont je me suis occupé dans le n° 176, donnant lieu par sa forme à l'application de toutes les théories précédentes, je vais la considérer de nouveau, et je commencerai par chercher la nature de ses branches infinies. L'examen des expressions de y (page 391), a déjà fait reconnaître qu'elle avait quatre branches infinies; mais on peut le découvrir sans le secours de ces expressions. En faisant $y=tx$, dans l'équation

$$y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0,$$

elle se divise par x^2 et devient

$$t^4x^2-96a^2t^2+100a^2-x^2=0,$$

d'où l'on tire

$$x^2=\frac{100a^2-96a^2t^2}{1-t^4},$$

résultat qui, lorsque $t=\pm 1$, donne $x=\pm$ infini; et combinant les deux valeurs de x avec celles de t, on a $y=\pm$ infini, pour chacune des valeurs infinies de x. Cela posé, l'équation de la courbe conduit à

$$x-y\frac{dx}{dy}=\frac{x^4-50a^2x^2-y^4+48a^2y^2}{x^3-50a^2x},$$

$$y-x\frac{dy}{dx}=\frac{y^4-48a^2y^2-x^4+50a^2x^2}{y^3-48a^2y}.$$

Ces expressions se simplifiant beaucoup, quand on y met pour x^4 sa valeur, se réduisent à

$$\frac{50a^2x^2-48a^2y^2}{x^3-50a^2x},\quad \frac{48a^2y^2-50a^2x^2}{y^3-48a^2y},$$

et la supposition de x et de y infinis les fait évanouir; ainsi la courbe proposée a des asymptotes passant par l'origine des coordonnées. Pour achever de les déterminer, il faut faire $y=\pm x$ et $x=\pm$ infini, dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$; et prenant toutes les combinaisons des signes $+$ et $-$, on trouvera $\frac{dy}{dx}=\pm 1$. On voit par là, que la courbe propo-

---

déjà fait connaître, celle d'être partagée en deux parties égales par une droite menée par le point A, perpendiculairement à son asymptote; on s'assurera de cette dernière propriété en cherchant le diamètre absolu par le procédé indiqué n° 185.

FIG. 4. sée a pour asymptotes deux droites menées par le point A, *fig.* 4, et faisant avec l'axe des abscisses un angle de $0^\circ,5$. On ne les a tirées qu'en partie, afin de ne pas trop compliquer la figure.

238. Venons maintenant aux points singuliers de la courbe que nous discutons. Dans cette courbe on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-50a^2x}{y^3-48a^2y};$$

et en égalant à zéro le numérateur de cette fraction, on trouvera $x=0$ et $x^2-50a^2=0$. La première valeur de x, substituée dans l'équation proposée, donne $y=0$ et $y=\pm\sqrt{96a^2}$; mais comme en faisant $x=0$ et $y=0$, il vient $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, il faut recourir au procédé du n° 148, pour trouver la vraie valeur de cette expression; on obtient $-48a^2dy^2+50a^2dx^2=0$, d'où

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{50}{48}}=\pm\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Il suit de ces valeurs qu'au point A, la courbe est touchée par deux droites qui font avec l'axe des abscisses, des angles dont les tangentes trigonométriques sont respectivement $\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$, et qu'il est par conséquent aisé de construire : ce point n'est donc ni un maximum, ni un minimum, mais l'intersection de deux branches.

Pour achever de connaître la forme de la courbe à ce point multiple, il faudrait savoir comment les branches y sont placées par rapport à leurs tangentes, ou de quel côté elles tournent leur concavité : il faudrait donc chercher de quel signe sont les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ avant et après, ce qui pourrait entraîner des longueurs, à cause que les deux variables entrent à-la-fois dans ces valeurs, et il serait plus court de chercher les développemens de y en série ascendante, suivant les puissances de x; mais dans l'exemple actuel, on parvient au même but en examinant ce que deviennent les coefficiens différentiels des ordres supérieurs. En effet, la différentielle seconde de l'équation proposée étant

$$(y^3-48a^2y)d^2y+(3y^2-48a^2)dy^2+(50a^2-3x^2)dx^2=0,$$

laisse d^2y indéterminé, quand $y=0$; mais si on passe à la différentielle troisième, qui est

$$(y^3-48a^2y)d^3y+3(3y^2-48a^2)dyd^2y+6ydy^3-6xdx^3=0,$$

la supposition de $x=0$ et de $y=0$ donne $144a^2dyd^2y=0$, d'où il faut nécessairement conclure $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, puisque $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{50}{48}}$: nous pouvons donc être ici dans l'un des cas remarqués n° 136, et il faut par conséquent chercher la valeur de $\frac{d^3y}{dx^3}$, qui s'obtiendra en passant à la différentielle quatrième. Cette dernière, en y faisant x, y et d^2y nuls, se réduit à

$$-4.48a^2dyd^3y+6dy^4-6dx^4=0;$$

l'on en tire alors

$$-32a^2\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy^4}{dx^4}-1=0,$$

et mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\pm\sqrt{\frac{50}{48}}$, il vient

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\left(\frac{50}{48}\right)^2-1}{\pm32a^2\sqrt{\frac{50}{48}}}.$$

Ce coefficient d'ordre impair ne s'évanouissant pas, il s'ensuit que la courbe coupe sa tangente au point A (230), et qu'elle subit par conséquent une inflexion à ce point; d'ailleurs l'ordonnée de cette tangente étant désignée par y', la série

$$y-y'=\pm\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

montre que la branche touchée par la droite AL, qui répond à $\frac{dy}{dx}=+\sqrt{\frac{50}{48}}$, est au-dessus de cette droite, du côté des abscisses positives, et au-dessous, du côté des négatives, et que le contraire a lieu pour la branche touchée par la droite AL'.

239. Je reviens aux valeurs $y=\pm\sqrt{96a^2}=\pm4a\sqrt{6}$. Elles rendent

véritablement nulle l'expression de $\frac{dy}{dx}$, puisqu'elles ne font pas évanouir son dénominateur; ainsi aux points D et D' qu'elles indiquent, la tangente de la courbe est parallèle à l'axe des abscisses. On s'assurera qu'au point D l'ordonnée a atteint un maximum positif, soit en cherchant ce que devient alors $\frac{d^2y}{dx^2}$, soit en vérifiant si l'ordonnée qui la précède et celle qui la suit immédiatement sont toutes deux plus petites. Ce dernier moyen est bien facile, puisqu'on a dans le cas actuel les expressions de y en x (page 391); et il est visible qu'il s'agit de celles où le second radical a le signe $+$. Il est à propos de remarquer que, suivant la règle du nº 156, le point D', qui est un maximum négatif, se présenterait comme un minimum, parce que $\frac{d^2y}{dx^2}$ y a une valeur positive; et cela doit être, puisque le passage du positif au négatif se faisant par des soustractions, le point D' est le terme du décroissement, et par conséquent un véritable minimum, eu égard aux ordonnées positives.

Il reste encore à examiner les racines de l'équation $x^2-50a^2=0$, qui sont $x=\pm\sqrt{50a^2}=\pm 5a\sqrt{2}$. En les substituant dans l'équation proposée, elles rendent imaginaires les expressions de y, et n'appartiennent point par conséquent à la courbe proposée.

240. Cherchons maintenant les valeurs de x et de y qui peuvent rendre infinie la valeur de $\frac{dy}{dx}$. Égalons pour cela son dénominateur à zéro; nous formerons l'équation $y^3-48a^2y=0$, d'où il résulte $y=0$ et $y=\pm\sqrt{48a^2}$. La première valeur, mise dans l'équation de la courbe, donne $100a^2x^2-x^4=0$, et l'on en conclut $x=0$, $x=\pm 10a$. La racine $x=0$ indique encore le point multiple placé à l'origine A, mais les deux autres répondent aux points I et I', où la courbe rencontre encore l'axe des abscisses, et où sa tangente est perpendiculaire à cet axe, puisque les valeurs $x=\pm 10a$, ne font pas évanouir le numérateur de $\frac{dy}{dx}$. On voit que ce sont les points à partir desquels les valeurs de y, où le second radical a le signe $-$, deviennent imaginaires pour toujours; on pourrait les considérer comme des maximums, par rapport à la variable x et à l'axe AC, et on les constaterait par l'examen des valeurs correspondantes de $\frac{d^2x}{dy^2}$.

Les deux dernières valeurs $y = \pm\sqrt{48a^2} = \pm 4a\sqrt{3}$, conduisent à $x = \pm 6a$ et $x = \pm 8a$; l'un de ces résultats fait connaître le point F et ses analogues, l'autre le point H et ses analogues. Dans tous ces points, la tangente est perpendiculaire à la ligne des abscisses, et comme la courbe n'a point d'ordonnées réelles, depuis $x = 6a$ jusqu'à $x = 8a$, c'est-à-dire sur l'espace EG, cette circonstance suffit pour faire voir comment elle doit être tournée à l'égard de sa tangente, aux points F et H.

241. Après avoir déterminé la nature de tous les points singuliers indiqués par le coefficient différentiel du premier ordre, il faut encore chercher si les coefficiens des ordres supérieurs n'en manifesteraient pas d'autres; pour cela, il faut considérer d'abord le coefficient différentiel du second ordre. Son expression générale est

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3x^2 - 50a^2) - (3y^2 - 48a^2)\frac{dy^2}{dx^2}}{y^3 - 48a^2y};$$

elle devient $\frac{0}{0}$ lorsque x et y sont nuls; mais nous n'avons point à nous arrêter sur ces valeurs, puisque le point auquel elles appartiennent est suffisamment discuté.

La supposition de $y^2 - 48a^2 = 0$ ne doit pas nous arrêter non plus, car nous savons qu'elle répond aux points F et H; mais le numérateur étant égalé à zéro, donnera une équation qui peut indiquer d'autres valeurs que les précédentes: cette équation est

$$3x^2 - 50a^2 - (3y^2 - 48a^2)\frac{dy^2}{dx^2} = 0;$$

il en faut chasser $\frac{dy}{dx}$, au moyen de son expression générale, et faisant disparaître les dénominateurs, on obtiendra

$$(3x^2 - 50a^2)(y^3 - 48a^2y)^2 - (3y^2 - 48a^2)(x^3 - 50a^2x)^2 = 0,$$

résultat auquel on peut donner la forme suivante:

$$y^2(y^2 - 48a^2)^2(3x^2 - 50a^2) - x^2(x^2 - 50a^2)^2(3y^2 - 48a^2) = 0.$$

Si maintenant on observe que l'équation proposée revient elle-même à

$$(y^2 - 48a^2)^2 - (x^2 - 50a^2)^2 + 196a^4 = 0,$$

et qu'on prenne dans cette équation la valeur de $(y^2-48a^2)^2$ pour la substituer dans la précédente, on trouvera, après les réductions,

$$(x^2-50a^2)^2(25y^2-24x^2)+98a^2y^2(3x^2-50a^2)=0:$$

cette dernière, combinée avec la proposée, conduit à la détermination des ordonnées et des abscisses du point d'inflexion K et de ses analogues, dont l'existence est d'ailleurs bien clairement indiquée par la marche des branches de la courbe; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

Des courbes transcendantes.

242. Je n'ai considéré jusqu'ici que des courbes algébriques; je vais maintenant faire connaître quelques-unes des courbes transcendantes les plus remarquables: je m'occuperai d'abord de la *logarithmique*, courbe dans laquelle la relation des coordonnées est celle qui existe entre un nombre et son logarithme. La manière la plus simple de la construire par points, pour s'en former une idée, est de diviser l'axe des abscisses en parties égales, pour représenter les nombres, et de prendre les logarithmes correspondans dans les tables, pour les porter sur les ordonnées. Suivant ce procédé, son équation est $y=\mathrm{l}x$.

Si on portait au contraire les logarithmes sur l'axe des abscisses, et que l'on prît les nombres pour ordonnées, il viendrait l'équation $y=a^x$, a désignant la base du système de logarithme que l'on considère. On voit par là que la logarithmique est aussi le lieu de l'équation exponentielle, et que cette forme revient à la première, en changeant x en y et y en x.

Je m'en tiendrai à l'équation $y=\mathrm{l}x$. Quand on y fait $x=1$, il vient $y=0$; ce qui montre que la courbe proposée rencontre l'axe AB au

FIG. 51. point E, *fig.* 51, où l'abscisse $AE=1$. La branche EX, qui répond aux abscisses positives plus grandes que l'unité, est infinie, puisque les logarithmes de ces abscisses croissent toujours. Dans la partie AE, où les abscisses sont des fractions, les ordonnées sont négatives et augmentent à mesure que les fractions diminuent, ensorte que la branche Ex a pour asymptote la partie négative AC de l'axe des ordonnées: enfin la logarithmique ne s'étend point du côté des abscisses négatives, puisque leurs logarithmes sont imaginaires (*Introd.* 82).

Les logarithmiques ne diffèrent entre elles qu'à raison du module relatif au système de logarithmes qu'elles représentent; ainsi, dès qu'une logarithmique est construite, on peut construire toutes les autres en prenant leurs ordonnées correspondantes, dans le rapport des modules respectifs.

En faisant faire un quart de révolution à la figure 51, on aura la figure 52, qui convient à l'équation $y=a^x$, lorsqu'on prend sur AC les x positifs. FIG. 52.

243. La différentielle de l'équation $y=1x$, en supposant le module quelconque M, donne

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M}{x}\ (13).$$

Il s'ensuit que la tangente de la logarithmique est perpendiculaire à la ligne des abscisses, lorsque $x=0$, et qu'elle ne lui est parallèle qu'en supposant x infini.

L'expression générale de la soutangente devient $PT=\frac{xy}{M}$, *fig.* 51; FIG. 51.
mais en chassant y on introduit le logarithme de x, ainsi cette expression est transcendante. Cependant en prenant la soutangente sur l'axe AC, on aura $OD=\frac{xdy}{dx}=M$, résultat bien remarquable, puisqu'il montre que la soutangente OD est constante pour tous les points de la courbe, et égale au module.

Je passe à la recherche du rayon de courbure. On a

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{x^2+M^2}{x^2},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{x^2},$$

d'où (221)

$$\gamma=\frac{(x^2+M^2)^{\frac{3}{2}}}{Mx},\quad y-\beta=\frac{x^2+M^2}{M},\quad x-\alpha=-\frac{x^2+M^2}{x}.$$

On voit par ces valeurs, que l'expression du rayon de courbure est algébrique, et que la développée est transcendante, puisque son équation s'obtiendrait en substituant dans $y=1x$ les valeurs de x et de y, tirées des expressions précédentes de $y-\beta$ et de $x-\alpha$.

244. La *cycloïde*, qui par ses propriétés, a depuis son origine fixé l'attention des géomètres, est la courbe décrite par un point pris sur la circonférence d'un cercle, pendant que ce cercle roule sur une ligne droite donnée de position. Cette courbe est transcendante, parce que la relation entre ses ordonnées et ses abscisses dépend des arcs du cercle générateur.

L'origine du mouvement du cercle étant arbitraire, puisqu'il peut rouler indéfiniment, je la prends au point A, *fig.* 53, où le point dé- FIG. 53.

crivant, M, se trouvait sur la droite AB, parcourue par le cercle générateur QMG. Puisque ce cercle, en roulant, applique successivement tous les points de sa circonférence sur la droite AB, il est évident que lorsqu'il est parvenu dans une situation quelconque QMG, la distance AQ est égale à l'arc MHQ, compris entre le point M qui touchait la droite AB en A, et le point Q qui la touche présentement.

Si on élève par le point Q la perpendiculaire QO qui passera par le centre du cercle générateur, et que l'on mène MN parallèle à AB, MN sera le sinus de l'arc MHQ, et NQ en sera le sinus-verse: posant donc

$$QO=a, \quad AP=x, \quad PM=NQ=y,$$

on aura $MN=\sqrt{2ay-y^2}$; et comme $x=AP=AQ-PQ=MHQ-MN$, il viendra

$$x=MHQ-\sin MHQ,$$

l'arc MHQ étant déterminé par l'une ou l'autre des équations

$$\sin MHQ=\sqrt{2ay-y^2}, \text{ sin-verse de } MHQ=y.$$

Si l'on voulait construire la cycloïde par points, il serait commode d'employer les tables trigonométriques; et comme elles sont calculées pour un cercle dont le rayon est l'unité, il faudrait prendre dans ce cercle un arc t du même nombre de degrés que MHQ; on aurait $MHQ=at$, $\sin MHQ=a\sin t$, sin-vers. $MHQ=a$ sin-vers. t, et par conséquent

$$x=a(t-\sin t),$$

$$a\sin t=\sqrt{2ay-y^2}, \quad a \text{ sin-verse } t=y.$$

En introduisant le cosinus à la place du sinus-verse, les valeurs correspondantes de x et de y seront données par les deux équations

$$x=a(t-\sin t), \qquad y=a(1-\cos t),$$

qui conduisent à des calculs numériques extrêmement faciles, lorsqu'on se donne la valeur de t en degrés, puisqu'on a des tables de la longueur absolue des arcs, ainsi que de celles de leur sinus et de leur cosinus.

L'élimination de t entre ces deux équations, mène à une équation primitive de la cycloïde; mais cette élimination ne peut que s'indiquer en désignant l'arc t par son sinus, ou son cosinus, ou son sinus-verse;

en employant ce dernier, on a

$$x = a \text{ arc}\left(\text{dont le sinus-verse} = \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Si l'on différentie cette équation au moyen de l'une des formules données dans le n° 58, l'arc disparaîtra, et l'on obtiendra le résultat algébrique

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{2ay - y^2}} - \frac{ady - ydy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

qui se réduit à

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Telle est l'équation différentielle de la cycloïde; elle pourrait s'obtenir sans la considération des sinus, en différentiant l'expression

$$x = MHQ - MN,$$

ce qui donne

$$dx = d.MHQ - d.MN;$$

et faisant attention que l'arc MHQ appartient au cercle dont l'abscisse $QN = y$, l'ordonnée $MN = \sqrt{2ay - y^2}$, on calculerait d.MHQ par la formule générale du n° 216, dans laquelle on remplacerait x par y, et y par $\sqrt{2ay - y^2}$: on parviendrait ainsi au même résultat que ci-dessus.

245. Si l'on prend dans l'équation différentielle de la cycloïde, la valeur de dx, pour la substituer dans les formules générales du n° 213, on trouve

$$PT = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}, \qquad MT = \frac{y\sqrt{2ay}}{\sqrt{2ay - y^2}},$$
$$PR = \sqrt{2ay - y^2}, \qquad MR = \sqrt{2ay}.$$

Ces valeurs se construisent d'une manière très-simple; car il est aisé de remarquer que MP, ou y, étant considérée comme l'abscisse du cercle générateur QMG, la valeur donnée ci-dessus pour PR est précisément celle de l'ordonnée MN de ce cercle, et que, par conséquent la normale se confond avec la corde de l'arc MQ, comme on peut le voir aussi par l'expression de MR. Il suit de là que la tangente MT est le prolongement de la corde MG; mais si l'on imagine que le cercle QMG glisse sur le point Q pour atteindre une position quelconque qmg, les lignes mq et mg resteront, malgré ce changement, parallèles aux lignes MQ et MG: il suffira donc, pour construire la normale, en un point donné M, de rapporter ce point sur le cercle fixe qmg, ce qui se fera en tirant la droite Mm parallèle à AB, et de mener ensuite MT parallèlement à mg, et MQ parallèlement à mq.

246. Je passe à la recherche du rayon de courbure. Lorsqu'on différentie l'équation

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

en regardant dx comme constant, on obtient

$$o = (yd^2y + dy^2)\sqrt{2ay - y^2} - \frac{ydy\,(ady - ydy)}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

réduisant et divisant par y, il vient

$$o = (2ay - y^2)d^2y + ady^2,$$

d'où l'on tire

$$d^2y = -\frac{ady^2}{2ay - y^2};$$

substituant cette valeur et celle de dy dans l'expression du rayon de courbure (221), on trouve, après les réductions nécessaires,

$$\gamma = 2^{\frac{3}{2}}(ay)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ay}.$$

Ce résultat fait voir que le rayon de courbure MM' est double de la normale MQ, et qu'il ne peut par conséquent devenir plus grand que le double du diamètre du cercle générateur, diamètre qui est à la fois l'ordonnée et la normale de la cycloïde, au point I, où le contact Q a parcouru la moitié de la circonférence.

Les expressions de $x-\alpha$ et de $y-\beta$ donnent ensuite

$$y - \beta = 2y, \qquad x - \alpha = -2\sqrt{2ay - y^2};$$

on conclut de là

$$y = -\beta, \qquad x = \alpha - 2\sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation primitive de la cycloïde, et réduisant, on obtient

$$\alpha = a \text{ arc}\left(\text{dont le sin-verse} = -\frac{\beta}{a}\right) + \sqrt{-2a\beta - \beta^2},$$

résultat qui a beaucoup d'analogie avec cette équation. Le radical $\sqrt{-2a\beta-\beta^2}$ devient semblable à $\sqrt{2ay-y^2}$, lorsqu'on fait $\beta=-2a+\beta'$, ce qui revient à prendre, au lieu de l'ordonnée EM', toujours négative, l'ordonnée $P'M'$, rapportée à un axe $A'B'$, placé au-dessous de AB, à une distance $A'I=2a$. Par cette transformation, il vient

$$\alpha=a\,\text{arc}\left(\text{dont le sin-verse}=\frac{2a-\beta'}{a}\right)+\sqrt{2a\beta'-\beta'^2};$$

puis si l'on observe que deux arcs dont les sinus-verses réunis composent le diamètre, sont supplémens l'un de l'autre, et qu'on désigne par π la demi-circonférence, on pourra écrire :

$$\alpha=a\pi-a\,\text{arc}\left(\text{dont le sin-verse}=\frac{\beta'}{a}\right)+\sqrt{2a\beta'-\beta'^2}.$$

Prenant enfin $\alpha'=a\pi-\alpha$, c'est-à-dire, substituant à l'abscisse AE l'abscisse $A'P'=AI-AE$, il viendra

$$\alpha'=a\,\text{arc}\left(\text{dont le sin-verse}=\frac{\beta'}{a}\right)-\sqrt{2a\beta'-\beta'^2}$$

équation d'une cycloïde dont l'origine est au point A', et qui est décrite sur l'axe $A'B'$, par le même cercle générateur que la proposée, mais roulant dans le sens $A'B'$, contraire à AB.

La même conséquence peut se tirer immédiatement de la détermination du rayon de courbure. En prolongeant la droite GQ jusqu'à ce qu'elle rencontre $A'B'$ en Q', et menant $Q'M'$, on formera les triangles GMQ et $QM'Q'$ égaux entre eux : l'angle $QM'Q'$ sera donc droit, et si on décrit sur QQ', comme diamètre, un cercle, il passera par le point M' et sera égal au cercle générateur. Cela posé, puisque l'arc $M'Q'$ est le supplément de $M'Q$, qui lui-même est égal à MQ, on aura

$$\text{arc}\;M'Q'=QMG-\text{arc}\;MQ=AI-AQ=QI=A'Q',$$

ce qui montre bien évidemment que la développée $A'M'A$ est une cycloïde décrite par le cercle $QM'Q'$, roulant sur $A'B'$, de A' vers B'.

On remarquera sans doute que, d'après ce qui précède, la cycloïde est rectifiable, puisqu'elle est elle-même sa développée, et que l'expression de son rayon de courbure est algébrique; et on en déduira ce résultat curieux, que la longueur de l'arc $A'A$, ou de son égal AK, qui compose la moitié de la branche décrite par une révolution entière du cercle générateur, est précisément la même que celle de $A'K$, ou du double du diamètre de ce cercle.

247. La cycloïde n'est pas terminée au point L où le cercle a parcouru, sur la droite, AL sa circonférence entière; car rien ne limite la durée de ce mouvement. Il faut bien remarquer dans la description des courbes, que les diverses parties résultantes d'une même construction ou d'un même mouvement, appartiennent toutes à la même courbe. Ainsi le cercle QMG, en continuant de rouler sur la droite AB, au-delà du point L, décrit une suite infinie de portions semblables à AKL; et il faut en concevoir autant sur la gauche du point A, puisque le cercle a pu n'arriver à ce point, qu'à la suite d'un mouvement commencé depuis un temps indéfini. L'équation de la courbe conduit également à ces remarques; car rien n'empêche d'y supposer l'arc QM, augmenté ou diminué d'autant de circonférences que l'on voudra, ou bien de supposer la variable t (page 472) aussi grande qu'on voudra, soit positivement, soit négativement. On voit d'ailleurs que y ne pourra jamais surpasser $2a$, parce que son expression ne renferme que le cosinus de t, compris nécessairement entre les limites $+1$ et -1. Il suit de là que la cycloïde, conçue dans toute l'étendue qu'elle doit avoir, peut être coupée par une même ligne droite, dans une infinité de points.

Le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, étant égal à $-\frac{a}{y^2}$, est toujours négatif; mais il devient infini, ainsi que $\frac{dy}{dx}$, quand $y=0$, ce qui arrive lorsque l'arc MQ est égal à zéro ou bien à un multiple quelconque de la circonférence. Il résulte de là que les points A, L, etc. où se touchent les différentes branches de la cycloïde, sont des points de rebroussement de la première espèce, dans lesquels la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses (231).

248. Les spirales composent encore un ordre de courbes transcendantes, remarquables par leur forme et leurs propriétés. Voici comment s'engendre celle qu'imagina Conon de Syracuse, et dont Archimède découvrit les principales propriétés.

FIG. 54. Pendant que le rayon AO, *fig.* 54, se meut autour du centre A du cercle OQG, un point mobile, parti de ce centre, parcourt uniformé-

ment la ligne AO, et avec une vitesse telle qu'il arrive au point O, en même temps que cette droite a achevé sa révolution. Il suit de là que pour un point quelconque M de la spirale $AMOM'X$, le rapport de AM à AN est le même que celui de l'arc ON à la circonférence OGO; mais comme rien ne s'oppose à ce que le *point décrivant* continue son mouvement au-delà du point O, sur le rayon prolongé, et que ce rayon peut lui-même faire un nombre indéfini de révolutions, la courbe AMO se prolongera en tournant toujours autour du point A, de manière que le rapport entre la distance de chacun de ses points au point A et le rayon du cercle, soit égal à celui qui se trouve entre l'arc parcouru par le point O, depuis le commencement du mouvement et la circonférence entière. En M', par exemple, où le rayon AN a fait une révolution plus l'arc ON, on aura $\frac{AM'}{AN} = \frac{OGO+ON}{OGO}$. Si donc on fait $ON=t$, $AM=u$, et que prenant pour unité le rayon AN, on représente par 2π la circonférence OGO, on aura $u=\frac{t}{2\pi}$.

Les variables de cette équation sont ce que les géomètres appellent des *coordonnées polaires*. Le centre A du cercle OGO, se nomme le *pôle*; la ligne AM, assujétie à passer toujours par ce point, est le *rayon vecteur*, et tient lieu de l'ordonnée de la courbe, tandis que l'arc ON remplace l'abscisse.

La spirale que nous venons de considérer, et qui porte le nom de *spirale d'Archimède*, n'est qu'un cas particulier des courbes que représenterait l'équation $u=at^n$, en donnant à n toutes les valeurs possibles. Lorsqu'on fait $n=-1$, on a $u=at^{-1}$ ou $ut=a$, équation qui appartient à la *spirale hyperbolique*.

Si, au lieu de la distance AM, on prenait pour u la partie MN du rayon vecteur, comprise entre le point M et la circonférence du cercle OGO, l'équation $u^2=at$ serait celle de la *spirale parabolique*, ou de la courbe qu'on formerait en roulant l'axe d'une parabole autour d'un cercle; les ordonnées se trouveraient alors perpendiculaires à la circonférence de ce cercle, et tomberaient sur ses rayons.

Tant que n est un nombre positif, les spirales données par l'équation $u=at^n$, prennent leur origine au point A; mais quand n est négatif, u, d'abord infini lorsque $t=0$, diminue à mesure que cet arc augmente, et à chaque nouvelle révolution le point décrivant s'approche du point A, sans pouvoir jamais y atteindre.

Pour appliquer aux spirales qui sont rapportées à des coordonnées polaires, les expressions des soutangentes, des tangentes, etc. que nous avons trouvées relativement à des coordonnées rectangles, il faut transformer ces dernières coordonnées dans les premières, ce qui servira à montrer comment on peut passer de l'un de ces systèmes à l'autre. Cela sera d'autant plus utile, qu'on rapporte quelquefois les courbes algébriques à des coordonnées polaires; on le fait surtout à l'égard des lignes du second degré, en prenant leur foyer pour pôle.

249. Plaçons au point A, pour plus de simplicité, l'origine des coordonnées rectangles $AP=x$, $PM=y$; soit $QO=m$, l'arc intercepté entre le point Q, situé sur l'axe des abscisses AB, et le point O, origine de l'arc t. En menant PM perpendiculaire sur AB, et en observant que l'angle MAP est mesuré par l'arc NQ égal à $t-m$, nous aurons

$$\overline{AM}^2=\overline{AP}^2+\overline{PM}^2,\quad AP=AM\cos NQ,\quad PM=AM\sin NQ,$$

d'où il suit

$$u=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$x=u\cos(t-m),\quad y=u\sin(t-m)\quad \text{et}\quad \frac{y}{x}=\operatorname{tang}(t-m).$$

Au moyen de ces valeurs de x et de y, on changera toute équation algébrique rapportée à des coordonnées rectangles, dans une autre qui ne contiendra plus que le sinus, le cosinus de l'arc t et le rayon vecteur u. Les mêmes valeurs donnent aussi

$$\cos(t-m)=\frac{x}{u},\qquad \sin(t-m)=\frac{y}{u};$$

d'où l'on tirera des valeurs de $\cos t$ et de $\sin t$ en x, y, u, $\sin m$, et $\cos m$, qui, étant substituées dans une équation quelconque entre u, $\sin t$ et $\cos t$, conduiront à un résultat ne renfermant plus que x et y, puisqu'on pourra remplacer u par $\sqrt{x^2+y^2}$. Si, pour abréger, on suppose que la ligne AB se confonde avec la ligne AO, on aura seulement

$$\cos t=\frac{x}{u},\qquad \sin t=\frac{y}{u},\qquad \text{et}\qquad \operatorname{tang} t=\frac{y}{x}.$$

Lorsque l'équation en u et t, qu'on se propose de transformer, contient l'arc t lui-même, il n'est plus possible d'obtenir une relation algébrique entre x et y, puisqu'on n'en a point de semblable entre l'arc t, son sinus et son cosinus: l'équation $u=at^n$ ne conduirait qu'à

$$\sqrt{x^2+y^2}=a\left\{\text{arc}\left(\text{dont la tang}=\frac{y}{x}\right)\right\}^n;$$

mais on parvient, ainsi qu'on va le voir, à une équation différentielle qui ne contient plus que x, y, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$.

On tire des valeurs trouvées ci-dessus, pour u, x et y,

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\cos(t-m)-u\mathrm{d}t\sin(t-m),\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}u\sin(t-m)+u\mathrm{d}t\cos(t-m);$$

et si on élimine $\mathrm{d}u$ des deux dernières équations, il viendra

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}y\cos(t-m)-\mathrm{d}x\sin(t-m)}{u};$$

mettant pour $\cos(t-m)$, $\sin(t-m)$ et u, leurs valeurs, on aura

$$\mathrm{d}t=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}:$$

on pourra donc chasser de l'équation en u et t, et de sa différentielle, les quantités u, $\cos t$, $\sin t$, $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}t$; les deux résultats qu'on obtiendra ne contenant plus que t, on le fera disparaître par l'élimination.

Prenons pour exemple l'équation $u=at^n$, qui donne $u^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}t$, $\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u=a^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t$; les expressions de u, de $\mathrm{d}u$ et de $\mathrm{d}t$, étant indépendantes de m, il viendra, en les substituant et en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{1}{n}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=a^{\frac{1}{n}}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x).$$

Avec cette équation on déterminerait les soutangentes, les tangentes, etc. des spirales, en faisant usage des formules du n° 213; mais il sera plus simple et en même temps plus général de transformer ces formules relativement aux variables u et t, et c'est ce que je vais faire.

250. L'expression de la soutangente devient, en mettant pour y' et

$\frac{dx}{dy}$ leurs valeurs,

$$PT = u\sin(t-m)\frac{du\cos(t-m) - udt\sin(t-m)}{du\sin(t-m) + udt\cos(t-m)}.$$

On simplifiera beaucoup ce résultat, en observant que la situation de la ligne des abscisses, sur laquelle tombe la distance PT, est arbitraire, et qu'on peut par conséquent prendre toujours m telle que l'arc QN soit $\frac{1}{2}\pi$, auquel cas l'ordonnée PM se confond avec le rayon vecteur AM, $\cos(t-m)=0$, $\sin(t-m)=1$, et PT se change en $AT' = -\frac{u^2dt}{du}$.

On construira la tangente en menant par le point A, une perpendiculaire au rayon vecteur AM, et en portant sur cette droite la valeur de AT', donnée par la formule ci-dessus.

Si on applique cette formule à l'équation $u=at^n$, on trouvera

$$AT' = -\frac{u^2}{nat^{n-1}} = -\frac{a}{n}t^{n+1}.$$

Dans la spirale de Conon on a $n=1$ et $a=\frac{1}{2\pi}$; il en résulte $AT' = -\frac{t^2}{2\pi}$. On voit par cette expression que lorsque $t=2\pi$, ou qu'après une révolution du point décrivant, la soutangente est égale à la circonférence OGQ rectifiée, et qu'après m révolutions, t étant $2m\pi$, AT' devient en conséquence $-2m^2\pi = -m.2m\pi$; la soutangente est donc alors égale au nombre des révolutions multiplié par $2m\pi$, circonférence dont le rayon est égal à m fois AO, et qui, par cette raison, embrasse la partie de la spirale décrite dans la dernière des révolutions effectuées; c'est aussi à ce résultat qu'Archimède est parvenu dans son *Traité des Spirales*.

Lorsque $n=-1$, ce qui est le cas de la spirale hyperbolique, il vient $AT'=a$, c'est-à-dire, que la soutangente de cette courbe est constante.

Je ne m'arrête point à la recherche de la sounormale et de la normale, parce qu'on les obtient facilement lorsque la soutangente est connue.

J'observerai seulement que $\frac{AT'}{AM} = -\frac{udt}{du}$, exprime la tangente de l'angle que fait avec le rayon vecteur AM la droite $T'M$, qui touche la courbe au point M, et qu'on a

$$MT' = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AT'}^2} = u\sqrt{1 + \frac{u^2 dt^2}{du^2}}.$$

251. En substituant les expressions de dx et de dy du n° 249, dans celle de $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (216), et faisant les réductions qui se présentent à cause que $\sin(t-m)^2 + \cos(t-m)^2 = 1$, on obtient pour la différentielle de l'arc DM,

$$ds = \sqrt{du^2 + u^2 dt^2},$$

expression indépendante de l'angle m, ce qui était aisé à prévoir, car la différentielle d'une variable ne dépend point de la place que l'on assigne à l'origine de cette variable.

252. Dans le système des coordonnées polaires, c'est à des secteurs que se rapportent les aires des courbes; l'aire de la courbe OMR, *fig.* 55, se compose du secteur OAM. Si on place au point A l'origine FIG. 55.
des coordonnées rectangles AP et PM, et que l'on prenne AO pour l'axe des abscisses, $MPAR$ sera le segment représenté par z dans le n° 217, et l'on aura

$$OAM = OAR - MPAR + APM;$$

prenant les différentielles, et observant que le secteur OAR est une quantité constante, puisqu'il se termine à des points fixes, il viendra

$$d.OAM = -d.MPAR + d.APM = -dz + d.\tfrac{1}{2}xy;$$

mettant pour dz sa valeur ydx, et effectuant le calcul, on aura

$$d.OAM = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

Pour transformer cette expression en coordonnées polaires, on observera que $x = u\cos t$, $y = u\sin t$, et il en résultera

$$d.OAM = \frac{u^2 dt}{2}.$$

253. Transformons maintenant l'expression du rayon de courbure. Pour supposer dt constant, nous ferons varier à-la-fois dx et dy, en regardant x et y comme des fonctions implicites de t; et alors il faudra que les expressions de γ, $x-\alpha$ et $y-\beta$, rapportées dans le n° 221, soient transformées de manière à n'y regarder aucune différentielle comme constante (68): il viendra alors

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x},$$

$$y-\beta = -\frac{dx(dx^2+dy^2)}{dxd^2y-dyd^2x}, \qquad x-\alpha = \frac{dy(dx^2+dy^2)}{dxd^2y-dyd^2x}.$$

Cela posé, les valeurs de dx et de dy (249) donneront d'abord

$$dx^2+dy^2 = du^2+u^2dt^2 \quad (251),$$

et en les différentiant, on trouvera

$$d^2x = d^2u\cos(t-m) - 2dudt\sin(t-m) - udt^2\cos(t-m),$$
$$d^2y = d^2u\sin(t-m) + 2dudt\cos(t-m) - udt^2\sin(t-m),$$

d'où l'on conclura

$$dxd^2y - dyd^2x = 2du^2dt - udtd^2u + u^2dt^3,$$

après les réductions qui s'offrent d'elles-mêmes. Au moyen de ces valeurs, il viendra

$$\gamma = -\frac{(du^2+u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{2du^2dt-udtd^2u+u^2dt^3}.$$

Ce résultat, comme on devait s'y attendre, est indépendant de la quantité m, qui ne tient qu'à la position arbitraire de l'axe des x, et on aurait pu simplifier les calculs, en prenant, ainsi qu'on l'a fait dans le n° 250, cet axe perpendiculaire au rayon vecteur, d'où il résulte $\sin(t-m)=1$, $\cos(t-m)=0$; cette hypothèse étant établie dans les expressions ci-dessus, il vient

$$dx = -udt, \quad dy = du, \quad d^2x = -2dudt, \quad d^2y = d^2u - udt^2,$$

et l'on a sur-le-champ la valeur de γ rapportée ci-dessus.

Lorsque l'on fait usage des coordonnées polaires, il est très-simple de
FIG. 54. rapporter le centre F du cercle osculateur, *fig.* 54, au rayon vecteur AM, au moyen de la droite FE perpendiculaire sur ce rayon vecteur, et de

la distance ME. Les expressions de ME et de FE se concluent immédiatement de celles de $y-\beta$ et de $x-\alpha$, en prenant comme ci-dessus la ligne AM pour l'axe des y, parce qu'alors la partie AE représente l'ordonnée β de la développée, et EF son abscisse α; il suit de là que

$$ME = AM - AE = y-\beta, \qquad EF = -\alpha,$$

puisque l'origine des coordonnées rectangles étant au point A, x est nul. Calculant, d'après ces relations et les formules rapportées au commencement de cet article, les valeurs de $y-\beta$ et de $x-\alpha$, on obtiendra

$$ME = \frac{udu^2 + u^3dt^2}{2du^2 - ud^2u + u^2dt^2}, \qquad EF = \frac{du^3 + u^2dudt^2}{2du^2dt - udtd^2u + u^2dt^2}.$$

Je ferai remarquer que dans plusieurs auteurs la ligne ME est appelée *co-rayon* de courbure.

254. Pour faire une application de cette formule, je prends la *spirale logarithmique* dont l'équation est $t = lu$. En différentiant, on trouve $dt = \frac{Mdu}{u}$, ou $\frac{udt}{du} = M$, ce qui montre que dans tous les points de cette courbe, la tangente fait le même angle avec le rayon vecteur, propriété très-remarquable.

Une seconde différentiation, où l'on suppose dt constante, donne $ud^2u - du^2 = o$, d'où $d^2u = \frac{du^2}{u}$; substituant cette valeur, ainsi que celle de dt, dans l'expression de γ et dans celles de ME et de EF, on trouvera

$$\gamma = MF = -\frac{u\sqrt{1+M^2}}{M}, \qquad ME = u = AM, \qquad EF = \frac{u}{M}.$$

Par la première de ces valeurs, le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur; la seconde, montre que la perpendiculaire abaissée du centre F du cercle osculateur doit toujours tomber au point A, comme l'indique la figure 56. Alors la droite EF, se changeant en AF, est aussi le rayon vecteur de la développée FZ; et comparant la valeur de EF à celle de AM, on trouve tang $MFA = \frac{AM}{AF} = M$, c'est-à-dire que la tangente de l'angle que la ligne qui touche la dé- FIG. 56.

veloppée fait avec son rayon vecteur, est constant et le même que l'angle AMT', relatif à la courbe proposée. On le voit aussi par les triangles MAT' et MAF, rectangles en A, en faisant attention que le rayon de courbure MF est perpendiculaire sur la tangente MT'. Il suit de là que la développée FZ est une spirale logarithmique semblable à la proposée AX.

255. Non-seulement une courbe est donnée lorsqu'on a son équation, soit en coordonnées respectivement parallèles à deux droites fixes, soit en coordonnées polaires; mais elle l'est encore lorsqu'on a une relation quelconque entre deux quantités déterminées par sa nature. La propriété qu'a la tangente de la spirale logarithmique de faire un angle constant avec le rayon vecteur AM (254), pourrait donner lieu à une équation entre les droites AM et AT', et qui serait, en nommant u la première et v la seconde, $u=av$. On passerait de cette équation à celle qui doit avoir lieu en coordonnées polaires, en mettant au lieu de AT', son expression $-\frac{u^2dt}{du}$.

De même, une relation entre le rayon de courbure et l'arc d'une courbe doit être envisagée comme une équation de cette courbe; et elle aurait ce caractère remarquable, que l'une des variables serait tout-à-fait inhérente à la courbe; car la grandeur du rayon de courbure étant absolument indépendante de la nature et de la position des coordonnées, reste toujours la même pour le même point, quelque situation qu'ait la courbe. A l'égard de l'arc, son origine serait arbitraire, puisqu'on pourrait commencer à le compter de tel point qu'on voudrait de la courbe; c'est pourquoi MM. Carnot et Ampère, le premier, à la fin de son *Traité de la Géométrie de position*, le second, dans le XIV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, ont cherché des moyens de former l'équation d'une courbe de manière qu'il n'y restât rien d'arbitraire ou d'étranger à cette courbe.

Pour passer des coordonnées rectangles ou polaires, à une relation entre l'arc et le rayon de courbure, il faudrait éliminer dans le premier cas x et y, de l'équation proposée, au moyen des équations

$$ds^2=dx^2+dy^2,\ \gamma=-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x}=-\frac{ds^3}{dxd^2y-dyd^2x}\ (216 \text{ et } 221),$$

et chasser u et t dans le second, en faisant usage de l'équation $ds^2=du^2+u^2dt^2$ et de l'expression de γ trouvée n° 253.

Les mêmes équations donnant le moyen d'éliminer s et γ d'une équation entre ces variables, serviront à passer de cette équation à une autre, entre des coordonnées rectangles ou des coordonnées polaires; le procédé pour faire cette élimination a été indiqué n° 73.

Il faut observer que parmi les relations qui peuvent caractériser une courbe, il y en a qui sont exprimées par des équations algébriques, et d'autres qui ne le sont que par des équations différentielles: ces dernières sont en quelque sorte indéterminées, c'est-à-dire qu'elles peuvent appartenir à une infinité de courbes douées toutes d'une propriété commune; car d'après la remarque faite dans le n° 50, l'équation primitive de laquelle elles tirent leur origine, doit renfermer un nombre de constantes arbitraires égal à l'exposant de leur ordre. Les considérations géométriques confirment elles-mêmes cette remarque.

Si, par exemple, on différentiait l'équation de la parabole $y^2=ax$, et qu'on éliminât ensuite a, on aurait pour résultat l'équation $2xdy-ydx=0$, laquelle donnant $y\frac{dx}{dy}=2x$, exprime que la soutangente est double de l'abscisse, propriété commune à toutes les paraboles, quel que soit leur paramètre.

L'équation $y^2=m(a^2-x^2)$; appartenant à une ellipse dont le centre est à l'origine des x et des y, et dont les axes, situés dans la direction de ceux des coordonnées, sont a et $a\sqrt{m}$, donne par l'élimination des deux constantes a et m, l'équation différentielle du second ordre $y\frac{dy}{dx}-x\frac{dy^2}{dx^2}-xy\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (50); chacune des ellipses que peut représenter la première, en donnant aux quantités a et m toutes les valeurs possibles, satisfait à la seconde, et le cercle de l'équation $x^2+y^2=a^2$ s'y trouve compris.

On voit par ce qui précède, que la considération des équations différentielles donne le moyen d'exprimer les propriétés les plus générales des courbes, en conduisant à des résultats indépendans des constantes qui particularisent ces courbes.

256. Leibnitz, pour appliquer le Calcul différentiel aux courbes, les considéra comme des polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits; dans cette hypothèse, la tangente n'est autre chose que le prolongement du côté du polygone, comme on le voit dans la figure 57; les triangles semblables $MM'Q$ et PMT donnent tout de suite

Des courbes considérées comme des polygones.

FIG. 57.

$PT = \frac{MP \times MQ}{M'Q}$, et si on représente par dx la différence MQ des abscisses consécutives AP et AP', par dy la différence $M'Q$ des ordonnées correspondantes PM et $P'M'$, il viendra $PT = \frac{ydx}{dy}$.

Il semble d'abord que cette manière de trouver la soutangente ne soit, pour ainsi dire, qu'une approximation, car quelque petits qu'on suppose les côtés du polygone, ils ne se confondront jamais avec la courbe, et par conséquent la droite MT ne sera jamais tangente; mais on introduit dans le calcul une circonstance qui justifie la substitution du polygone à la courbe, c'est l'abstraction qu'on fait des puissances de dx et de dy supérieures à la première, et qu'on regarde comme infiniment petites à l'égard de celle-ci (80). En effet, si d'un côté les résultats analytiques obtenus ainsi, sont d'autant plus exacts que dx est plus petit, de l'autre, le polygone diffère d'autant moins de la courbe, que ses côtés sont plus multipliés, ou que l'espace PP' qui représente dx est moindre; et comme rien ne s'oppose à ce qu'on imagine ces côtés multipliés au-delà de tel terme qu'on voudra, il s'ensuit que la différence entre le résultat calculé dans le polygone et celui qui convient à la courbe, peut être rendue moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur. Présenté sous ce point-de-vue, le Calcul différentiel ne me paraît offrir aucune notion qu'un bon esprit ne puisse admettre, il s'applique alors avec la plus grande facilité à toutes les questions qui se rencontrent dans la théorie des courbes (*).

(*) C'est à tort que quelques personnes ont reproché à Leibnitz de n'avoir pas eu des idées exactes sur la métaphysique du Calcul différentiel; voici comment il s'exprime à l'occasion du travail d'un géomètre nommé Sturmius, sur la quadrature des courbes et la cubature des solides par le moyen des séries :

« Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenùs adhibitas omnes deduci posse » ex generali quodam meo dimetiendorum curvilineorum principio, *quòd figura curvilinea censenda sit æquipollere polygono infinitorum laterum;* undè sequitur, » quicquid de tali polygono demonstrari potest, sive ità, ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus, sive ità, ut tantò magis verificetur, quantò major sumitur laterum numerus, ità ut error tandem fiat quovis dato minor; id de curva » posse pronuntiari. » (*Acta eruditorum, ann.* 1684, *pag.* 585.)

Ce petit nombre de lignes présente, avec autant de vérité que de concision, l'idée qu'on doit se faire de la méthode des infiniment petits; et celle des limites, renouvelée par d'Alembert, y est assez clairement indiquée. Leibnitz a encore répété, dans plusieurs de ses lettres, qu'en se servant de la considération des infiniment petits pour abréger les raisonnemens, *on ne différait du style d'Archimède que dans les expressions.*

En continuant de représenter MQ par $\mathrm{d}x$, $M'Q$ par $\mathrm{d}y$, le côté MM' du polygone étant l'hypoténuse du triangle rectangle $M'MQ$, sera exprimé par $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$; et considérant la normale MR comme perpendiculaire à MM', les triangles MPR et $MM'Q$ seront semblables: connaissant donc tous les côtés de ce dernier, on pourra compléter la détermination de ceux des triangles MPT et MPR, dans lesquels on connaît MP, représenté par y: on obtiendra sur-le-champ

$$PT=\frac{\overline{PM}\times\overline{MQ}}{M'Q}=\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\quad MT=\frac{\overline{PM}\times\overline{MM'}}{M'Q}=\frac{y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}y},$$

$$PR=\frac{\overline{PM}\times\overline{M'Q}}{MQ}=\frac{y\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad MR=\frac{\overline{PM}\times\overline{MM'}}{MQ}=\frac{y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}x},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé, d'une manière bien différente, dans les n^{os} 205 — 213.

257. Dans la théorie de Leibnitz, on prend la corde MM' pour l'arc MOM', *fig.* 32, et l'on en conclut tout de suite que la différentielle FIG. 32.
de l'arc DM est $MM'=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$; mais on ne peut accorder cette supposition qu'en ayant égard à ce qui a été dit dans la note de la p. 432; car on ne peut prendre l'une pour l'autre deux quantités inégales, que lorsque leur différence est d'un ordre supérieur à celui dont elles sont (80): or cela n'est pas évident par soi-même, relativement à l'arc et à sa corde; mais on peut le conclure de la note citée. On a par cette note, $DQ=AD\sin DAQ$, *fig.* 31, et par conséquent FIG. 31.
$2AD-2DQ=2AD(1-\sin DAQ)$, d'où il suit que si l'on prend AD infiniment petit, l'angle DAQ différant infiniment peu d'un droit, la valeur de $2AD-2DQ$ sera exprimée par le produit de deux facteurs infiniment petits, et sera par conséquent du second ordre; et cette expression sera d'autant plus applicable à l'arc de la courbe proposée, que l'on multipliera davantage les côtés du polygone inscrit à cette courbe.

Quant à la différentielle de l'aire $ADMP$, *fig.* 32, elle s'obtient en éva- FIG. 32.
luant le rectangle $PMQP'$, formé sur l'ordonnée MP et sur la différentielle de l'abscisse, parce que le trapèze curviligne $PMM'P'$, accroissement total de cette aire, est compris entre les deux rectangles $PMQP'$ et $PRM'P'$, qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le rectangle $MRM'Q=\overline{MQ}\times\overline{M'Q}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, et par conséquent infiniment petit du second ordre. Il suit de là que $\mathrm{d}.ADMP=y\mathrm{d}x$, comme dans le n° 217.

258. Lorsque l'on considère plusieurs côtés consécutifs d'un polygone inscrit ou circonscrit à une courbe, il faut établir une loi qui lie entre eux les points qui terminent ces côtés; car on sent que pour la même courbe la succession de ces points peut se déterminer d'une infinité de manières. Ce qui se présente d'abord de plus simple, c'est de supposer

FIG. 57 et 58. équidistantes les ordonnées consécutives PM, $P'M'$, $P''M''$, etc., *fig.* 57 et 58, et de faire par conséquent $PP' = P'P''$, etc., ou de passer de l'abscisse AP à l'abscisse AP', de celle-ci à l'abscisse AP'', etc, par un accroissement dx constant. Cela posé, $M'Q$ étant la première valeur de dy, $M''Q'$ sera la valeur consécutive, et en prolongeant MM' jusqu'à la rencontre de $P''M''$, en N, il viendra

$$NM'' = M''Q' - NQ' = M''Q' - M'Q,$$

NM'' répondra à d^2y, que l'on suppose infiniment petit à l'égard de dy; et il faut bien remarquer que cette subordination est une conséquence nécessaire de ce que l'angle $M''M'M$, formé par les deux côtés consécutifs du polygone, peut être pris aussi peu différent de deux droits que l'on voudra, ou, en d'autres termes, parce que son supplément $NM'M''$ peut être regardé comme infiniment petit; d'où il résulte que les angles $NM'Q'$ et $M''M'Q'$ différant infiniment peu, il en est de même de leurs tangentes, du moins tant qu'aucun de ces angles ne devient droit; qu'ainsi la valeur de

$$NM'' = M''Q' - NQ' = M'Q' (\text{tang}\, M''M'Q' - \text{tang}\, NM'Q')$$

est le produit de deux facteurs infiniment petits, et par conséquent infiniment petit du second ordre.

Il est à propos de remarquer que la forme du calcul mène aussi à cette conséquence; car ayant représenté $\frac{dy}{dx}$ par p, on aura $M'Q = pdx$, et pour le point suivant, où p devient $p + dp$, on obtiendra $M''Q' = (p + dp)dx$, ce qui donnera $NM'' = dpdx$, où la supposition de dx et de dy infiniment petits rend nécessairement dp infiniment petit: donc NM'' ou d^2y est infiniment petit.

C'est faute de faire attention aux considérations précédentes, que l'on a peine à concevoir la subordination des différentielles, envisagées à la manière de Leibnitz; parce qu'on ne voit pas qu'elle est une conséquence nécessaire d'une première hypothèse, qu'on ne peut se dispenser d'accorder, celle de supposer infiniment petits les premiers accroissemens dx et dy : on ne prend alors que pour un échafaudage arbitraire ou de convention, toute cette série d'infiniment petits des divers ordres, et on est porté à la rejeter. Malgré cela, peu d'auteurs, parmi ceux qui en ont fait usage, ont cherché à développer l'enchaînement de rapports sur lesquels elle s'établit (*). Le théorème de Taylor les met bien en évidence; car en écrivant successivement $x+h$, $x+2h$, etc., à la place de x, on trouve

$$\begin{aligned}
PM &= y \\
P'M' &= y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \\
P''M'' &= y + \frac{dy}{dx}\frac{2h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{4h^2}{1.2} + \text{etc.} \\
P'M' - PM &= M'Q = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \\
P''M'' - P'M' &= M''Q' = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{3h^2}{1.2} + \text{etc.} \\
M''Q' - M'Q &= \pm M''N = \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{etc.};
\end{aligned}$$

et en bornant ces séries à leur premier terme, on voit que $M'Q$ étant de la forme ph, $M''N$ est de la forme qh^2. Supposant h infiniment petit, et écrivant dx à sa place, il suit de la remarque qui termine le nº 80, que $M'Q$ est du premier ordre, $M''N$ du deuxième, et ainsi de suite, lorsque l'on considère un plus grand nombre de points consécutifs.

Le double signe $\pm$, placé devant $M''N$, vient de ce que $M'Q$ surpasse $M''Q'$ dans la figure 58, tandis que le contraire a lieu dans la figure 57. Dans celle où la différence est négative, le polygone inscrit est concave vers l'axe des abscisses, et dans celle où la différence est positive, il est convexe; on reconnaît donc encore ici, par le signe de d^2y comparé à celui de y, comment la courbe tourne sa concavité par rapport à l'axe des abscisses.

Au lieu de prendre équidistantes les ordonnées des angles du polygone inscrit à la courbe proposée, on peut choisir toute autre loi; supposer, par exemple, que les côtés MM', $M'M''$, etc. sont toujours égaux : la diversité de leur inclinaison fait qu'ils ne répondent plus aux

(*) Dans le *Traité du Calcul différentiel* de Mlle Agnesi, cet enchaînement est appuyé sur des considérations géométriques assez satisfaisantes.

mêmes accroissemens d'abscisses et d'ordonnées; il n'est donc plus permis de supposer que dx soit constant, mais alors on a pour déterminer la relation de dy à dx, l'équation $d.\sqrt{dx^2+dy^2}=0$, due à ce que MM' est constant; et comme toutes les différentielles de MM' doivent également être nulles, on en déduit une suite d'équations qui lient entre elles, dans chaque ordre, les différentielles de dx et de dy: voilà en quelque sorte la construction géométrique de ce qui a été exposé dans le n° 64.

La considération des polygones, ramenant au calcul des figures rectilignes ce qui regarde les courbes, apporte une très-grande facilité et surtout une grande brièveté, dans la mise en équation des problèmes, et par cette raison mérite une attention spéciale; on en jugera par quelques questions que je traiterai en finissant ce chapitre, et plus encore par les théories qui seront exposées dans le suivant.

259. Lorsqu'on rapporte les courbes à des coordonnées polaires,
FIG. 59. la différentielle première du rayon vecteur AM, *fig.* 59, est la partie QM' retranchée du rayon vecteur suivant, par l'arc de cercle MQ décrit du point A comme centre, avec le rayon AM. On regarde ce petit arc comme une ligne droite, et le triangle MQM' comme rectiligne, ce qui donne $MM'=\sqrt{\overline{QM}^2+\overline{QM'}^2}$. Lorsqu'on mesure l'angle MAM' par un arc de cercle NN' décrit, d'un rayon AN égal à l'unité (248), on a $QM=udt$, et QM' étant du, il vient $MM'=\sqrt{du^2+u^2dt^2}$.

Pour parvenir à l'expression de la soutangente AT que nous avons trouvée dans le n° 250, on compare entre eux les triangles $MM'Q$ et MAT, qu'on regarde comme semblables, parce que l'angle MAM' étant infiniment petit à l'égard de MAT, $M'Q$ est censée parallèle à AM, et MQ perpendiculaire sur $M'Q$; il résulte de là $AT=\frac{AM\times MQ}{M'Q}=\frac{u^2dt}{du}$.

La différentielle de l'aire de la courbe est représentée ici par le secteur circulaire AMQ, qui ne diffère du secteur AMM', terminé à l'arc MM' de la courbe proposée, que par le triangle MQM', infiniment petit du second ordre; or $AMQ=\frac{1}{2}\overline{AM}\times\overline{MQ}=\frac{1}{2}u^2dt$, ce qui s'accorde avec le résultat obtenu dans le n° 252.

La différentielle seconde d^2u, étant la différence entre deux différentielles premières consécutives, sera représentée par $M''Q'-M'Q$; et il faudra observer que lorsqu'on suppose l'arc NN' constant ou qu'on fait varier l'angle t de la même quantité, les arcs QM, $Q'M'$, ne sont pour cela égaux entre eux; car ils sont tous de rayons différens.

260. En regardant les courbes osculatrices comme des polygones qui ont un certain nombre de côtés communs avec le polygone qui représente la courbe proposée, on remarquera sans peine que pour chacun de ces côtés, les différentielles doivent être les mêmes dans le polygone *touchant* et dans le polygone *touché*. Nommant donc y' l'ordonnée de la courbe osculatrice, et y celle de la courbe proposée, on aura pour la tangente, qui ne coïncide qu'avec un seul côté, $y'=y$ et $dy'=dy$. Dans les courbes osculatrices du second ordre, qui ont deux côtés communs avec la proposée, on aura en même temps $y'=y$, $dy'=dy$, $d^2y'=d^2y$, et ainsi de suite pour les ordres plus élevés. Ces résultats s'accordent bien évidemment avec ceux du n° 222, puisque dx est le même pour les deux courbes.

261. On peut encore déduire la théorie des cercles osculateurs d'une considération trop élégante et trop féconde pour la passer sous silence. Si on élève sur le milieu des côtés MM', $M'M''$, *fig.* 60, les perpendiculaires GF, $G'F'$, leur intersection F sera le centre du cercle qui passe par les trois points M, M', M''; on verra de même que le point F' sera celui du cercle qui passerait par les trois points M', M'' et M''', et ainsi des autres; mais plus les côtés du polygone seront multipliés, plus les lignes GF, $G'F'$... approcheront d'être normales à la courbe, et moins le cercle $MM'M''$ différera du cercle osculateur : on pourra donc regarder le centre de courbure comme l'intersection de deux normales infiniment voisines, et la développée $FF'F''$.... comme la courbe résultante de toutes ces intersections. Il est bien évident alors qu'elle doit être touchée par toutes les normales, et que les cercles osculateurs touchent et coupent en même temps la courbe proposée, ainsi qu'on l'a fait remarquer dans le n° 224. FIG. 60.

Pour exprimer analytiquement ces circonstances, on reprendra l'équation de la normale qui, en désignant toujours par x et par y les coordonnées du point pris sur la courbe proposée, pourra être mise sous la forme

$$(y'-y)dy+(x'-x)dx=0\ldots\ldots(1)\ (212),$$

et on observera que pour passer à la normale du point suivant, il faudrait substituer $x+dx$ à x et faire varier y en conséquence; mais qu'en affectant les coordonnées x' et y' au point d'intersection des deux normales, elles ne doivent point changer dans ce cas : on égalera donc à zéro la différentielle de l'équation (1), prise seulement par rapport à x et à y, et en faisant dx constant, il viendra

$$(y'-y)\,\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2=0\,\ldots\ldots(2).$$

En déterminant x' et y' par ces équations, on aura les mêmes valeurs que celles que les équations (2) et (3) du n° 221 ont données pour α et pour β; on calculera l'expression de GF par la formule $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$.

Il est bon de remarquer que les équations (1) et (2) s'obtiendraient aussi en égalant à zéro la différentielle première, et la différentielle seconde de l'expression $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$, prise en regardant x' et y' comme des constantes. En effet, le cercle osculateur passant par trois points infiniment proches, sur la courbe proposée, aura son centre à égale distance de chacun de ces points; or les coordonnées du premier étant x et y, il faudra différentier ces variables une fois pour passer au second, et deux fois pour arriver au troisième, sans que pour cela la distance ci-dessus éprouve de variation : il est donc évident que sa différentielle première et sa différentielle seconde doivent être nulles.

262. Le procédé par lequel nous sommes parvenus à l'équation de la développée, en la regardant comme formée par les intersections consécutives des normales, pourrait s'appliquer à la recherche de la courbe touchée par toutes les droites menées par les différens points de la courbe proposée, et faisant avec la tangente des angles donnés, puisqu'il serait facile de trouver l'équation de l'une quelconque de ces droites; et si l'on supposait constant l'angle qu'elles doivent faire avec les tangentes de la courbe proposée, le lieu de toutes leurs intersections consécutives serait la courbe considérée par Réaumur, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année* 1709, et que Fontenelle a nommée *développée imparfaite*. Au lieu de m'arrêter à ces différens cas, je vais tracer la solution du suivant, qui les comprend tous : *Trouver l'équation de la courbe qui en touche une infinité d'autres d'une nature donnée et assujéties à se succéder suivant une certaine loi.*

Pour rendre cette solution plus facile à saisir, je prendrai d'abord un exemple, et je me proposerai de déterminer l'équation de la courbe FIG. 61. EX, *fig.* 61, qui touche tous les cercles décrits sur les différens points de la courbe DZ, pris pour centre, et d'un rayon égal à a. Soient MGO et $M'GO'$ deux de ces cercles, ayant leurs centres aux points N et N'; il est évident que leur point d'intersection G sera d'autant moins éloigné de la courbe EX que les points N et N' seront plus voisins l'un de l'autre, et qu'en faisant coïncider ces points, ceux d'attouchement M et M' se confondront avec le point G : on peut donc regarder la courbe *touchante* EX comme formée par les intersections successives des cercles *touchés*.

Cela posé, l'équation du cercle MGO sera $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$, en désignant par α et β les coordonnées AQ et QN de la courbe DZ; mais, au moyen de l'équation de cette courbe que je représenterai par $\beta=\mathrm{f}(\alpha)$, on pourra chasser β de la précédente, qui deviendra alors

$$[x-\alpha]^2+[y-\mathrm{f}(\alpha)]^2=a^2 \ldots\ldots (1)$$

Tant qu'on ne considère qu'un cercle en particulier, la quantité α doit être regardée comme constante, et pour passer de ce cercle à celui qui le suit immédiatement, il faut donner à α une valeur infiniment peu différente de celle qu'il avait d'abord; mais pendant que α varie ainsi, les coordonnées x et y du point G, commun à-la-fois aux deux cercles, ne varieront pas; et c'est ce qu'on exprimera en égalant à zéro la différentielle de l'équation (1), prise par rapport à α seulement, d'où il résultera

$$[x-\alpha]+[y-\mathrm{f}(\alpha)]\,\mathrm{f}'(\alpha)=0 \ldots\ldots (2),$$

en représentant $\frac{\mathrm{df}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$ par $\mathrm{f}'(\alpha)$, et en supprimant le facteur commun $2\mathrm{d}\alpha$.

Maintenant, si on élimine α entre les équations (1) et (2), on obtiendra la relation que doivent avoir entre elles les variables x et y, quelle que soit la position du point N sur la courbe DZ; et cette relation sera par conséquent l'équation de la courbe EX, qui touche tous les cercles décrits suivant les conditions de la question.

Soit en général $V=0$ une équation entre x, y et une constante arbitraire α; en donnant à cette constante toutes les valeurs possibles, il en résultera une infinité de courbes qu'on pourra considérer comme se coupant deux à deux consécutivement, et dans l'ensemble de ces courbes l'ordonnée y variera de deux manières, savoir, en passant d'un point à un autre dans la même courbe, ou en passant d'une courbe à l'autre, sur la même abscisse. Dans le premier cas x

varie seul ; la différentielle de y est $\frac{dy}{dx}dx$, et elle est déterminée par l'équation

$$\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy = 0:$$

dans le second, c'est α qui varie; on a $\frac{dy}{d\alpha}d\alpha$ pour la différentielle de y, et elle est déterminée par l'équation

$$\frac{dV}{d\alpha}d\alpha + \frac{dV}{dy}dy = 0,$$

qui revient à

$$\frac{dV}{d\alpha} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{d\alpha} = 0;$$

mais lorsque l'on considère un point commun à deux courbes consécutives, y reste le même pour l'une et pour l'autre : on a donc $\frac{dy}{d\alpha} = 0$, ce qui réduit la dernière équation ci-dessus, à $\frac{dV}{d\alpha} = 0$. Telle est la relation qui doit exister entre α, x et y, au point commun à deux courbes consécutives ; en la combinant avec $V = 0$, il en résultera par l'élimination de α, l'équation de la courbe qui touche toutes celles qui peuvent être représentées par $V = 0$.

On aurait pu parvenir au même résultat, sans employer la considération des intersections successives des courbes touchées. En effet, chacun des points de la courbe touchante se trouve sur une des courbes touchées ; ensorte que les coordonnées de ce point sont nécessairement des fonctions de la quantité α dont la valeur particularise les courbes touchées : on pourra donc désigner par $x' = \varphi(a)$ et $y' = \psi(a)$ ces coordonnées ; et si les fonctions φ et ψ étaient connues, en les substituant au lieu de x et de y, dans l'équation $V = 0$ des courbes touchées, elle deviendrait identique. Dans cet etat sa différentielle, par rapport à α, serait nulle d'elle-même, circonstance qui s'écrit en changeant x et y en x' et y', pour les considérer comme des fonctions de α, et en posant

$$\frac{dV}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha} + \frac{dV}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha} + \frac{dV}{d\alpha} = 0;$$

mais, à cause du contact qui a lieu entre la courbe touchante et la courbe touchée, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$, et $\frac{dy}{dx}$ étant donné par l'équation

$\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy = 0$, il suit de là qu'on a pareillement

$\frac{dV}{dx'}dx' + \frac{dV}{dy'}dy' = 0$, d'où $\frac{dV}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha} + \frac{dV}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha} = 0$, cé qui réduit l'équation $\frac{dV}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha}+\frac{dV}{dy'}\frac{dy'}{dx}+\frac{dV}{d\alpha}=0$, à

$$\frac{dV}{d\alpha}=0:$$

cette dernière servira donc à déterminer la valeur de α pour les points particuliers que l'on veut considérer; et si on élimine cette quantité entre les deux équations

$$V=0, \quad \frac{dV}{d\alpha}=0,$$

on en déduira, par le changement de x et de y en x' et en y', la relation que ces coordonnées doivent avoir dans tous les points de la courbe touchante.

Si l'équation proposée $V=0$ était différentielle du premier ordre et renfermait une constante arbitraire, les courbes consécutives que l'on obtiendrait en faisant varier cette constante, ne se couperaient pas, mais se toucheraient; car en passant de l'une quelconque d'entre elles à celle qui la suit, le coefficient différentiel $\frac{dy'}{dx'}$ ne changerait pas, non plus que les coordonnées x' et y'. Dans ce cas, la courbe touchante, dont on obtiendra toujours l'équation en éliminant α entre $V=0$ et $\frac{dV}{d\alpha}=0$, aurait, avec chacune des courbes touchées, un contact du second ordre. On étendrait facilement ces considérations aux ordres plus élevés.

265. Le procédé par lequel on fait varier les constantes d'une équation, est un des grands moyens de l'Analyse, et il s'applique avec élégance aux questions géométriques, puisqu'il n'y a pas de courbe qu'on ne puisse regarder comme produite par les intersections successives d'une suite de lignes d'une même nature. Nous allons encore en donner un exemple, en déterminant les équations des *Roulettes*, c'est-à-dire, des courbes engendrées par le mouvement d'un point pris sur une courbe assujétie à rouler sur la circonférence d'une autre courbe.

Pour faciliter cette recherche, substituons aux courbes proposées deux polygones QMG et DZ, *fig.* 62. Il est d'abord évident qu'en FIG. 62. supposant que le point décrivant M, pris sur le polygone mobile, se soit trouvé appliqué au point D du polygone immobile, l'arc QM sera égal à l'arc DQ. On apperçoit ensuite facilement, que tandis que le côté Qq du polygone mobile tournera autour du point Q pour venir s'appliquer sur le côté QQ' du polygone immobile, le point M décrira un arc de cercle MM', dont le centre sera au point Q, et qui aura pour rayon la corde MQ. Quand le point q sera parvenu en Q', le polygone mobile tournera alors autour de ce dernier, jusqu'à ce que le côté $Q'q'$ consécutif à Qq, se soit appliqué sur le polygone immobile; et le point M, parvenu en M', décrira un nouvel arc de cercle $M'M''$, ayant pour rayon la corde $M'Q'$ égale à Mq, et pour centre Q'. Il suit de ces remarques, que la roulette sera formée par les intersections consécutives des cercles décrits sur chaque point de la courbe DZ, avec des rayons égaux aux cordes des arcs de la courbe mobile interceptés entre ces points et le point décrivant, et que par conséquent elle sera touchée par tous ces cercles. On déduit de là sur-le-champ le moyen de mener ses tangentes, car il est évident qu'elles doivent être perpendiculaires aux rayons des cercles dont on vient de parler, ou, ce qui est la même chose, à la ligne menée du point proposé sur la roulette, à celui où la courbe génératrice touche la base sur laquelle elle se meut, ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans le n° 245 pour la cycloïde.

En nommant α et β les coordonnées de la courbe immobile, et γ la corde MQ, l'équation du cercle MM', sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2 \ldots\ldots (1)$$

Il faut observer maintenant que d'après l'énoncé de la question, β et γ sont des fonctions connues de α. Cela est d'abord évident à l'égard de β, puisqu'il est donné en α par l'équation de la courbe immobile DZ; ensuite si on représente par s l'arc DQ, s sera une fonction de α; mais s exprime aussi l'arc MQ qui est égal à DQ, et la nature de la courbe mobile QMG, fournira toujours une relation entre cet arc et sa corde représentée par γ : on pourra donc concevoir que β et γ soient déterminés en α, au moyen des relations qu'on vient d'indiquer.

En différentiant donc l'équation (1) par rapport à α seulement pour passer au cercle $M'M''$ consécutif à MM', il viendra

$$-(x-\alpha)-(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}=\gamma\frac{d\gamma}{d\alpha} \ldots\ldots (2);$$

et éliminant α entre cette équation et la précédente, on aura l'équation de la roulette. Cependant, comme il arrivera le plus souvent que la relation entre l'arc MQ et sa corde sera transcendante, ainsi que celle qui doit exister entre l'arc DQ et les coordonnées de la courbe DZ, l'élimination de α sera impossible, et il sera plus commode de tirer des équations (1) et (2) les valeurs de x et de y en α, β et γ. En effectuant les calculs nécessaires, et mettant ds^2 à la place de $d\alpha^2 + d\beta^2$, on trouvera aisément

$$x = \alpha - \frac{\gamma d\gamma d\alpha + \gamma d\beta \sqrt{ds^2 - d\gamma^2}}{ds^2},$$

$$y = \beta - \frac{\gamma d\gamma d\beta - \gamma d\alpha \sqrt{ds^2 - d\gamma^2}}{ds^2}.$$

On facilitera l'application de ces formules, en exprimant, autant qu'il sera possible, les quantités α, β et γ par l'arc s, qui est commun à la courbe mobile et à la courbe immobile.

264. Si nous supposons que la courbe mobile soit un cercle; et que la courbe immobile soit l'axe même des abscisses, la roulette décrite alors, sera la cycloïde ordinaire (244). Dans ce cas, l'ordonnée β de la courbe immobile étant toujours nulle, on a $d\beta = 0$, AQ, *fig.* 53, FIG. 53. devient égale à α, ce qui donne $\alpha = s = MHQ$; et suivant les dénominations du n° cité, $s = at$, ensorte que la corde MQ, ou γ, sera exprimée par

$$\sqrt{2a.QN} = \sqrt{2a^2\left(1 - \cos\frac{s}{a}\right)},$$

d'où on tirera $d\gamma = \dfrac{a ds \sin\frac{s}{a}}{\sqrt{2a^2\left(1 - \cos\frac{s}{a}\right)}}$. Si on substitue ces valeurs dans celles de x et de y, que la supposition de $\beta = 0$, $d\beta = 0$, $\alpha = s$, $d\alpha = ds$, réduit à $x = s - \frac{\gamma d\gamma}{ds}$, $y = \frac{\gamma\sqrt{ds^2 - d\gamma^2}}{ds}$, on trouvera

$$x = s - a\sin\frac{s}{a}, \qquad y = a\left(1 - \cos\frac{s}{a}\right).$$

Nous avons supposé que le point décrivant était sur la circonférence du cercle générateur; mais quand il serait placé soit en dedans, soit en dehors de ce cercle, les formules ne deviendraient guère plus compliquées: il est visible qu'on aurait égard à cette circonstance, en substituant à la corde MQ la distance mQ, *fig.* 63, qui serait alors le rayon FIG. 63. du petit arc de cercle décrit par le même point m autour du point Q.

Si on nomme b la distance mO, à laquelle le point décrivant se trouve du centre du cercle générateur, et qu'on mène sur MO la perpendiculaire NQ, en continuant d'appeler s, l'arc MQ, on aura

$$NQ = a\sin\frac{s}{a},\quad NO = a\cos\frac{s}{a},\quad mQ = y = \sqrt{\left(b - a\cos\frac{s}{a}\right)^2 + \left(a\sin\frac{s}{a}\right)^2},$$

$$y\mathrm{d}y = b\mathrm{d}s\sin\frac{s}{a},\qquad y\sqrt{\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}y^2} = \left(a - b\cos\frac{s}{a}\right)\mathrm{d}s,$$

d'où il résultera $x = s - b\sin\frac{s}{a}$, $\quad y = a - b\cos\frac{s}{a}$.

Lorsque le point M est hors du cercle générateur, la courbe décrite passe au-dessous de la ligne AB, et on l'appelle *cycloïde accourcie*, parce que sa hauteur est plus considérable que celle de la cycloïde ordinaire : on la nommerait *cycloïde alongée*, si le point M était placé dans l'intérieur de ce cercle; et alors elle n'atteindrait pas la ligne AB.

Les roulettes offrent encore un genre de courbes, dont les géomètres se sont occupés spécialement; je veux parler des épicycloïdes, pour lesquelles la courbe mobile et la courbe immobile sont toutes deux des cercles. En désignant par c le rayon du cercle immobile, dont on suppose le centre sur la ligne des abscisses AB, ses coordonnées α et β seront exprimées par

$$c\left(1 - \cos\frac{s}{c}\right) \text{ et } c\sin\frac{s}{c}.$$

Substituant ces valeurs, ainsi que leurs différentielles, dans celles de x et de y; conservant, pour plus de généralité, les expressions de y et de $\mathrm{d}y$ données ci-dessus, relativement au cas où le point décrivant est placé hors la circonférence du cercle mobile, et chassant les produits des sinus et cosinus, au moyen des formules connues, qui donnent les valeurs de ces produits par le sinus et le cosinus de la somme et de la différence des arcs, on trouvera, après les réductions,

$$x = c - (c + a)\cos\frac{s}{c} + b\cos\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)s,$$

$$y = (c + a)\sin\frac{s}{c} - b\sin\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)s,$$

Toutes les fois que les rayons c et a seront entre eux comme nombre à nombre, on pourra exprimer, par des équations algébriques, les relations de sin $\frac{s}{a}$ et sin $\frac{s}{c}$, cos $\frac{s}{a}$ et cos $\frac{s}{c}$, et par leur moyen éliminer ces quantités des équations précédentes; le résultat en x et y étant algébrique, la roulette ne sera point transcendante.

Supposons encore que la courbe immobile restant quelconque, la courbe mobile soit une ligne droite, et qu'on prenne le point décrivant sur cette ligne même; la roulette deviendra alors la développante de la courbe immobile, et on aura $\gamma = s$, d'où il résultera

$$x = \alpha - \frac{sd\alpha}{ds}, \quad y = \beta - \frac{sd\beta}{ds}.$$

Éliminant α, β et s, à l'aide de ces équations et des relations entre α, β et s, déduites de l'équation de la courbe proposée, on parviendra à l'équation de la développante.

265. Ce qui précède donne la solution du problème inverse des développées: je vais montrer comment on obtiendrait les mêmes résultats, en se servant des équations

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2,$$
$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta)\,d^2y = 0 \quad (226).$$

Si les coordonnées de la développée sont des fonctions de celles de la développante, les secondes peuvent à leur tour être regardées comme des fonctions des premières. En différentiant sous ce point de vue les deux premières équations ci-dessus, on fera varier en même temps les quantités x, y, α, β et γ; mais les termes affectés de dx et de dy disparaîtront dans le premier résultat, en vertu de la seconde équation, et dans le second, en vertu de la troisième : on aura donc

$$-(x - \alpha)\,d\alpha - (y - \beta)\,d\beta = \gamma d\gamma,$$
$$d\alpha dx + d\beta dy = 0;$$

prenant la valeur de dy dans le dernier résultat, pour la substituer dans la seconde des équations précédentes, il viendra

$$(x - \alpha)\,d\beta - (y - \beta)\,d\alpha = 0.$$

Cette équation combinée avec $-(x-\alpha)\,d\alpha-(y-\beta)\,d\beta=\gamma d\gamma$, donnera les valeurs de x et de y en α, β, γ; mais il faudra de plus déterminer γ, qui n'entre pas dans l'équation de la développée, et pour cela, on substituera les valeurs de $x-\alpha$ et de $y-\beta$ dans l'équation $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$, qui donnera $d\gamma^2=d\alpha^2+d\beta^2$. Ces calculs étant effectués, on obtiendra, pour x et pour y, des expressions qui, lorsqu'on aura mis s à la place de γ, seront les mêmes que celles qui terminent l'article précédent.

Il est à propos de remarquer que l'on ne parvient point à la valeur de γ, mais seulement à sa différentielle. Cette circonstance s'explique, en observant qu'une même développée peut engendrer une infinité de développantes, puisqu'on peut prendre le point décrivant où l'on voudra sur la droite mobile, et faire en conséquence $\gamma=s+b$, ce qui donnera $d\gamma=ds$, et ne changera rien à la forme des valeurs de x et de y, dans lesquelles il faudra seulement remplacer γ par $s+b$.

On pourrait renverser aussi la question des roulettes, en se proposant de déterminer l'équation de la courbe immobile, lorsque celle de la roulette et de la courbe mobile sont données, ou bien de trouver celle de cette dernière, lorsqu'on connaît les deux autres. Je n'entrerai point dans ces détails : je me contenterai d'observer que la révolution d'une courbe sur une autre est, de même que le développement, un moyen de produire une courbe quelconque; car La Hire a prouvé synthétiquement, dans les Mémoires de l'Académie (année 1706), et on le verrait aussi par l'analyse précédente, qu'*une courbe quelconque étant donnée, on peut toujours en trouver une qui, roulant sur une autre courbe aussi donnée, engendre la première par un de ses points.*

CHAPITRE V.

Théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure.

La théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure que je présenterai dans ce chapitre, est presqu'entièrement due à M. Monge. Clairaut et surtout Euler étaient bien arrivés à quelques résultats importans sur cette matière; mais M. Monge, en retrouvant ces résultats de son côté, leur a donné une forme nouvelle, par l'élégance de l'analyse dont il a fait usage pour y parvenir, et il a considérablement ajouté à ce qui était connu avant lui. Lorsqu'en 1797 je fis paraître la première édition de ce Traité, il n'y avait point d'ouvrage élémentaire sur la théorie des surfaces courbes; je fus donc obligé d'en exposer les premiers principes; mais depuis, je les ai placés à la suite du *Traité élémentaire de Trigonométrie et d'application de l'Algèbre à la Géométrie*, que j'ai déjà cité plusieurs fois: je pourrais donc renvoyer à ce traité le lecteur à qui ces notions seraient tout-à-fait étrangères; cependant, afin d'offrir un ensemble plus complet, je les reproduirai ici, quant à la partie analytique: la partie géométrique se trouve dans mes *Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes* (ou *Complément des Élémens de Géométrie*).

266. La position d'un point quelconque M, *fig.* 64, de l'espace, est déterminée d'une manière commode, en concevant qu'il soit à l'intersection de trois plans $M'MM''$, $M'MM''$, $M''MM''$, parallèles à trois autres plans fixes CAD, BAD, BAC perpendiculaires entre eux, et passant par un point donné A; parce qu'alors il suffit de connaître les distances de chacun des trois premiers plans, à celui des trois autres auquel il est parallèle. Les six plans que je viens d'indiquer forment un parallélépipède rectangle; le point A, pris pour *origine des coordonnées*, est placé à l'angle trièdre formé par les trois plans fixes, et le point que l'on veut connaître occupe l'angle trièdre M FIG. 64. Du point, du plan et de la ligne droite.

diagonalement opposé, ensorte que les arêtes adjacentes à chacun de ces angles, comprises deux à deux dans un même plan, sont les coordonnées du point proposé; car

$$MM'' = AP, \quad MM'' = AQ, \quad MM' = AR:$$

ces coordonnées peuvent donc être prises sur les intersections mêmes des plans fixes ou *coordonnés*, intersections que l'on nomme *axes des coordonnées*.

Quand on fait

$$AP = x, \quad AQ = y, \quad AR = z,$$

la ligne AB est l'axe des x,
la ligne AC l'axe des y,
la ligne AD l'axe des z;

et les plans coordonnés se désignant par les coordonnées qu'ils contiennent,

BAC est le plan des xy,
BAD le plan des xz,
CAD le plan des yz.

Ces trois plans coordonnés, en les concevant dans toute leur étendue, forment huit angles trièdres comprenant des points semblablement situés, mais qui se distinguent suivant les signes affectés aux coordonnées : ensorte que si l'on convient de prendre

$+x$, $+y$, $+z$, dans l'angle $ABCD$,

on a

$+x$, $+y$, $-z$, dans l'angle $ABCd$,
$+x$, $-y$, $+z$, dans l'angle $ABDc$,
$-x$, $+y$, $+z$, dans l'angle $ACDb$,
$+x$, $-y$, $-z$, dans l'angle $ABcd$,
$-x$, $+y$, $-z$, dans l'angle $ACbd$,
$-x$, $-y$, $-z$, dans l'angle $Abcd$;

d'où il suit que dans les angles opposés par le sommet, toutes les coordonnées sont affectées des signes contraires.

267. Par la construction précédente, les triangles APM' et $AM'M$ sont rectangles, l'un en P, l'autre en M'; on a donc

$$AM' = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PM'}^2},\ AM = \sqrt{\overline{AM'}^2 + \overline{MM'}^2} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PM'}^2 + \overline{MM'}^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Cette expression de la distance entre un point quelconque et l'origine des coordonnées donne aisément celle de la distance de deux points quelconques; car si x', y', z' sont les coordonnées d'un second point, et que l'on suppose les plans coordonnés transportés parallèlement à eux-mêmes jusqu'au premier, après ce changement le second point aura pour coordonnées $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, et sa distance à la nouvelle origine sera

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

268. M. Fourrier a proposé, dans une des séances de l'École normale (Journal de cette École, volume des débats, p. 30 1re édit.), de définir le plan ainsi qu'il suit : *Une série de points dont chacun est en même temps à égale distance de deux points donnés;* et l'on voit évidemment que le plan, ainsi caractérisé, est celui qui est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les points donnés. Si cette définition n'a pas la simplicité nécessaire pour entrer dans les élémens de géométrie, elle a le mérite de conduire élégamment aux équations du plan et de la ligne droite considérées dans l'espace, en ne s'appuyant que sur le n° précédent. En effet, si l'on désigne par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \quad \text{et} \quad \alpha',\ \beta',\ \gamma',$$

les coordonnées des deux points donnés, et par x, y, z, celles d'un point quelconque du plan proposé, les distances de ce point aux deux autres seront exprimées respectivement par

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},\quad \sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2};$$

prenant les quarrés pour les égaler, il viendra, après les réductions,

$$-2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2\alpha' x - 2\beta' y - 2\gamma' z + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2,$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$2\{(\alpha'-\alpha)x+(\beta'-\beta)y+(\gamma'-\gamma)z\}=\alpha'^2-\alpha^2+\beta'^2-\beta^2+\gamma'^2-\gamma^2;$$

ou bien encore sous celle-ci :

$$Ax+By+Cz+D=0;$$

en faisant

$$2(\alpha'-\alpha)=A,\quad 2(\beta'-\beta)=B,\quad 2(\gamma'-\gamma)=C;$$
$$\alpha'^2-\alpha^2+\beta'^2-\beta^2+\gamma'^2-\gamma^2=-D.$$

On voit par là que l'équation d'un plan est la plus générale que l'on puisse poser entre trois inconnues au premier degré : elle renferme quatre constantes, mais il n'y en a que trois de nécessaires, puisque l'on peut toujours faire ensorte que l'un de ses termes n'ait d'autre coefficient que l'unité ; et si les expressions de ces constantes renferment six quantités indépendantes α, β, γ, α', β', γ', cela vient de ce que le même plan peut être rapporté à une infinité de points pris, deux à deux, sur le nombre infini de lignes parallèles auxquelles il est perpendiculaire.

269. En plaçant à l'origine des coordonnées l'un des points auxquels sont comparés ceux du plan proposé, et faisant en conséquence α', β', γ' égaux à zéro, la première équation trouvée pour le plan, se réduit à

$$2(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

qui ne dépend plus que des trois quantités α, β, γ : ce plan est alors perpendiculaire sur le milieu de la droite menée de l'origine au point dont les quantités ci-dessus sont les coordonnées.

Ces mêmes quantités sont liées aux angles que la droite dont il s'agit forme avec les axes des coordonnées ; car on voit par les triangles APM, AQM, ARM, rectangles en P, en Q et en R, que

$$\alpha=AP=AM\cos MAP,$$
$$\beta=AQ=AM\cos MAQ,$$
$$\gamma=AR=AM\cos MAR.$$

Nommant donc δ la distance $AM = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ (267), et faisant

$$MAP = a, \quad MAQ = b, \quad MAR = c,$$

d'où il résulte

$$\alpha = \delta \cos a, \quad \beta = \delta \cos b, \quad \gamma = \delta \cos c;$$

l'équation

$$2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

deviendra, en divisant par 2,

$$x \cos a + y \cos b + z \cos c = \frac{\delta}{2};$$

forme bien remarquable, puisque $\frac{\delta}{2}$ exprime ici la distance de l'origine au plan proposé, qui se trouve par conséquent déterminé par la position et la grandeur de la perpendiculaire qu'on abaisserait de l'origine des coordonnées (*).

Il paraît encore ici quatre quantités, mais elles ne sont pas indépendantes, car si l'on substitue les valeurs des coordonnées α, β, γ dans l'expression de δ, il vient

$$\delta^2(\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2) = \delta^2,$$

d'où

$$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1,$$

relation dont on a souvent occasion de faire usage.

(*) M. Lhuilier (de Genève) parvient aussi, mais par un autre chemin, à une équation semblable à la précédente, dans ses *Élémens d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique, etc.*, publiés en 1809; mais je dois dire que dès 1808 on avait, dans le cours de Mécanique de l'École Polytechnique, introduit les angles *a*, *b*, *c*.

Tout ce qu'on vient de lire sur le plan, peut être imité par rapport à la ligne droite, en la considérant comme celle dont un point quelconque est également éloigné de deux autres pris sur le plan qui la contient. Cette propriété fournit sur-le-champ l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2,$$

qui se réduit à

$$2\{(\alpha'-\alpha)x + (\beta'-\beta)y\} = \alpha'^2 - \alpha^2 + \beta'^2 - \beta^2,$$

et devient susceptible de transformations analogues aux précédentes.

270. Écrivons maintenant δ au lieu de $\frac{\delta}{a}$, et comparons l'équation

$$x\cos a+y\cos b+z\cos c=\delta,$$

avec l'équation générale du premier degré à trois inconnues

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Pour débarrasser celle-ci du coefficient superflu qu'elle contient, en laissant les variables engagées d'une manière symétrique, je lui donnerai la forme

$$\frac{A}{D}x+\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z+1=0;$$

et écrivant simplement A, B, C, au lieu de $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, il viendra l'équation

$$Ax+By+Cz+1=0;$$

qui, rapprochée de

$$-x\frac{\cos a}{\delta}-y\frac{\cos b}{\delta}-z\frac{\cos c}{\delta}+1=0,$$

donnera

$$A=-\frac{\cos a}{\delta},\quad B=-\frac{\cos b}{\delta},\quad C=-\frac{\cos c}{\delta}.$$

Quarrant les trois dernières équations, en observant que

$$\cos a^2+\cos b^2+\cos c^2=1 \ (269),$$

il viendra

$$A^2+B^2+C^2=\frac{1}{\delta^2},\quad \text{d'où}\quad \delta=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos a=\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos b=\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos c=\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

ce qui fera connaître la position et la grandeur de la droite qui détermine le plan proposé.

271. Il est commode quelquefois de déterminer un plan par ses intersections avec les plans coordonnés, lignes que M. Monge appelle les *traces* de ce plan. Pour le faire, il suffit d'observer que lorsque deux surfaces quelconques se coupent, elles ont des coordonnées com-

munes dans toute l'étendue de leurs intersections; et comme le caractère du plan des xz, par exemple, consiste en ce que $y=0$ dans tous ses points, si l'on établit cette hypothèse dans l'équation

$$Ax+By+Cz+1=0,$$

le résultat

$$Ax+Cz+1=0 \qquad (1)$$

appartiendra à la droite qui est la commune section du plan proposé et du plan des xz.

On trouvera de même, par la supposition de $x=0$, l'équation

$$By+Cz+1=0 \qquad (2),$$

pour l'intersection du plan proposé avec celui de yz; et enfin la supposition de $z=0$ donnera

$$Ax+By+1=0 \qquad (3),$$

pour l'équation de l'intersection du même plan avec le plan des xy.

La connaissance de deux de ces lignes suffit pour déterminer les quantités A, B, C; car si on met les équations (1) et (2) sous cette forme :

$$z=-\frac{A}{C}x-\frac{1}{C},$$

$$z=-\frac{B}{C}y-\frac{1}{C},$$

on verra que $-\frac{A}{C}$ et $-\frac{B}{C}$ désignent les tangentes trigonométriques des angles compris entre l'axe des x et la commune section contenue dans le plan des xz, et entre l'axe des y et la commune section contenue dans le plan des yz; enfin la quantité $-\frac{1}{C}$ étant ce que devient z quand x et y sont nuls, est la distance de l'origine des coordonnées au point où le plan proposé coupe l'axe des z.

Dans la figure 65, EG' et EG'' sont les communes sections du plan $G'EG''$ avec les plans coordonnés BAD, CAD, et la partie AE de l'axe des z est ce que devient, pour le plan proposé, la variable z, quand x et y sont nuls. FIG. 65.

Il est à propos d'observer que si, dans l'équation générale du plan, on dégageait la variable z de son coefficient, et que l'on mît cette équation sous la forme

$$z = Ax + By + D,$$

les lettres A et B désigneraient alors les tangentes des inclinaisons des droites EG' et EG'' par rapport aux axes AB et AC, et qu'on aurait $D = AE$.

272. L'expression de la distance de deux points quelconques donne immédiatement l'équation de la surface sphérique. En effet, puisque tous les points de cette surface sont également éloignés de son centre, si l'on nomme α, β, γ les coordonnées de ce centre, et r le rayon de la sphère proposée, on aura, par le n° 267,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2.$$

Telle est, entre des coordonnées rectangulaires, l'équation la plus générale de la surface sphérique.

Si le centre de cette surface était placé à l'origine, on aurait seulement

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

puisqu'alors

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

De la considération du plan et de la sphère, on passe aisément à celle de la ligne droite et du cercle.

273. Une ligne droite est donnée toutes les fois que l'on connaît deux plans qui la contiennent, parce qu'elle en est l'intersection; ainsi les coordonnées de ses points, doivent satisfaire en même temps aux équations de ces plans; et par conséquent le système de ces deux équations, considérées comme ayant leurs indéterminées communes, caractérise la droite dont il s'agit. Soient

$$Ax + By + Cz + 1 = 0 \qquad (1),$$
$$A'x + B'y + C'z + 1 = 0 \qquad (2)$$

les équations de deux plans donnés; en établissant que les variables de l'une sont les mêmes que celles de l'autre, on ne pourra prendre arbitrairement qu'une seule de ces variables, les deux autres, calculées en conséquence de la première, feront connaître la position des différens points de la droite proposée.

Les équations (1) et (2) ne sont pas les seules qui puissent représenter la droite proposée, car elle se trouve dans une infinité de plans différens; mais on choisit ordinairement, parmi toutes les équations qu'elle pourrait avoir, celles qui ne renferment que deux des coordonnées x, y et z. En éliminant alternativement chacune de ces coordonnées entre les équations (1) et (2), on obtiendra les équations

$$(AB'-A'B)y-(CA'-C'A)z+A-A'=0,$$
$$(BC'-B'C)z-(AB'-A'B)x+B-B'=0,$$
$$(CA'-C'A)x-(BC'-B'C)y+C-C'=0,$$

qui deviendront

$$C_1y-B_1z+A_2=0 \qquad (3),$$
$$A_1z-C_1x+B_2=0 \qquad (4),$$
$$B_1x-A_1y+C_2=0 \qquad (5),$$

si l'on fait, pour abréger,

$$AB'-A'B=C_1,\quad CA'-C'A=B_1,\quad BC'-B'C=A_1,$$
$$A-A'=A_2,\quad B-B'=B_2,\quad C-C'=C_2.$$

Deux quelconques des équations (3), (4) et (5) suffisent pour remplacer les équations (1) et (2), et comprennent implicitement la troisième; cela est évident par la théorie de l'élimination, et peut se vérifier en multipliant l'équation (3) par A_1, l'équation (4) par B_1, l'équation (5) par C_1, puis en ajoutant le produit: on trouve

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0,$$

résultat dont tous les termes se détruisent quand on y substitue les valeurs des lettres A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, et qui exprime la condition que doivent remplir ces quantités pour que les équations (3), (4) et (5), étant données *à priori*, puissent appartenir à la même ligne droite.

L'équation (3), qui renferme la relation que doivent avoir entre elles les coordonnées y et z, pour tous les points de la droite proposée, appartient à l'ensemble des points où les perpendiculaires abaissées de tous ceux de cette droite, sur le plan des yz, rencontrent ce plan; cet ensemble est évidemment l'intersection du plan des yz, par un plan qui lui est perpendiculaire, et qui passe par la droite proposée. On peut en dire autant de l'équation (4), par rapport au plan des xz, ensorte qu'en choisissant le système de ces deux équations, la droite proposée est considérée comme l'intersection de deux plans respectivement perpendiculaires à ceux des yz et des xz.

Ces plans, que j'ai nommés ailleurs *plans projetans* de la droite, à cause qu'ils rencontrent les plans coordonnés auxquels ils sont perpendiculaires, suivant les projections de cette droite, sont caractérisés par les équations (3) et (4), considérées chacune isolément.

En général, toute équation entre les deux variables comprises sur un même plan coordonné, doit être envisagée comme appartenant à la ligne tracée par tous les pieds d'une infinité de perpendiculaires élevées sur ce plan; et si cette ligne est droite, toutes ces perpendiculaires seront nécessairement dans un seul plan perpendiculaire au plan coordonné proposé. Il est à propos de remarquer aussi que lorsqu'on ne détermine qu'une seule des coordonnées, on indique par là un plan parallèle à celui auquel elle est perpendiculaire (266).

Cela posé, je reviens aux équations d'une droite : chacune de ces équations ne renferme que deux coefficiens nécessaires, car on peut mettre les équations (3) et (4), par exemple, sous la forme

$$y=\frac{B_1}{C_1}z-\frac{A_1}{C_1},\quad x=\frac{A_1}{C_1}z+\frac{B_1}{C_1},$$

et par conséquent les écrire ainsi :

$$y=nz+\nu,\quad x=mz+\mu.$$

274. L'équation générale du plan ne renfermant que trois constantes nécessaires, il suffit d'un pareil nombre de conditions pour la déterminer. Je ne m'occuperai ici que des conditions qui se présentent le plus fréquemment, et je traiterai en même temps les questions analogues relativement aux lignes droites.

Soit d'abord proposé de déterminer l'équation du plan qui passe par trois points, ayant pour coordonnées respectives les quantités

$$x',\ y',\ z',\qquad x'',\ y'',\ z'',\qquad x''',\ y''',\ z''';$$

si on met successivement x', x'', x''', au lieu de x, y', y'', y''', au lieu de y', z', z'', z''', au lieu de z, dans l'équation générale $Ax+By+Cz+1=0$, on formera les trois équations

$$\begin{aligned}
Ax' + By' + Cz' + 1 &= 0,\\
Ax'' + By'' + Cz'' + 1 &= 0,\\
Ax''' + By''' + Cz''' + 1 &= 0,
\end{aligned}$$

au moyen desquelles on déterminera les constantes A, B, C; et on trouvera

$$A = \frac{z'(y''-y''')-z''(y'-y''')+z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')},$$

$$B = \frac{x'(z''-z''')-x''(z'-z''')+x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')},$$

$$C = \frac{y'(x''-x''')-y''(x'-x''')+y'''(x'-x'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}.$$

Les numérateurs et les dénominateurs de ces expressions ont une signification géométrique très-curieuse, que M. Monge a fait connaître dans le 15e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

275. On peut donner aux calculs précédens une forme plus simple à quelques égards, en modifiant d'abord l'équation générale du plan, pour qu'il passe par l'un des points donnés, le premier, par exemple. Pour cela, on met seulement x', y', z', pour x, y, z, et il vient

$$Ax' + By' + Cz' + 1 = 0;$$

on retranche cette équation de

$$Ax + By + Cz + 1 = 0,$$

ce qui donne

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0,$$

équation qui ne contient plus que deux constantes nécessaires, puisqu'on peut toujours donner l'unité pour coefficient à l'un quelconque de ses termes.

Si maintenant on y substitue successivement x'', x''', pour x, y'', y''', pour y, z'', z''', pour z, on aura les équations

$$\begin{aligned}
A(x''-x') + B(y''-y') + C(z''-z') &= 0,\\
A(x'''-x') + B(y'''-y') + C(z'''-z') &= 0,
\end{aligned}$$

desquelles on tirera

$$\frac{A}{C} = -\frac{(z''-z')(y'''-y') - (z'''-z')(y''-y')}{(x''-x')(y'''-y') - (x'''-x')(y''-y')},$$

$$\frac{B}{C} = -\frac{(x''-x')(z'''-z') - (x'''-x')(z''-z')}{(x''-x')(y'''-y') - (x'''-x')(y''-y')};$$

l'équation du plan cherché, lorsqu'on en fera disparaître les dénominateurs, deviendra

$$\left.\begin{array}{l} \{(z''-z')(y'''-y') - (z'''-z')(y''-y')\}(x'-x) \\ + \{(x''-x')(z'''-z') - (x'''-x')(z''-z')\}(y'-y) \\ + \{(x'''-x')(y''-y') - (x''-x')(y'''-y')\}(z'-z) \end{array}\right\} = 0,$$

et tout ne dépendra plus que des différences des coordonnées correspondantes.

276. La condition de passer par une droite donnée ne suffit pas pour déterminer un plan; mais comme elle équivaut à celle de passer par deux points donnés, elle particularise deux des constantes de ce plan. En effet, si on représente par

$$x = mz + \mu, \qquad y = nz + \nu \qquad (1)$$

les équations de la droite donnée, et par

$$Ax + By + Cz + 1 = 0$$

celle du plan cherché, il faudra qu'en substituant dans cette dernière les valeurs de x et de y, tirées des deux premières, z demeure indéterminé, sans quoi le plan et la droite n'auraient qu'un seul point de commun. En faisant la substitution indiquée, il vient

$$(Am + Bn + C)z + A\mu + B\nu + 1 = 0;$$

et pour que cette équation soit vérifiée indépendamment de z, il faut qu'on ait séparément

$$Am + Bn + C = 0; \qquad A\mu + B\nu + 1 = 0 \qquad (a),$$

équations qui détermineront deux des trois constantes A, B, C.

Si l'on veut encore assujétir le même plan à passer par une seconde droite donnée, dont les équations soient représentées par

$$x = m'z + \mu', \qquad y = n'z + \nu' \qquad (2),$$

on aura semblablement

$$Am' + Bn' + C = 0; \qquad A\mu' + B\nu' + 1 = 0 \qquad \text{(b)};$$

mais les équations (a) et (b) étant au nombre de quatre, sont plus que suffisantes pour déterminer les constantes A, B, C : il s'ensuit donc, comme on le sait d'ailleurs, que deux droites prises d'une manière quelconque, ne peuvent se trouver dans un même plan; il faut, pour que cela arrive, qu'il y ait entre les constantes de leurs équations une relation qui s'obtient en éliminant les inconnues A, B et C, entre les équations (a) et (b). Si on retranche l'une de l'autre les équations qui se correspondent dans chacun de ces systèmes, on aura d'abord

$$A(m'-m) + B(n'-n) = 0, \qquad A(\mu'-\mu) + B(\nu'-\nu) = 0;$$

d'où, par l'élimination, soit de A, soit de B, on déduira sans peine

$$(m'-m)(\nu'-\nu) - (n'-n)(\mu'-\mu) = 0 \qquad \text{(c)}.$$

Quand les quantités données m, m', n, n', μ, μ', ν et ν' vérifieront cette condition, les quatre équations (a) et (b) pourront avoir lieu à-la-fois, et les droites proposées seront dans un même plan.

277. Il ne faut pas conclure de là que ces droites se couperont nécessairement. Quand cette dernière circonstance a lieu, les trois coordonnées du point de rencontre vérifient en même temps les quatre équations (1) et (2) du n° précédent; or en égalant les valeurs de x entre elles, et celles de y aussi entre elles, on trouve

$$\begin{aligned} mz + \mu &= m'z + \mu', \\ nz + \nu &= n'z + \nu'. \end{aligned}$$

Si l'on élimine z entre ces équations, on retombe bien sur l'équation (c); mais elles deviennent contradictoires lorsqu'on y suppose $m = m'$ et $n = n'$, puisqu'elles se réduisent alors à $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$, et cependant l'hypothèse établie satisfait à l'équation (c) : on voit par là que les deux droites proposées, quoique situées dans un même plan, ne peuvent pas se rencontrer; elles sont donc parallèles.

Ceci nous fait connaître en même temps la dépendance qui existe entre les équations de deux droites parallèles : elle consiste en ce que la coordonnée z a le même coefficient dans les équations des projections tracées sur le même plan coordonné. On sait d'ailleurs que m et n désignent les tangentes trigonométriques des angles que font avec l'axe des z, les droites que les équations (1) représentent sur les plans des xz et des yz, et qui sont les projections de la première droite donnée dans l'espace; la condition $m'=m$ et $n'=n$, indique donc que les projections de cette droite sont parallèles aux projections correspondantes de la seconde droite donnée, lorsqu'elle-même est parallèle à la première.

278. Si l'on voulait déterminer les équations de la droite qui passe par deux points ayant pour coordonnées respectives

$$x',\, y',\, z', \qquad x'',\, y'',\, z'',$$

on remplacerait d'abord x, y, z par x', y', z', dans les équations

$$x = mz + \mu, \qquad y = nz + \nu,$$

et il viendrait

$$x' = mz' + \mu, \qquad y' = nz' + \nu;$$

retranchant celle-ci des précédentes, on aurait

$$x - x' = m(z - z'), \qquad y - y' = n(z - z'),$$

équations communes à toutes les droites qui passent par le premier des points donnés. En mettant dans celles-ci x'', y'', z'', pour x, y, z, on obtiendrait

$$m = \frac{x''-x'}{z''-z'}, \qquad n = \frac{y''-y'}{z''-z'},$$

et les équations cherchées seraient

$$x - x' = \frac{x''-x'}{z''-z'}(z - z'), \qquad y - y' = \frac{y''-y'}{z''-z'}(z - z');$$

ou

$$(z''-z')(x-x')-(x''-x')(z-z')=0, \quad (z''-z')(y-y')-(y''-y')(z-z')=0.$$

On introduit aisément dans ces équations les angles que la droite proposée fait avec les axes des coordonnées; il suffit pour cela de concevoir, par le point dont les coordonnées sont x', y' et z', trois plans parallèles aux plans coordonnés primitifs, et de prendre ce point pour une nouvelle origine de coordonnées parallèles aux premières. Si l'on pose

$$x''-x'=\alpha, \quad y''-y'=\beta, \quad z''-z'=\gamma,$$

la distance de cette origine au point dont les coordonnées sont x'', y'', z'', étant exprimée par $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=\delta$, on aura, comme dans le n° 269,

$$\alpha=\delta\cos a, \quad \beta=\delta\cos b, \quad \gamma=\delta\cos c;$$

et substituant ces valeurs à la place de

$$x''-x', \quad y''-y', \quad z''-z',$$

les équations de la droite proposée seront changées en

$$(x-x')\cos c-(z-z')\cos a=0, \quad (y-y')\cos c-(z-z')\cos b=0;$$

dans lesquelles a, b, c désigneront les angles compris entre la droite proposée et les trois nouveaux axes des coordonnées, qui sont parallèles aux axes primitifs.

279. En mettant les équations précédentes sous la forme

$$x=z\frac{\cos a}{\cos c}+x'-z'\frac{\cos a}{\cos c}, \quad y=z\frac{\cos b}{\cos c}+y'-z'\frac{\cos b}{\cos c},$$

pour les comparer à

$$x=mz+\mu, \quad y=nz+\nu,$$

on aura

$$m=\frac{\cos a}{\cos c}, \quad n=\frac{\cos b}{\cos c};$$

d'où il suit que toutes les droites parallèles entre elles dans l'espace, feront les mêmes angles avec les axes des coordonnées (277). Ainsi pour mener par le point dont les coordonnées sont x'', y'', z'', une ligne parallèle à la droite donnée par les équations ci-dessus, il suffit d'écrire

$$x-x''=m(z-z''), \quad y-y''=n(z-z''),$$

ou bien

$$(x-x'')\cos c-(z-z'')\cos a=0, \quad (y-y'')\cos c-(z-z'')\cos b=0.$$

280. Ce qui vient d'être remarqué conduit sur-le-champ à la détermination respective des équations d'une droite et d'un plan perpendiculaires entre eux.

On a vu, dans le n° 270, que le plan mené à une distance δ de l'origine des coordonnées, et perpendiculairement à la droite qui fait avec les axes, des angles a, b, c, avait pour équation

$$-x\frac{\cos a}{\delta}-y\frac{\cos b}{\delta}-z\frac{\cos c}{\delta}+1=0;$$

celles d'une droite quelconque parallèle à la première, et par conséquent perpendiculaire au plan proposé, seront donc

$$x=z\frac{\cos a}{\cos c}+x'-z'\frac{\cos a}{\cos c},\qquad y=z\frac{\cos b}{\cos c}+y'-z'\frac{\cos b}{\cos c}.$$

En comparant ces formules aux équations générales

$$Ax+By+Cz+1=0,$$
$$x=mz+\mu,\qquad y=nz+\nu,$$

on trouvera

$$A=-\frac{\cos a}{\delta},\qquad B=-\frac{\cos b}{\delta},\qquad C=-\frac{\cos c}{\delta},$$

$$m=\frac{\cos a}{\cos c},\qquad n=\frac{\cos b}{\cos c},$$

d'où il résultera

$$m=\frac{A}{C},\qquad n=\frac{B}{C}:$$

ainsi l'équation du plan étant

$$Ax+By+Cz+1=0;$$

celles de la droite perpendiculaire à ce plan seront

$$x=\frac{Az}{C}+\mu,\qquad y=\frac{Bz}{C}+\nu.$$

La forme de ces dernières est encore plus remarquable quand on présente la première ainsi :

$$z=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{1}{C};$$

on voit alors que les coefficiens de z, dans les équations de la droite, sont ceux de x et de y dans l'équation du plan, mais pris avec un signe contraire.

Si l'on fait $y=0$ dans l'équation du plan, pour obtenir celle de sa commune section avec le plan des xz (271), il viendra, en dégageant x de son coefficient,

$$x=-\frac{C}{A}z-\frac{1}{C},$$

équation d'une droite qui rencontre à angles droits celle que représente l'équation

$$x=\frac{Az}{C}+\mu.$$

En faisant de même par rapport aux autres plans coordonnés, on trouvera que les projections de la droite et les communes sections du plan, sur les mêmes plans coordonnés, doivent être respectivement perpendiculaires.

281. Je ferai remarquer que l'emploi du Calcul différentiel conduit très-simplement aux relations précédentes. Il est évident que si x, y et z sont les coordonnées du point où la perpendiculaire rencontre le plan proposé, et x', y' et z', celles du point fixe par lequel on la mène, la distance de ces deux points, $u=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$, doit être un minimum. Dans le cas actuel, les quantités x', y' et z' sont constantes, et les variables x, y et z sont liées entre elles par l'équation du plan donné $Ax+By+Cz+1=0$; on pourrait donc, au moyen de cette équation, chasser de u une de ces variables; mais il sera plus simple de différentier l'expression de u, en regardant une de ces mêmes variables, z, par exemple, comme fonction des deux autres. La condition du minimum donnera (165)

$$x-x'+(z-z')\frac{dz}{dx}=0, \qquad y-y'+(z-z')\frac{dz}{dy}=0;$$

et en déterminant $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ par les équations différentielles du plan, qui sont

$$A+C\frac{dz}{dx}=0, \qquad B+C\frac{dz}{dy}=0,$$

on obtiendra

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'),\qquad y-y'=\frac{B}{C}(z-z');$$

ce qui s'accorde avec le n° précédent.

Si l'on substitue ces valeurs de $x-x'$ et de $y-y'$ dans l'expression de u, il viendra

$$u=\frac{z-z'}{C}\sqrt{A^2+B^2+C^2};$$

mais l'équation du plan pouvant être mise sous la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+Ax'+By'+Cz'+1=0;$$

on en chassera aussi $x-x'$ et $y-y'$, et il viendra

$$\frac{z-z'}{C}=-\frac{Ax'+By'+Cz'+1}{A^2+B^2+C^2},\qquad u=-\frac{Ax'+By'+Cz'+1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Telle est l'expression de la longueur de la perpendiculaire demandée.

282. Deux plans parallèles sont perpendiculaires à la même droite; or l'équation de l'un et celles de sa perpendiculaire étant

$$Ax+By+Cz+1=0,$$

$$(x-x')=\frac{A}{C}(z-z'),\qquad (y-y')=\frac{B}{C}(z-z'),$$

si on désigne l'équation de l'autre plan par

$$A'x+B'y+C'z+1=0;$$

il faudra, pour qu'il soit aussi perpendiculaire à la droite précédente, que

$$\frac{A'}{C'}=\frac{A}{C},\qquad \frac{B'}{C'}=\frac{B}{C}:$$

tirant de là les valeurs de A' et de B', l'équation de ce plan deviendra

$$\frac{C'}{C}(Ax+By+Cz)+1=0.$$

S'il doit passer par le point dont les coordonnées sont x', y' et z', on aura

$$\frac{C'}{C}(Ax'+By'+Cz')+1=0;$$

retranchant cette dernière équation de la précédente, le résultat sera divisible par $\frac{C'}{C}$, et il viendra

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Si l'on cherchait les équations des communes sections de ce dernier plan avec chacun des plans coordonnés, on reconnaîtrait que ces droites sont parallèles aux communes sections des mêmes plans coordonnés et du premier plan proposé, ce qui est d'ailleurs évident par les propriétés des plans parallèles.

283. La surface sphérique est de toutes les surfaces celle dont la définition est la plus simple, puisque tous ses points sont à égale distance du point qui en est le centre; mais son équation monte au second degré; car si on place le centre à l'origine des coordonnées, et que l'on nomme r le rayon, on aura, par le n° 267,

$$x^2+y^2+z^2=r^2;$$

et si le centre est au point dont les coordonnées sont α, β et γ, il viendra

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$$

L'intersection de la sphère par un plan étant toujours un cercle, cette courbe est déterminée de la manière la plus générale dans l'espace, par les équations

$$\left.\begin{array}{r}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2\\ Ax+By+Cz+1=0\end{array}\right\}.$$

284. Ce qui précède va nous conduire d'une manière très-simple à l'expression du cosinus de l'angle que deux droites font entre elles, et qui est d'un fréquent usage dans les recherches qui nous occupent. Soient

$$\left.\begin{array}{r}x-\alpha=m(z-\gamma)\\ y-\beta=n(z-\gamma)\end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{r}x-\alpha=m'(z-\gamma)\\ y-\beta=n'(z-\gamma)\end{array}\right\};$$

les quatre équations des projections de ces droites, qui se coupent au point dont les coordonnées sont α, β, γ; si on imagine qu'elles se meuvent parallèlement à elles-mêmes, jusqu'à ce que leur point d'intersection soit à l'origine, leur angle ne changera pas, et les équations ci-dessus se réduiront à

$$\left.\begin{array}{l} x = mz \\ y = nz \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = m'z \\ y = n'z \end{array}\right\}.$$

Concevons maintenant une sphère qui ait son centre à l'origine et dont le rayon soit représenté par r; la distance des points où sa surface coupera chacun des côtés de l'angle cherché, sera évidemment la corde de cet angle. On trouvera les coordonnées du point de rencontre de la première droite avec la surface de la sphère, en déterminant x, y et z par les équations de cette droite et par celle de la sphère,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (267):$$

on aura ainsi

$$x = \frac{mr}{\sqrt{1+m^2+n^2}}, \quad y = \frac{nr}{\sqrt{1+m^2+n^2}}, \quad z = \frac{r}{\sqrt{1+m^2+n^2}}.$$

Nommant x', y' et z' les coordonnées du point de rencontre de la seconde droite avec la surface de la sphère, on aura de même

$$x' = \frac{m'r}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}, \quad y' = \frac{n'r}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}, \quad z' = \frac{r}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}.$$

Substituant ces valeurs et les précédentes dans l'expression $(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$ du quarré de la distance des deux points cherchés, on trouvera, après les réductions,

$$r^2\left\{2 - \frac{2(1+mm'+nn')}{\sqrt{(1+m^2+n^2)(1+m'^2+n'^2)}}\right\};$$

mais on sait que le quarré de la corde d'un angle quelconque V, est égal au produit du sinus-verse par le diamètre; on aura donc

$$2(1-\cos V) = 2 - 2\cos V$$

pour la valeur de ce quarré; et comparant cette expression avec la précédente, après avoir fait $r = 1$, il viendra

$$\cos V = \frac{1+mm'+nn'}{\sqrt{(1+m^2+n^2)(1+m'^2+n'^2)}};$$

d'où il est facile de déduire

$$\sin V = \frac{\sqrt{(m'n - mn')^2 + (m' - m)^2 + (n' - n)^2}}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)(1 + m'^2 + n'^2)}}.$$

Lorsque les deux droites proposées sont perpendiculaires, $\cos V = 0$; et c'est ce qui a lieu quand $1 + mm' + nn' = 0$.

On peut introduire dans ces formules les angles que les droites proposées font avec les axes des coordonnées, puisque

$$m = \frac{\cos a}{\cos c}, \quad n = \frac{\cos b}{\cos c}, \quad m' = \frac{\cos a'}{\cos c'}, \quad n' = \frac{\cos b'}{\cos c'} \ (278);$$

et si l'on fait attention que

$$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1, \quad \cos a'^2 + \cos b'^2 + \cos c'^2 = 1,$$

on aura

$$\cos V = \cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c'.$$

285. Le cosinus de l'angle que deux plans donnés font entre eux, se déduit immédiatement de l'expression que l'on vient de trouver; car si l'on met les équations de ces plans sous la forme

$$-\frac{x \cos a}{\delta} - \frac{y \cos b}{\delta} - \frac{z \cos c}{\delta} + 1 = 0;$$
$$-\frac{x \cos a'}{\delta'} - \frac{y \cos b'}{\delta'} - \frac{z \cos c'}{\delta'} + 1 = 0;$$

en les rapportant aux perpendiculaires menées de l'origine, et que l'on observe que le plan qui contient ces droites doit être perpendiculaire à la commune section des plans proposés, on verra que l'angle compris entre ces mêmes droites est le supplément de celui qui mesure l'angle dièdre compris entre les plans: le cosinus du second sera donc $-\cos V$, ou

$$\cos V' = -(\cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c').$$

Pour appliquer cette expression aux équations générales

$$Ax + By + Cz + 1 = 0;$$
$$A'x + B'y + C'z + 1 = 0,$$

il faut les comparer aux équations posées ci-dessus, ce qui donne

$$\cos a = -A\delta, \quad \cos b = -B\delta, \quad \cos c = -C\delta,$$
$$\cos a' = -A'\delta', \quad \cos b' = -B'\delta', \quad \cos c' = -C'\delta',$$
$$\cos V' = -\delta\delta'(AA' + BB' + CC');$$

et comme

$$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1,$$

il vient

$$\delta^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1, \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

on a de même

$$\delta' = \frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

et enfin

$$\cos V' = -\frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}.$$

Si l'un des plans proposés, le second, par exemple, était parallèle à celui des xy, comme sur tout ce plan l'ordonnée z devrait être égale à la perpendiculaire δ', on aurait $A' = 0$, $B' = 0$, et $\cos V'$ se réduirait à

$$-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

expression qui est celle de $\cos c$ (270); et en effet l'angle c étant compris entre la droite perpendiculaire au premier plan, et l'axe des z qui est perpendiculaire au plan des xy, est égal à l'angle que ces plans font entre eux.

On trouvera ainsi, que le premier plan donné fait avec des plans parallèles à celui des xz et des yz, des angles qui sont respectivement b et a, et dont les cosinus sont en conséquence

$$-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Enfin, dans le cas où les deux plans proposés seraient perpendiculaires entre eux, on aurait $\cos V' = 0$, et par conséquent

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

286. Lorsque deux droites partant du même point, tombent, l'une

obliquement, et l'autre perpendiculairement sur un plan, l'angle qu'elles forment entre elles est le complément de celui que l'oblique fait avec le plan : le cosinus du premier de ces angles sera donc le sinus du second; et par conséquent, si l'on désigne le dernier par V'', on aura

$$\sin V'' = \cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c',$$

en représentant par

$$-x\frac{\cos a}{\delta} - y\frac{\cos b}{\delta} - z\frac{\cos c}{\delta} + 1 = 0;$$

$$(x - x')\cos c' = (z - z')\cos a', \quad (y - y')\cos c' = (z - z')\cos b',$$

les équations du plan et de la ligne oblique proposés.

Si l'on veut rapporter l'expression de $\sin V''$ aux équations

$$Ax + By + Cz + 1 = 0,$$
$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu,$$

on aura d'abord

$$\cos a = -A\delta, \quad \cos b = -B\delta, \quad \cos c = -C\delta, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

et combinant les équations

$$\frac{\cos a'}{\cos c'} = m, \quad \frac{\cos b'}{\cos c'} = n, \quad \text{avec} \quad \cos a'^2 + \cos b'^2 + \cos c'^2 = 1,$$

il viendra

$$\cos a' = \frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}}, \quad \cos b' = \frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}}, \quad \cos c' = \frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}},$$

d'où
$$\sin V'' = -\frac{Am + Bn + C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(1+m^2+n^2)}}.$$

287. Avec ces préliminaires il serait facile de résoudre toutes les questions que renferme la première partie du *Complément des Élémens de Géométrie;* mais l'étendue de la carrière que j'ai à parcourir ne me permettant pas d'entrer dans ces détails, je me bornerai à appliquer le calcul différentiel à la solution du problème où il s'agit de trouver la plus courte distance de deux droites qui, n'étant pas comprises dans un même plan, ne se rencontrent pas.

Soient x, y et z les coordonnées d'un point quelconque de la première droite donnée, et x', y' et z' celles d'un point pris comme on voudra sur la seconde; si dans l'expression

$$u = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

de la distance de ces points, on met pour x, y, x', y' leurs valeurs tirées des équations droites proposées, que je représenterai par

$$\left.\begin{array}{l} x = mz + \mu \\ y = nz + \nu \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x' = m'z' + \mu' \\ y' = n'z' + \nu' \end{array}\right\}(1),$$

cette expression deviendra une fonction des seules variables z et z': regardant donc x et y comme des fonctions de z, et x' et y' comme des fonctions de z', et égalant séparément à zéro les différentielles partielles de u, relatives à z et à z', on formera les équations

$$(x-x')\,\mathrm{d}x + (y-y')\,\mathrm{d}y + (z-z')\,\mathrm{d}z = 0,$$
$$(x-x')\,\mathrm{d}x' + (y-y')\,\mathrm{d}y' + (z-z')\,\mathrm{d}z' = 0;$$

mais les équations (1) donnant

$$\mathrm{d}x = m\mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}y = n\mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}x' = m'\mathrm{d}z', \quad \mathrm{d}y' = n'\mathrm{d}z',$$

on obtiendra les équations

$$\left.\begin{array}{l} (x-x')\,m + (y-y')\,n + (z-z') = 0 \\ (x-x')\,m' + (y-y')\,n' + (z-z') = 0 \end{array}\right\}(2);$$

où il n'y aura plus qu'à substituer les valeurs

$$x-x' = mz - m'z' + \mu - \mu', \quad y-y' = nz - n'z' + \nu - \nu',$$

déduites aussi des équations (1). Il viendra alors

$$\left.\begin{array}{l} (mz-m'z'+\mu-\mu')\,m + (nz-n'z'+\nu-\nu')\,n + z - z' = 0 \\ (mz-m'z'+\mu-\mu')\,m' + (nz-n'z'+\nu-\nu')\,n' + z - z' = 0 \end{array}\right\}(3),$$

équations à l'aide desquelles on déterminera les inconnues z et z'; et substituant les résultats dans u, on trouvera l'expression de la plus courte distance demandée; puis en calculant les valeurs correspondantes de x et de y, de x' et de y', on aura les coordonnées des points où les deux droites s'approchent le plus.

Les équations (2) méritent d'être remarquées, parce qu'elles expriment le principe géométrique de la solution du problème. En effet la première est celle d'un plan mené perpendiculairement à la première droite donnée (279), et passant par les points dont les coordonnées sont x, y, z sur la première droite, x', y' et z' sur la deuxième; la seconde équation est celle d'un plan passant par les mêmes points que le précédent, mais perpendiculaire sur la seconde droite donnée : ces deux plans se couperont donc suivant une ligne qui sera perpendiculaire en même temps aux deux droites données. Telle est la condition que doit remplir la plus courte distance de ces droites.

288. Après nous être occupé des lignes et des plans, passons aux aires planes, que l'on détermine aussi par leurs projections sur les plans coordonnés, au moyen d'un théorème analogue à celui du quarré de l'hypothénuse.

C'est un principe facile à découvrir, et démontré dans plusieurs ouvrages, que *l'aire d'une figure quelconque tracée sur un plan, est à celle de ses projections comme le rayon est au cosinus de l'angle compris entre ces plans*. Soient donc D cette aire, A, B et C celles de ses projections sur les plans des yz, des xz et des xy, avec lesquels le plan qui la contient fait des angles a, b, c; on aura

$$A = D\cos a,\quad B = D\cos b,\quad C = D\cos c.$$

Si l'on quarre ces équations et qu'on les ajoute, en observant que $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$ (285), il viendra

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2,$$

ce qui montre que le *quarré du nombre qui mesure l'aire d'une figure plane quelconque est égal à la somme des quarrés des nombres qui mesurent les aires de ses projections sur trois plans perpendiculaires entre eux.*

289. La considération des aires projetées mène à la recherche d'un maximum très-remarquable par son application au mouvement des corps célestes, et qui par cette raison doit trouver place ici. Il est visible que la projection d'une figure plane décroît à mesure que le plan qui contient cette figure fait un plus grand angle avec le plan sur lequel on

la projette, et que si cet angle est nul, la projection étant égale à la figure même, est la plus grande possible; mais lorsqu'il y a plusieurs figures dont les plans sont diversement inclinés par rapport à celui sur lequel on les projette, on ne voit plus de même quelle position il faut donner à ce dernier pour que la somme des aires de toutes les projections qu'il contient soit un maximum. L'analyse suivante y conduit assez simplement.

Si D', D'', D''', etc. désignent des aires dont les plans font avec les plans coordonnés des angles a', b', c', a'', b'', c'', a''', b''', c''', etc., et qu'on veuille les projeter toutes sur un plan faisant, avec les mêmes plans coordonnés, des angles a, b, c, il faudra multiplier respectivement les aires par les expressions

$$\cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c',$$
$$\cos a \cos a'' + \cos b \cos b'' + \cos c \cos c'',$$
$$\text{etc.}$$

qui sont les cosinus des angles compris entre le plan de projection et ceux qui contiennent ces mêmes aires (285). La somme des produits pouvant s'écrire ainsi,

$$\begin{aligned}&\cos a\,(D'\cos a' + D''\cos a'' + D'''\cos a''' + \text{etc.})\\ &+ \cos b\,(D'\cos b' + D''\cos b'' + D'''\cos b''' + \text{etc.})\\ &+ \cos c\,(D'\cos c' + D''\cos c'' + D'''\cos c''' + \text{etc.}),\end{aligned}$$

on voit qu'elle revient à

$$\cos a\,(A' + A'' + A''' + \text{etc.}) + \cos b\,(B' + B'' + B''' + \text{etc.}) + \cos c\,(C' + C'' + C''' + \text{etc.}),$$

en représentant par les lettres A, B, C, accentuées convenablement, ce que deviennent les aires proposées, lorsqu'elles sont projetées sur les plans coordonnés; et si pour abréger on fait

$$A' + A'' + A''' + \text{etc.} = A,\ B' + B'' + B''' + \text{etc.} = B,\ C' + C'' + C''' + \text{etc.} = C,$$

on aura seulement

$$A\cos a + B\cos b + C\cos c.$$

Désignant cette somme par s, on trouvera

$$ds = -A\,da \sin a - B\,db \sin b - C\,dc \sin c;$$

équation dans laquelle il faut regarder l'un des angles a, b, c comme fonction des deux autres, puisque $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$. Différentiant cette dernière, il viendra

$$-\mathrm{d}a \sin a \cos a - \mathrm{d}b \sin b \cos b - \mathrm{d}c \sin c \cos c = 0 :$$

éliminant par son moyen $\mathrm{d}c$ de l'expression de $\mathrm{d}s$, on trouvera pour les conditions du maximum,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}a} = A - C\frac{\cos a}{\cos c} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}b} = B - C\frac{\cos b}{\cos c} = 0,$$

d'où l'on conclura

$$A \cos c = C \cos a, \quad B \cos c = C \cos b.$$

Joignant à ces équations, l'équation identique $C \cos c = C \cos c$, les quarrant toutes trois et les ajoutant, il viendra

$$(A^2 + B^2 + C^2) \cos c^2 = C^2, \quad \text{d'où} \quad \cos c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

ensuite,

$$\cos b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ce plan, sur lequel la somme des projections des aires proposées est un maximum, est encore tel, que les mêmes aires projetées sur tout plan qui lui serait perpendiculaire, donnent un résultat égal à zéro; et cela se voit sans peine, car si on représente par $a_{\prime}$, $b_{\prime}$, $c_{\prime}$ les angles que ce dernier fait avec les plans coordonnés, on aura (285),

$$\cos a \cos a_{\prime} + \cos b \cos b_{\prime} + \cos c \cos c_{\prime} = 0 :$$

mettant au lieu de $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, leurs valeurs, cette équation deviendra

$$A \cos a_{\prime} + B \cos b_{\prime} + C \cos c_{\prime} = 0,$$

dont le premier membre, d'après ce qui précède, exprime, par rapport au nouveau plan, la somme des projections des aires proposées (*).

(*) Le plan dont on vient de lire la détermination a été remarqué pour la première fois par M. Laplace, dans le mouvement d'un système de points agissant les uns sur

De la transformation des coordonnées dans l'espace.

290. Les usages de la transformation des coordonnées sont encore plus nombreux, et surtout plus importans dans l'espace que sur un plan; je crois donc à propos de m'arrêter un peu sur cette matière, et je prendrai d'abord la marche que j'ai suivie dans la première édition de ce Traité, pour rapprocher les formules construites par M. Monge, de celles qui se trouvent dans la *Mécanique analytique* de M. Lagrange.

Si on ne voulait que changer l'origine de place, et qu'on supposât les nouveaux plans coordonnés parallèles aux premiers, il suffirait de faire

$$x = x' + \alpha,\quad y = y' + \beta,\quad z = z' + \gamma:$$

on a déjà vu dans les nos précédens quelques applications de ces changemens.

Je n'embrasserai point ici le cas où la direction des axes change d'une manière quelconque : je me bornerai à donner des formules pour passer d'un système de coordonnées perpendiculaires entre elles à un autre système de même nature, ayant même origine, mais placé d'ailleurs comme on voudra par rapport au premier; et pour exprimer la position respective des plans coordonnés primitifs, et de ceux qu'on leur substitue, je supposerai qu'on ait les équations des uns à l'égard des autres.

Soient donc t, u et v les nouvelles coordonnées ayant leur origine au même point que x, y et z,

$$A't + B'u + C'v = 0,\quad \text{l'équation du plan des } yz,$$
$$A''t + B''u + C''v = 0,\quad \text{celle du plan des } xz,$$
$$A'''t + B'''u + C'''v = 0,\quad \text{celle du plan des } xy.$$

Si on considère maintenant que pour un point quelconque les coordonnées x, y, z ne sont autre chose que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les plans désignés ci-dessus, on formera leur expression d'après celle du n° 281, et il viendra en conséquence

---

les autres. Ce plan, sur lequel sont projetées les aires tracées par les rayons vecteurs des points mobiles, jouit alors de la propriété de demeurer constamment parallèle à lui-même; on le nomme en conséquence *plan invariable*.

$$x = -\frac{A't + B'u + C'v}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$y = -\frac{A''t + B''u + C''v}{\sqrt{A''^2 + B''^2 + C''^2}},$$

$$z = -\frac{A'''t + B'''u + C'''v}{\sqrt{A'''^2 + B'''^2 + C'''^2}}.$$

Ces valeurs, suivant la remarque du n° 268, renfermeront trois constantes superflues, ensorte qu'on pourrait supposer égales à l'unité un pareil nombre des neuf quantités

$$A',\ B',\ C',\quad A'',\ B'',\ C'',\quad A''',\ B''',\ C''';$$

mais il sera plus symétrique de poser les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1 \\ A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1 \\ A'''^2 + B'''^2 + C'''^2 = 1 \end{array}\right\}\ (1);$$

et à cause que les plans coordonnés primitifs sont perpendiculaires entre eux, on aura encore (285),

$$\left.\begin{array}{l} A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0 \\ A'A''' + B'B''' + C'C''' = 0 \\ A''A''' + B''B''' + C''C''' = 0 \end{array}\right\}\ (2),$$

d'où l'on voit qu'il ne restera que trois constantes dont on puisse disposer pour déterminer, d'après des conditions particulières, la situation des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes. En faisant usage des équations (1), il vient

$$x = -A't - B'u - C'v,$$
$$y = -A''t - B''u - C''v,$$
$$z = -A'''t - B'''u - C'''v;$$

Ces formules comprennent celles qui sont citées au commencement de la page 599, car si on voulait ne changer que la position de deux axes seulement, il faudrait, pour qu'ils restassent perpendiculaires à un troisième, qu'ils ne sortissent pas du plan coordonné qui leur est commun, et alors la coordonnée perpendiculaire à ce plan serait la même dans les deux systèmes. Supposons qu'il s'agisse de transformer seulement les coordonnées x et y : dans ce cas, $v = z$, les variables x et y ne dépendent point de v, et par conséquent

$$A'' = 0, \quad B'' = 0, \quad C'' = -1, \quad C' = 0, \quad C = 0.$$

Les équations (1) et (2) ne donneront plus que

$$A'^2 + B'^2 = 1, \quad A''^2 + B''^2 = 1, \quad A'A'' + B'B'' = 0,$$

d'où l'on conclura sans peine

$$B'' = A', \quad B' = -A'',$$

et il viendra

$$x = -A't + A''u, \quad y = -A''t - A'u,$$

où $-A'$ tient la place de m, et $-A''$ celle de n dans les formules de la page citée.

291. M. Lagrange détermine les expressions des variables x, y, z par les variables t, u, v, en observant que la forme la plus générale des expressions des premières, ne peut être que

$$(c) \quad \begin{cases} x = m't + n'u + p'v, \\ y = m''t + n''u + p''v, \\ z = m'''t + n'''u + p'''v; \end{cases}$$

car, à une même valeur des quantités t, u et v, il ne doit répondre qu'une seule valeur des quantités x, y et z, et réciproquement. Cela posé, les deux systèmes des coordonnées étant rectangulaires, le quarré de la distance du point proposé à l'origine commune des coordonnées, sera exprimé par $x^2 + y^2 + z^2$ dans le premier système, et par $t^2 + u^2 + v^2$ dans le second ; et mettant pour x, y, z, les valeurs posées ci-dessus, on aura deux expressions qui devront être identiques, quels que soient t, u et v, savoir :

$$(m't + n'u + p'v)^2 + (m''t + n''u + p''v)^2 + (m'''t + n'''u + p'''v)^2,$$

et

$$t^2 + u^2 + v^2.$$

Développant la première, et comparant les termes homologues de l'une et de l'autre, on trouvera les six équations

$$\left.\begin{array}{l} m'^2 + m''^2 + m'''^2 = 1 \\ n'^2 + n''^2 + n'''^2 = 1 \\ p'^2 + p''^2 + p'''^2 = 1 \end{array}\right\}(3), \quad \left.\begin{array}{l} m'n' + m''n'' + m'''n''' = 0 \\ m'p' + m''p'' + m'''p''' = 0 \\ n'p' + n''p'' + n'''p''' = 0 \end{array}\right\}(4);$$

ce qui fait voir aussi que des neuf constantes qui entrent dans les expressions générales des coordonnées primitives x, y et z, il n'y en a que trois qui soient indépendantes.

La comparaison des valeurs posées pour x, y et z, avec celles que j'ai obtenues dans le n° précédent, donne

$$m' = \frac{-A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \quad n' = \frac{-B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \quad p' = \frac{-C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$
$$m'' = \frac{-A''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}, \quad n'' = \frac{-B''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}, \quad p'' = \frac{-C''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}},$$
$$m''' = \frac{-A'''}{\sqrt{A'''^2+B'''^2+C'''^2}}, \quad n''' = \frac{-B'''}{\sqrt{A'''^2+B'''^2+C'''^2}}, \quad p''' = \frac{-C'''}{\sqrt{A'''^2+B'''^2+C'''^2}};$$

d'où on voit que m', n', p', sont les cosinus des angles que le plan des yz fait avec chacun des nouveaux plans coordonnés (285); qu'il en est de même de m'', n'', p'' pour le plan des xz, et de m''', n''', p''' pour celui des xy.

Si on substitue les expressions précédentes de m', m'', etc. dans les six équations de condition trouvées entre ces quantités, on parviendra à de nouvelles relations entre A', B', etc., que l'on pourrait aussi déduire immédiatement de la combinaison des équations (1) et (2), mais d'une manière moins commode. Si l'on supprime d'abord les dénominateurs de m', n', etc. en vertu des équations (1), on aura

$$\begin{array}{lll} m' = -A', & n' = -B', & p' = -C', \\ m'' = -A'', & n'' = -B'', & p'' = -C'', \\ m''' = -A''', & n''' = -B''', & p''' = -C'''; \end{array}$$

d'où il résultera

$$\left.\begin{array}{l} A'^2 + A''^2 + A'''^2 = 1 \\ B'^2 + B''^2 + B'''^2 = 1 \\ C'^2 + C''^2 + C'''^2 = 1 \end{array}\right\}(5), \quad \left.\begin{array}{l} A'B' + A''B'' + A'''B''' = 0 \\ A'C' + A''C'' + A'''C''' = 0 \\ B'C' + B''C'' + B'''C''' = 0 \end{array}\right\}(6).$$

292. Des expressions de x, y, z, données au commencement de

l'article précédent, on peut tirer celles de t, u, v, de deux manières différentes; et en rapprochant les résultats, on parvient encore à de nouvelles relations entre les quantités m', n', etc. En effet, si on multiplie respectivement les valeurs de x, y, z, 1°. par m', m'', m'''; 2°. par n', n'', n'''; 3°. par p', p'', p''', et qu'on ajoute les trois premiers résultats ensemble, qu'on en fasse autant des trois suivans, puis des trois derniers, il viendra, en vertu des équations (3) et (4),

$$\begin{aligned} t &= m'x + m''y + m'''z, \\ u &= n'x + n''y + n'''z, \\ v &= p'x + p''y + p'''z. \end{aligned}$$

Si on substituait ces valeurs dans l'expression de $t^2+u^2+v^2$, et qu'on la comparât ensuite à $x^2+y^2+z^2$, on trouverait les six équations

$$\left.\begin{aligned} m'^2+n'^2+p'^2&=1 \\ m''^2+n''^2+p''^2&=1 \\ m'''^2+n'''^2+p'''^2&=1 \end{aligned}\right\}(7),\qquad \left.\begin{aligned} m'm''+n'n''+p'p''&=0 \\ m'm'''+n'n'''+p'p'''&=0 \\ m''m'''+n''n'''+p''p'''&=0 \end{aligned}\right\}(8),$$

dans lesquelles rentrent les équations (1) et (2) du n° 290.

En traitant les expressions des coordonnées x, y, et z comme des équations du premier degré par rapport aux inconnues t, u et v, et faisant, pour abréger,

$$m'n''p''' - m''n'p''' + m'''n'p'' - m'n'''p'' + m''n'''p' - m'''n''p' = l,$$

il viendra

$$t = \frac{(n''p'''-p''n''')x + (n'''p'-p'''n')y + (n'p''-p'n'')z}{l},$$

$$u = \frac{(m'''p''-p'''m'')x + (m'p'''-p'm''')y + (m''p'-p''m')z}{l},$$

$$v = \frac{(m''n'''-n''m''')x + (m'''n'-n'''m')y + (m'n''-n'm'')z}{l};$$

comparant les coefficiens des coordonnées x, y et z, dans ces valeurs et dans les précédentes, on formera les neuf équations que voici:

$$\begin{aligned} n''p'''-p''n'''&=lm', & n'''p'-p'''n'&=lm'', & n'p''-p'n''&=lm''', \\ m'''p''-p'''m''&=ln', & m'p'''-p'm'''&=ln'', & m''p'-p''m'&=ln''', \\ m''n'''-n''m'''&=lp', & m'''n'-n'''m'&=lp'', & m'n''-n'm''&=lp'''. \end{aligned}$$

Si on ajoute ensemble les quarrés des trois équations qui composent la première ligne, on trouvera

$$(n''p''' - p''n''')^2 + (n'''p' - p'''n')^2 + (n'p'' - p'n'')^2 = l^2(m'^2 + m''^2 + m'''^2).$$

Le premier membre peut être mis sous la forme

$$(n'^2 + n''^2 + n'''^2)\,(p'^2 + p''^2 + p'''^2) - (n'p' + n''p'' + n'''p''')^2,$$

et se réduit à l'unité, ainsi que le coefficient de l^2 dans le second membre, en vertu des équations (3) et (4) : on a donc $1 = l^2$. On pourrait conclure de là $l = \pm 1$; cependant il est facile de s'assurer que cette quantité doit être positive, car en faisant coïncider les nouvelles coordonnées avec les coordonnées primitives, c'est-à-dire en supposant $t = x$, $u = y$, $v = z$, on a $m' = 1$, $n'' = 1$, $p''' = 1$, les autres coefficiens constans deviennent nuls, et la quantité que représente l se réduit à $+1$.

295. La détermination des six coefficiens surabondans, au moyen des trois autres, ne présente d'autre difficulté que la longueur du calcul, qui peut être abrégé beaucoup par le secours des relations obtenues dans les n[os] précédens. On trouve dans la *Mécanique analytique* de M. Lagrange, un exemple de cette détermination; mais M. Monge en a présenté un autre, qui montre combien un heureux choix de données peut apporter de symétrie dans un calcul. Il a pris pour ces données le premier coefficient dans l'expression de x, le second dans celle de y, le troisième dans celle de z; et faisant

$$\begin{aligned}
1 + m' + n'' + p''' &= M,\\
1 + m' - n'' - p''' &= N,\\
1 - m' + n'' - p''' &= P,\\
1 - m' - n'' + p''' &= Q,
\end{aligned}$$

ce qui conduit à $M + N + P + Q = 4$, il a trouvé

$$\begin{aligned}
&2n' = \sqrt{NP} + \sqrt{MQ}, \quad 2m''' = \sqrt{NQ} + \sqrt{MP}, \quad 2p'' = \sqrt{PQ} + \sqrt{MN},\\
&2m'' = \sqrt{NP} - \sqrt{MQ}, \quad 2p' = \sqrt{NQ} - \sqrt{MP}, \quad 2n''' = \sqrt{PQ} - \sqrt{MN}.
\end{aligned}$$

Il n'a point indiqué comment il avait obtenu ces résultats; voici une manière d'y parvenir.

On a par les équations (5), page 531, et par les équations (7), page 532,

$$p'^2 = 1 - p''^2 - p'''^2,\quad p'^2 = 1 - m'^2 - n'^2,\quad p''^2 = 1 - m''^2 - n''^2:$$

les deux premières de celles-ci donnent

$$m'^2 + n'^2 = p''^2 + p'''^2;$$

et mettant pour p''^2 sa valeur, il vient

$$n'^2 + m''^2 = 1 - m'^2 - n''^2 + p'''^2 \quad (9).$$

Mais en faisant $l = 1$ dans les formules de la page 532, on trouve

$$m'n'' - n'm'' = p''',\quad \text{d'où}\quad 2n'm'' = 2m'n'' - 2p''':$$

ajoutant et retranchant successivement cette dernière équation à l'équation (9), on obtient

$$n'^2 + m''^2 + 2n'm'' = 1 - m'^2 - n''^2 + 2m'n'' - 2p''' + p'''^2,$$
$$n'^2 + m''^2 - 2n'm'' = 1 - m'^2 - n''^2 - 2m'n'' + 2p''' + p'''^2,$$

d'où l'on tire

$$n' + m'' = \sqrt{(1-p''')^2 - (m'-n'')^2} = \sqrt{(1+m'-n''-p''')(1-m'+n''-p''')},$$
$$n' - m'' = \sqrt{(1+p''')^2 - (m'+n'')^2} = \sqrt{(1+m'+n''+p''')(1-m'-n''+p''')}.$$

ce qui conduit aux expressions de n' et de m'', et suffit pour montrer comment on parviendrait à celles des autres quantités.

294. On introduit facilement les lignes trigonométriques dans les formules de la page 529; on voit que si l'on désigne par

a', b', c', les angles compris entre l'axe des x et ceux des t, des u et des v;
a'', b'', c'', les angles compris entre l'axe des y et les mêmes;
a''', b''', c''', les angles compris entre l'axe des z et les mêmes,

on aura

$$-A' = \cos a',\quad -B' = \cos b',\quad -C' = \cos c',$$
$$-A'' = \cos a'',\quad -B'' = \cos b'',\quad -C'' = \cos c'',$$
$$-A''' = \cos a''',\quad -B''' = \cos b''',\quad -C''' = \cos c''',$$

d'où

$$x = t\cos a' + u\cos b' + v\cos c',$$
$$y = t\cos a'' + u\cos b'' + v\cos c'',$$
$$z = t\cos a''' + u\cos b''' + v\cos c'''.$$

Les équations (1) auront lieu alors implicitement; et quant aux équations (2), qui deviendront

$$\cos a'\cos a'' + \cos b'\cos b'' + \cos c'\cos c'' = 0,$$
$$\cos a'\cos a''' + \cos b'\cos b''' + \cos c'\cos c''' = 0,$$
$$\cos a''\cos a''' + \cos b''\cos b''' + \cos c''\cos c''' = 0,$$

leur forme montre qu'elles expriment la perpendicularité des axes primitifs (285) (*).

(*) M. Carnot, qui a donné le premier les formules précédentes dans le *Mémoire sur les relations qui existent entre les distances de cinq points*, etc., faisant suite à sa *Géométrie de position*, emploie une notation très-expressive pour désigner l'angle compris entre deux axes : celui des x et celui des t, par exemple, est indiqué par $\widehat{x\,t}$, et de cette manière les expressions des anciennes coordonnées par les nouvelles, sont

$$x = t\cos\widehat{x\,t} + u\cos\widehat{x\,u} + v\cos\widehat{x\,v},$$
$$y = t\cos\widehat{y\,t} + u\cos\widehat{y\,u} + v\cos\widehat{y\,v},$$
$$z = t\cos\widehat{z\,t} + u\cos\widehat{z\,u} + v\cos\widehat{z\,v},$$

où la loi de formation est évidente, et fait pressentir la réciprocité des expressions des coordonnées t, u et v en x, y et z, indiquée dans le n° 292.

M. Carnot détermine d'abord les formules de la transformation des coordonnées pour le cas le plus général, et les déduit de ce que *dans tout polygone plan ou gauche, un côté quelconque est égal à la somme de tous les autres multipliés chacun par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier.* Ce principe, dont la vérité s'apperçoit aisément, en concevant des plans menés perpendiculairement au premier côté, par l'extrémité de tous les autres, et entre ces plans, des lignes parallèles à ce même côté, donne sur-le-champ, lorsque les angles des axes sont droits dans les deux systèmes de coordonnées, *fig.* 66, FIG. 66.

$$AP = Ap\cos p\widehat{A\,A}P + pm\cos pm\widehat{\ A}P + mM\cos m\widehat{M\,A}P,$$

à cause que les côtés MM' et PM' de l'hexagone gauche $APM'MmpA$, font avec AP des angles droits, dont le cosinus est nul. Cette formule n'est autre chose que l'expression de x rapportée ci-dessus; celles de y et de z se trouveraient de même. Pour plus de détail, il faut consulter le Mémoire très-curieux de M. Carnot, et la seconde édition du *Recueil de diverses propositions de Geométrie*, etc., par M. Puissant, où l'on trouvera beaucoup de problèmes relatifs à l'application de l'analyse à la Géométrie dans l'espace.

Dans cette manière de présenter la transformation des coordonnées, les données qu'a choisies M. Monge, sont les angles compris entre l'axe des x et celui des t, entre l'axe des y et celui des u, et enfin entre l'axe des z et celui des v. On voit alors comment la symétrie de ces données a dû produire l'élégance des expressions ; car si on conçoit trois cônes droits ayant pour axes respectifs celui des x, celui des y, celui des z, et pour angles générateurs les angles donnés, placer les nouveaux axes des coordonnées par rapport aux axes primitifs, ce sera déterminer la position des côtés d'un angle trièdre droit, par la condition qu'ils touchent les trois cônes dont je viens de parler.

Cette détermination est curieuse en elle-même, mais ce n'est pas celle qui s'offre immédiatement dans les applications que l'on fait de la transformation des coordonnées. Euler, qui le premier, dans son *Introductio in analysin infinitorum* (IIe vol., page 365), s'est occupé de ce sujet, prend pour données la position de l'un des nouveaux plans coordonnés par rapport à l'un des plans coordonnés primitifs, et la position de l'un des axes situés dans ce nouveau plan. Soient en conséquence

FIG. 67. Ax, Ay, Az, *fig.* 67, les axes des x, des y, des z; At, Au, Av, ceux des t, des u, des v, et AE la droite suivant laquelle le plan des tu, représenté par Atu, rencontre celui des xy, représenté par Axy: les données indiquées ci-dessus seront alors

θ l'angle dièdre $tAEx$, celui que forment les plans des tu et des xy;
φ l'angle EAt, compris entre l'axe des t et la droite AE;
ψ l'angle EAx, compris entre l'axe des x et la droite AE.

Avant de montrer la manière élégante et simple dont Euler construit les formules générales de la transformation des coordonnées avec ces données, je crois à propos de m'en servir pour déterminer les angles a', b', c', a'', etc. dans les formules du n° précédent. On y parvient aisément par la trigonométrie sphérique, au moyen des formules désignées par (B), dans le chap. II de mon *Traité élémentaire de Trigonométrie et d'application de l'Algèbre à la Géométrie;* mais pour ne rien supposer d'étranger à ce qui précède, je suivrai une autre marche.

Premièrement, l'angle formé par le plan des tu et celui des xy, étant le même que l'angle compris entre les axes des v et des z qui leur sont perpendiculaires, on a

$$\cos c'' = \cos\theta \quad (1).$$

Secondement, comme sur le plan des xy on a $z = 0$, son équation, par rapport aux coordonnées t, u et v, sera

$$t\cos a'' + u\cos b'' + v\cos c'' = 0,$$

et celle de la droite AE, sur laquelle on a $v=0$, sera par conséquent

$$t\cos a'' + u\cos b'' = 0;$$

mais cette droite fait au-dessous de l'axe des t, par rapport à celui des u, l'angle $-\varphi$: on aura donc

$$-\frac{\cos a''}{\cos b''} = -\operatorname{tang}\varphi \qquad \text{(II)}.$$

Troisièmement, l'axe des x faisant avec ceux des t, des u et des v, les angles a', b', c', tandis que la ligne AE fait avec les mêmes axes des angles $-\varphi$, $1^q+\varphi$, 1^q, si l'on substitue ces derniers angles au lieu de a, b, c, dans l'expression

$$\cos V = \cos a\cos a' + \cos b\cos b' + \cos c\cos c' \ (285),$$

elle donnera le cosinus de l'angle EAx; l'on aura par conséquent

$$\cos\varphi\cos a' - \sin\varphi\cos b' = \cos\psi \qquad \text{(III)},$$

et pour achever la détermination des angles a', b', c', a'', etc., il ne s'agira plus que de combiner les équations (I), (II) et (III) avec les six équations (1) et (2) du n° 290, traduites en lignes trigonométriques (294).

Les calculs deviennent plus uniformes lorsqu'on emploie l'expression immédiate de l'angle que la droite AE fait avec l'axe des y, et qui est $1^q-\psi$. Cet axe faisant avec ceux des t, des u et des v, les angles a'', b'', c'', on aura l'équation

$$\cos a\cos a'' + \cos b\cos b'' + \cos c\cos c'' = \sin\psi;$$

et mettant pour les angles a, b, c leur valeur, il viendra

$$\cos\varphi\cos a'' - \sin\varphi\cos b'' = \sin\psi \qquad \text{(IV)}.$$

Les équations (I) et (II) changent l'équation

$$\cos a''^2 + \cos b''^2 + \cos c''^2 = 1;$$

en $\cos b''^2(1+\operatorname{tang}\varphi^2) + \cos\theta^2 = 1$, d'où $\cos b'' = \pm\sin\theta\cos\varphi$:

choisissant celle de ces deux valeurs dont le signe s'accorde avec la figure, on en conclut la valeur de $\cos a''$; et l'on a

$$\cos c'' = \cos\theta.$$
$$\cos b'' = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$\cos a'' = \sin\theta\sin\varphi,$$

Par ces valeurs l'équation

$$\cos a'\cos a'' + \cos b'\cos b'' + \cos c'\cos c'' = 0,$$

devient

$$\sin\theta\sin\varphi\cos a' + \sin\theta\cos\varphi\cos b' + \cos\theta\cos c' = 0,$$

ou $$\sin\varphi\cos a' + \cos\varphi\cos b' = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos c';$$

et combinant cette dernière avec l'équation (III), pour en éliminer successivement $\cos b'$ et $\cos a'$, on trouvera

$$\cos a' = \quad \cos\psi\cos\varphi - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\cos c',$$
$$\cos b' = -\cos\psi\sin\varphi - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\cos c';$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$\cos a'^2 + \cos b'^2 + \cos c'^2 = 1,$$

celle-ci devient, après les réductions,

$$\cos\psi^2 + \frac{\cos\theta^2}{\sin\theta^2}\cos c'^2 + \cos c'^2 = 1,\ \text{d'où}\ \cos c' = \pm\sin\theta\sin\psi:$$

de là on déduit les valeurs de $\cos a'$ et de $\cos b'$; et l'on a

$$\cos c' = \quad \sin\theta\sin\psi,$$
$$\cos b' = -\cos\psi\sin\varphi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi,$$
$$\cos a' = \quad \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi.$$

Pour déterminer $\cos a''$, $\cos b''$, $\cos c''$, il faudra combiner l'équation (IV) avec les équations

$$\cos a''\cos a''' + \cos b''\cos b''' + \cos c''\cos c''' = 0,$$
$$\cos a''^2 + \cos b''^2 + \cos c''^2 = 1,$$

système qui ne diffère de celui que j'ai employé ci-dessus, qu'en ce que a'', b'', c'' ont pris la place de a', b', c', et $\sin\psi$ celle de $\cos\psi$: on aura donc, sans calcul,

$$\cos a'' = \sin\psi\cos\varphi - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\cos c'',$$

$$\cos b'' = -\sin\psi\sin\varphi - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\cos c'',$$

$\sin\psi^2 + \frac{\cos\theta^2}{\sin\theta^2}\cos c''^2 + \cos c''^2 = 1$, d'où $\cos c'' = \pm\sin\theta\cos\psi$; et de là on déduira

$$\begin{aligned}\cos c'' &= -\sin\theta\cos\psi,\\ \cos b'' &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\sin\psi\cos\varphi,\\ \cos a'' &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi \quad (*).\end{aligned}$$

En rassemblant les neuf valeurs obtenues dans cet article, on aura

$$\left.\begin{aligned}x = t\,&(\cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi)\\ -u\,&(\cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\sin\psi\cos\varphi)\\ +v\,&\sin\theta\sin\psi\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}y = t\,&(\sin\psi\cos\varphi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi)\\ -u\,&(\sin\psi\sin\varphi - \cos\theta\cos\psi\cos\varphi)\\ -v\,&\sin\theta\cos\psi\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}z = t\,&\sin\theta\sin\varphi\\ +u\,&\sin\theta\cos\varphi\\ +v\,&\cos\theta\end{aligned}\right\}.$$

Le procédé par lequel on déduit, dans le n° 292, les expressions des coordonnées t, u et v, de celles des coordonnées x, y et z, s'appliquerait aux formules ci-dessus; et on peut d'ailleurs écrire sur-le-champ les résultats, en substituant, au lieu de m', n', p', m'', etc., les valeurs trouvées pour $\cos a'$, $\cos b'$, $\cos c'$, $\cos a''$, etc.

(*) Il n'est peut être pas inutile d'observer qu'on parvient tout de suite à ces expressions, en traduisant dans les dénominations actuelles, quelques-unes des relations rapportées sur la page 532; savoir :

$$\left.\begin{aligned}n'''p' - p'''n' &= lm''\\ m'p''' - p'm''' &= ln''\\ m'''n' - n'''m' &= lp''\end{aligned}\right\} \begin{gathered}\text{qui}\\ \text{reviennent}\\ \text{à}\end{gathered} \left\{\begin{aligned}\cos b'''\cos c' - \cos c'''\cos b' &= \cos a'',\\ \cos a'\cos c''' - \cos c'\cos a''' &= \cos b'',\\ \cos a'''\cos b' - \cos b'''\cos a' &= \cos c'',\end{aligned}\right.$$

puisque $l = 1$: il n'y a plus qu'à substituer les valeurs déjà trouvées, et faire quelques réductions faciles à appercevoir.

295. C'est par trois transformations successives qu'Euler parvient aux formules de l'article précédent. Il prend d'abord sur le plan des xy deux
FIG. 68 nouveaux axes; savoir la ligne AE, *fig.* 68, intersection du plan des tu, avec celui des xy, et la droite AF, projection de l'axe Av sur le plan des xy, laquelle est perpendiculaire sur AE. En nommant t'' et u'' les coordonnées parallèles à ces nouveaux axes, et déterminant les angles compris entre leurs parties positives et celles des axes primitifs, on aura

$$EAx = \psi,\quad FAx = 1^q - \psi,\quad EAy = 1^q - \psi,\quad FAy = 2^q - \psi;$$

d'où (182) $\quad x = t'' \cos EAx + u'' \cos FAx = t'' \cos\psi + u'' \sin\psi,$

$$y = t'' \cos EAy + u'' \cos FAy = t'' \sin\psi - u'' \cos\psi.$$

Par cette transformation, les points de l'espace sont rapportés aux deux nouvelles coordonnées t'', u'', qui sont encore dans le plan des xy, et à la coordonnée primitive z; cette dernière est comprise dans le plan FAv perpendiculaire à la droite AE, et ce plan rencontre le plan Atu, suivant une droite AG perpendiculaire en même temps aux droites AE et Av : Euler en conséquence substitue les lignes AG et Av aux axes AF et Az, et transforme ainsi les coordonnées u'' et z en deux autres, u' et v, qui sont encore perpendiculaires entre elles. Ici,

$$vAz = \theta,\quad vAF = 1^q - \theta,\quad GAz = 1^q - \theta,\quad GAF = 2^q - \theta,$$

$$u'' = u' \cos GAF + v \cos vAF = -u' \cos\theta + v \sin\theta,$$
$$z = u' \cos GAz + v \cos vAz = \quad u' \sin\theta + v \cos\theta.$$

Voilà maintenant les points de l'espace rapportés aux trois coordonnées t'', u' et v; les deux premières, parallèles aux axes AE et AG, étant dans le plan Atu, peuvent se transformer en t et en u qui sont dans le même plan; et l'on a

$$tAE = \varphi,\quad uAE = 1^q + \varphi,\quad tAG = 1^q - \varphi,\quad uAG = \varphi,$$

$$t'' = t \cos tAE + u \cos uAE = t \cos\varphi - u \sin\varphi,$$
$$u' = t \cos tAG + u \cos uAG = t \sin\varphi + u \cos\varphi.$$

Il ne s'agit plus que de substituer la valeur de u' dans celles de z et de u'', puis cette dernière et celle de t'' dans celles de x et de y, pour avoir les expressions des coordonnées primitives x, y et z, au moyen des nouvelles coordonnées t, u et v. Cette manière, si simple, d'obtenir les formules de la page 539, a été suivie par M. Lagrange, dans sa *Mécanique analytique*, et ensuite par M. Laplace, dans *la Mécanique céleste.*

296. Ces formules ne renferment que trois quantités constantes; il faudrait, ainsi qu'on l'a vu, n° 290, en ajouter trois autres, pour changer l'origine des coordonnées en même temps que la direction des axes; ainsi il y aurait en tout six quantités à déterminer, pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre de la même nature. On voit par là que l'équation d'une surface, considérée de la manière la plus générale, ne peut renfermer au plus que six constantes qui soient liées à sa position par rapport aux axes des coordonnées; et comme les expressions des variables x, y, z, ne contiennent t, u et v qu'au premier degré, cette transformation ne changera pas le degré de l'équation proposée.

Il suit encore de là, que la ligne qui est l'intersection d'une surface courbe quelconque par un plan, ne peut avoir une équation d'un degré plus élevé que celui de l'équation de cette surface; car en transformant les coordonnées de manière que le plan coupant soit celui des tu, par exemple, comme $v=0$ dans tous les points de ce plan, il suffira de faire aussi $v=0$, dans l'équation transformée de la surface courbe, pour obtenir celle de leur commune section, qui ne pourra par conséquent s'élever au-delà du degré de l'équation de cette surface.

Cette transformation s'exécutera très-simplement, en commençant par transporter l'origine des coordonnées au point où le plan coupant rencontre l'axe des x, ce qui se réduit à augmenter ou diminuer cette variable d'une quantité constante; et si aucune condition particulière ne détermine le choix de nouveaux axes, on prendra la ligne AE pour axe des t, afin que φ soit nul : posant en même temps $v=0$, les formules de la page 539, se réduiront à

$$\begin{aligned} x &= t\cos\psi - u\cos\theta\sin\psi, \\ y &= t\sin\psi + u\cos\theta\cos\psi, \\ z &= u\sin\theta. \end{aligned}$$

La substitution de ces valeurs donnera immédiatement l'équation de l'intersection de la surface et du plan, considérée dans ce plan même.

297. On transforme aussi en coordonnées polaires les coordonnées rectangles d'un point quelconque de l'espace. On imagine un rayon
FIG. 64. vecteur AM, *fig.* 64, et pour en fixer la position, on emploie l'angle MAM' qu'il fait avec sa projection sur le plan BAC, puis l'angle $M'AB$ que cette projection fait avec l'axe AB : il vient alors

$$MM' = AM \sin MAM', \quad AM' = AM \cos MAM',$$
$$PM' = AM' \sin M'AB, \quad AP = AM' \cos M'AB;$$

et posant

$$AM = r, \quad MAM' = \varphi, \quad M'AB = \psi,$$

on obtient

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \; z = r\sin\varphi, \; y = r\cos\varphi\sin\psi, \; x = r\cos\varphi\cos\psi.$$

Les angles φ et ψ ont avec les angles a, b, c, compris entre AM et les axes AB, AC, AD, des relations qu'il est bon de connaître. On voit d'abord que l'angle φ est complément de l'angle c ; ensuite on tire des formules ci-dessus

$$\frac{y}{z} = \frac{\cos\varphi \sin\psi}{\sin\varphi}, \quad \frac{x}{z} = \frac{\cos\varphi \cos\psi}{\sin\varphi};$$

et si l'on compare ces résultats avec les équations

$$\frac{y}{z} = \frac{\cos b}{\cos c}, \quad \frac{x}{z} = \frac{\cos a}{\cos c} \; (269),$$

il viendra

$$\cos c = \sin\varphi, \quad \cos b = \cos\varphi \sin\psi, \quad \cos a = \cos\varphi \cos\psi;$$

expressions qui satisfont encore à la condition

$$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1.$$

Des surfaces du second ordre. 298. Les surfaces, de même que les lignes, se divisent en ordres, suivant le degré de leurs équations ; le plan est la surface du premier ordre, parce que son équation ne monte qu'au premier degré. Les surfaces du second ordre sont toutes comprises dans l'équation

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ \qquad\qquad + 2Gx \;\; + 2Hy \;\; + 2Kz \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + L \end{array}\right\} = 0 \ldots (a),$$

qui est la plus générale qu'on puisse former dans le second degré, avec les trois indéterminées x, y et z.

En résolvant cette équation par rapport à l'une d'elles, z par exemple, on trouvera

$$z = -\frac{Ex+Fy+K}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{[(E^2-AC)x^2+(F^2-BC)y^2+2(EF-CD)xy + 2(EK-CG)x+2(FK-CH)y+K^2-CL]}.$$

Ce résultat nous apprend qu'au même point du plan des x et y, répondent deux points sur la surface proposée, et que par conséquent chacune des valeurs de z produit, par la substitution de toutes les valeurs possibles de x et de y, une portion de surface qui est, par rapport à la surface totale, ce que sont les branches d'une courbe à l'égard de cette courbe : je donnerai à ces portions le nom de *nappes*.

On remarquera d'abord que la partie rationnelle de la valeur de z, exprime l'ordonnée d'un plan qui partage la surface en deux parties symétriques; car si on faisait partir de ce plan les ordonnées de la surface, en posant

$$z+\frac{Ex+Fy+K}{C}=u,$$

l'indéterminée u aurait deux valeurs égales, l'une positive et l'autre négative. Le plan dont il s'agit est donc, à l'égard des surfaces du second degré, ce qu'est un diamètre par rapport aux courbes de ce degré.

On se ferait difficilement l'idée de la forme que doit affecter une surface dont on a l'équation, si on n'en considérait que des points isolés; mais au lieu de cela, on imagine une infinité de sections faites dans cette surface par des plans, que pour plus de simplicité on prend parallèles à l'un des plans coordonnés : les cours de ces diverses courbes étant connus, leur continuité fait concevoir la forme de la surface proposée.

La nature même des équations à trois indéterminées conduit à ce procédé; car en regardant z, par exemple, comme une fonction de x et de y, pour en trouver avec ordre les différentes valeurs, il faut, lorsqu'on a donné une valeur arbitraire à la variable indépendante x, y faire correspondre toutes celles qu'on peut donner en même temps à l'autre variable indépendante y, et de là résultera pour la même valeur de x, une suite infinie de valeurs de z. Concevant la même chose pour chaque valeur de x, il en naîtra un nombre infini de ces suites; et il est aisé de voir que chacune d'elles répond à une section faite par un plan parallèle à celui des y, z, puisqu'on y suppose x constant (273).

La table ci-dessous fera saisir parfaitement les relations qu'ont entre elles les suites dont on vient de parler.

	y'	y''	y'''	y''''	.
x'	$z'_{\prime}$	$z''_{\prime}$	$z'''_{\prime}$	$z''''_{\prime}$	.
x''	$z'_{\prime\prime}$	$z''_{\prime\prime}$	$z'''_{\prime\prime}$	$z''''_{\prime\prime}$	.
x'''	$z'_{\prime\prime\prime}$	$z''_{\prime\prime\prime}$	$z'''_{\prime\prime\prime}$	$z''''_{\prime\prime\prime}$	.
x''''	$z'_{\prime\prime\prime\prime}$	$z''_{\prime\prime\prime\prime}$	$z'''_{\prime\prime\prime\prime}$	$z''''_{\prime\prime\prime\prime}$	.
.	.	.	.	.	.

x', x'', x''', x''''... désignent les différentes valeurs données à la variable x, et y', y'', y''', y''''... celles de y, qui sont absolument indépendantes des premières; les z contenus dans chaque bande horizontale, forment la suite des valeurs que reçoit cette fonction, par la combinaison de toutes les valeurs possibles de y avec la valeur de x, placée à la tête de cette bande. On pourrait considérer aussi la table précédente par colonnes; on aurait alors dans chacune, la suite des valeurs de z, qui résultent de la combinaison d'une même valeur de y avec toutes les valeurs possibles de x (*).

En faisant $x=0$ dans l'équation (a), elle se réduira à

$$By^2+Cz^2+2Fyz+2Hy+2Kz+L=0,$$

équation qui appartient à la ligne du second ordre, suivant laquelle

(*) Cette table est du genre de celles que l'on nomme *tables à double entrée*, parce que pour y trouver les nombres qu'elles doivent donner, il faut en connaître deux autres; savoir, le n° de la bande et celui de la colonne où se trouve la case cherchée. Les tables à double entrée répondent à des surfaces, tandis que les tables ordinaires, ou à simple entrée, répondent à des lignes.

la surface proposée rencontre le plan des yz. Donnant ensuite à x dans l'équation (a) différentes valeurs déterminées, il en naîtra encore des lignes du second ordre, situées dans des plans parallèles au premier. En faisant $y=0$ dans l'équation (a), on obtiendrait celle de la ligne du second ordre qui serait la section de la surface proposée par le plan des xz; donnant ensuite à y différentes valeurs déterminées, on trouverait successivement toutes les sections parallèles à celle-ci. C'est par les limites de ces diverses sections qu'on reconnaîtrait celles de la surface proposée; mais avant d'entrer dans ces détails, il faut simplifier l'équation (a) qui, en changeant convenablement la situation des plans coordonnés, peut se réduire beaucoup sans perdre de sa généralité : car une surface a, comme une ligne, une infinité d'équations différentes, suivant les diverses situations des axes auxquels on la rapporte.

299. Reprenons l'équation générale des surfaces du second ordre

$$\left.\begin{array}{r}Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz\\ +2Gx\ +2Hy\ +2Kz\\ +L\end{array}\right\}=0\ldots(a);$$

et faisons $x=x'+\alpha$, $y=y'+\beta$, $z=z'+\gamma$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'z'+2Fy'z'\\ +2x'(A\alpha+D\beta+E\gamma+G)+2y'(B\beta+D\alpha+F\gamma+H)+2z'(C\gamma+E\alpha+F\beta+K)\\ +\ A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+2D\alpha\beta+2E\alpha\gamma+2F\beta\gamma+2G\alpha+2H\beta+2K\gamma+L\end{array}\right\}=0.$$

Au moyen des trois quantités arbitraires α, β, γ, on fera disparaître les termes affectés de x', y', z', dans la seconde ligne, si l'on pose les équations

$$\left.\begin{array}{l}A\alpha+D\beta+E\gamma+G=0\\ B\beta+D\alpha+F\gamma+H=0\\ C\gamma+E\alpha+F\beta+K=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(1).$$

En multipliant la première de celles-ci par α, la seconde par β, la troisième par γ, et faisant la somme des produits pour la retrancher de l'équation (a), après en avoir effacé la seconde ligne, il restera

$$\left.\begin{array}{r}Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'z'+2Fy'z'\\ +G\alpha+H\beta+K\gamma+L\end{array}\right\}=0\ldots(a').$$

Nous n'avons encore changé que la position de l'origine (290); donnons maintenant aux axes une autre direction, en substituant

$$m't+n'u+p'v, \quad m''t+n''u+p''v, \quad m'''t+n'''u+p'''v,$$

à la place des coordonnées x', y', z' : nous aurons un résultat de la forme

$$A't^2+B'u^2+C'v^2+D'tu+E'tv+F'uv+L'=0;$$

et comme en supposant les nouvelles coordonnées rectangulaires, il reste encore trois arbitraires parmi les neuf quantités m', n', p', m'', etc., nous pourrons en disposer pour faire disparaître trois termes dans l'équation ci-dessus. La supposition de

$$D'=0, \quad E'=0, \quad F'=0 \ldots\ldots (2);$$

la réduit à

$$A't^2+B'u^2+C'v^2+L'=0 \ldots\ldots\ldots (a').$$

300. Il faudrait maintenant examiner si les deux transformations indiquées ci-dessus, sont toujours possibles. La première, qui ne dépend que des équations (1) où les inconnues ne passent pas le premier degré, ne peut souffrir d'exception que dans le cas où le dénominateur de ces inconnues deviendrait nul, c'est-à-dire, si l'on avait entre les coefficiens de l'équation (a), la relation

$$ABC-AF^2+2DEF-CD^2-BE^2=0,$$

301. A l'égard de la seconde transformation, il faut s'assurer si elle est toujours possible en quantités réelles, parce que les équations dont elle dépend passent le premier degré. Euler n'en a point donné de démonstration directe; M. Biot, dans son *Essai de Géométrie analytique*, y a suppléé par des calculs fort élégans, établis sur les formules des nos 291, 292; mais comme ils ne mènent pas si près de la détermination complète de la position des nouveaux axes, que le procédé employé par MM. Hachette et Poisson, à la suite d'un Mémoire sur *les surfaces du second degré*, ce procédé sera celui auquel je m'arrêterai. On y fait usage des formules de la page 539, dans lesquelles on suppose l'angle $\varphi=0$; c'est-à-dire qu'on

prend AE pour l'axe des t, afin de n'avoir d'abord à déterminer que les deux angles ψ et θ, ce qui réduit les formules citées, à

$$\begin{aligned}
x' &= t\cos\psi - u\cos\theta\sin\psi + v\sin\theta\sin\psi,\\
y' &= t\sin\psi + u\cos\theta\cos\psi - v\sin\theta\cos\psi,\\
z' &= u\sin\theta + v\cos\theta;
\end{aligned}$$

et puisqu'il n'y reste que deux quantités arbitraires, on ne peut faire disparaître par leur moyen que deux termes dans la transformée de l'équation (d'); nous choisirons ceux qui sont affectés des produits tv et uv. Si l'on ne développe des valeurs de x'^2, y'^2, z'^2, $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$, que les termes multipliés par les produits tv et uv, on aura

$$\begin{aligned}
x'^2 &= 2tv\sin\theta\sin\psi\cos\psi - 2uv\sin\theta\cos\theta\sin\psi^2 + \text{etc.},\\
y'^2 &= -2tv\sin\theta\sin\psi\cos\psi - 2uv\sin\theta\cos\theta\cos\psi^2 + \text{etc.},\\
z'^2 &= 2uv\sin\theta\cos\theta + \text{etc.},\\
2x'y' &= -2tv(\sin\theta\cos\psi^2 - \sin\theta\sin\psi^2) + 2uv\,.\,2\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi + \text{etc.}\\
2x'z' &= 2tv\cos\theta\cos\psi - 2uv(\cos\theta^2\sin\psi - \sin\theta^2\sin\psi) + \text{etc.},\\
2y'z' &= 2tv\cos\theta\sin\psi + 2uv(\cos\theta^2\cos\psi - \cos\theta^2\cos\psi) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Substituant ces résultats dans l'équation (d'), et égalant à zéro le multiplicateur de tv et celui de uv, on aura, en rassemblant les termes affectés de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$, les équations

$$\left.\begin{aligned}
[(A-B)\sin\psi\cos\psi + D(\sin\psi^2 - \cos\psi^2)]\sin\theta\\
+ (E\cos\psi + F\sin\psi)\cos\theta
\end{aligned}\right\} = 0 \ldots (3),$$

$$\left.\begin{aligned}
-(A\sin\psi^2 + B\cos\psi^2 - 2D\sin\psi\cos\psi - C)\sin\theta\cos\theta\\
+ (E\sin\psi - F\cos\psi)(\sin\theta^2 - \cos\theta^2)
\end{aligned}\right\} = 0 \ldots (4).$$

En divisant la première par $\cos\theta$, on en tire

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{E\cos\psi + F\sin\psi}{(B-A)\sin\psi\cos\psi - D(\sin\psi^2 - \cos\psi^2)}:$$

la seconde étant divisée par $\sin\theta\cos\theta$, devient

$$A\sin\psi^2 + B\cos\psi^2 - 2D\sin\psi\cos\psi - C = (E\sin\psi - F\cos\psi)\left(\operatorname{tang}\theta - \frac{1}{\operatorname{tang}\theta}\right);$$

et en y substituant la valeur précédente de $\operatorname{tang}\theta$, puis faisant disparaître les dénominateurs, on en déduit

$$\left.\begin{array}{l}(E\cos\psi+F\sin\psi)[(B-A)\sin\psi\cos\psi-D(\sin\psi^2-\cos\psi^2)]\times\\ {[A\sin\psi^2+B\cos\psi^2-2D\sin\psi\cos\psi-C]}\end{array}\right\}=$$
$$(E\sin\psi-F\cos\psi)[(E\cos\psi+F\sin\psi)^2-((B-A)\sin\psi\cos\psi-D(\sin\psi^2-\cos\psi^2))^2],$$

équation qui doit déterminer l'angle ψ. On y introduit la tangente, au lieu du sinus et du cosinus, en faisant

$$\tang\psi=q,\ \text{d'où}\ \sin\psi=\frac{q}{\sqrt{1+q^2}},\ \cos\psi=\frac{1}{\sqrt{1+q^2}};$$

et par la substitution de ces valeurs, il vient

$$\frac{E+Fq}{\sqrt{1+q^2}}\cdot\frac{(B-A)q-D(q^2-1)}{1+q^2}\left\{\frac{Aq^2+B-2Dq}{1+q^2}-C\right\}$$
$$=\frac{Eq-F}{\sqrt{1+q^2}}\left\{\frac{(E+Fq)^2}{1+q^2}-\frac{[(B-A)q-D(q^2-1)]^2}{(1+q^2)^2}\right\}.$$

On peut d'abord supprimer au diviseur $(1+q^2)\sqrt{1+q^2}$, comme facteur commun, et mettre ensuite l'équation sous la forme

$$\left.\begin{array}{l}\{(B-A)q-D(q^2-1)\}\left\{(E+Fq)\left[\frac{Aq^2+B-2Dq}{1+q^2}-C\right]\right.\\ \left.+(Eq-F)\left[\frac{(B-A)q-D(q^2-1)}{1+q^2}\right]\right\}-(Eq-F)(E+Fq)^2\end{array}\right\}=0;$$

les opérations indiquées dans le facteur

$$(E+Fq)\left[\frac{Aq^2+B-2Dq}{1+q^2}-C\right]+(Eq-F)\left[\frac{(B-A)q-D(q^2-1)}{1+q^2}\right]$$

étant effectuées, il se réduit à

$$BE-DF-CE+(AF-DE-CF)q;$$

et l'équation finale est

$$\left.\begin{array}{l}\{(B-A)q-D(q^2-1)\}\{BE-DF-CE+(AF-DE-CF)q\}\\ \qquad-(Eq-F)(E+Fq)^2\end{array}\right\}=0\ (5).$$

Cette équation étant du troisième degré, et l'équation qui donne tang θ étant du premier, les angles ψ et θ sont donc susceptibles au moins d'une détermination réelle. Par leur moyen on aura transformé l'équation (d) en

$$A't^2+B'u^2+C'v^2+2D'ut+L'=0;$$

et pour faire disparaître le terme affecté de ut, il suffira de transformer les coordonnées u et t, dans le plan qui leur est commun, en posant

$$t = t' \cos\varphi - u' \sin\varphi, \quad u = t' \sin\varphi + u' \cos\varphi \text{ (182)}.$$

La suppression du terme affecté de $t'u'$, qui réduira la nouvelle transformée à $A''t'^2 + B''u'^2 + C'v^2 + L' = 0$, fournira pour déterminer l'angle φ, l'équation

$$(B' - A') \sin\varphi \cos\varphi + D' (\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) = 0,$$

équivalente à

$$\tfrac{1}{2}(B' - A') \sin 2\varphi + D' \cos 2\varphi = 0,$$

d'où l'on déduira enfin

$$\tang 2\varphi = -\frac{2D'}{B' - A'}:$$

on pourra donc passer, en quantités réelles, de la transformée (a'), à une équation de la forme

$$A't^2 + B'u^2 + C'v^2 + L' = 0.$$

302. Examinons maintenant les propriétés de la transformée

$$A't^2 + B'u^2 + C'v^2 + L' = 0 \ldots\ldots (a'');$$

elle est symétrique par rapport aux trois coordonnées t, u et v, et donne pour l'une quelconque de ces variables deux valeurs qui ne diffèrent que par leur signe. Il suit de là que les plans coordonnés sont des plans diamétraux de la surface proposée (298); mais ils ont cela de particulier, qu'ils sont perpendiculaires à leurs ordonnées; et on peut conclure du n° précédent, qu'il n'y a que ces plans qui jouissent de cette propriété. En effet la possibilité de la transformation des x', y', z' en t, u et v, montre qu'il en existe au moins trois; mais, par la dernière équation de la page précédente, obtenue en faisant évanouir les termes où v n'entre qu'au premier degré, la surface est rapportée à un plan diamétral perpendiculaire à cette ordonnée, et comme dans cette transformation on ne s'est pas imposé d'autre condition, il est évident qu'elle doit conduire à tous les plans diamétraux qui peuvent être perpendiculaires à leurs ordonnées. Or le nombre de ces plans ne dépend que de celui des valeurs de q, puisque tang θ est donnée par une équation du premier degré; et celle qui détermine q montant au troisième degré, il s'ensuit que les plans diamétraux ne peuvent être en nombre plus grand que trois, et que l'équation qui les donne a toutes ses racines réelles.

La transformée (a'') est encore telle, que si trois valeurs $t=\alpha$, $u=\beta$, $v=\gamma$, de signes quelconques, la vérifient, ces valeurs, prises avec des signes contraires, y satisferont également : or, dans l'un et l'autre cas, ces valeurs appartiennent à la droite ayant pour équations $\gamma t = \alpha v$, $\gamma u = \beta v$ (278), et désignent ses intersections avec la surface proposée ; ainsi ces intersections sont à égale distance de l'origine des coordonnées. Il suit de là que toute droite qui traverse la surface, en passant par l'origine des coordonnées, est coupée en deux parties égales à cette origine, qui par conséquent est le *centre* de la surface ; la droite en est *un diamètre*. On voit aussi par là que la première transformation, par laquelle on passe de l'équation (a) à l'équation (a'), ne peut s'effectuer qu'à l'égard des surfaces du second degré qui ont un centre, et que ces surfaces sont les seules comprises dans l'équation (a'').

303. Toutes les formes que peut prendre l'équation (a''), par les diverses combinaisons de signes des constantes qu'elle renferme, rentrent dans l'une des suivantes :

$$\begin{aligned}
A't^2 + B'u^2 + C'v^2 + L' &= 0, \\
A't^2 + B'u^2 + C'v^2 - L' &= 0, \\
A't^2 + B'u^2 - C'v^2 - L' &= 0, \\
A't^2 - B'u^2 - C'v^2 - L' &= 0,
\end{aligned}$$

dans lesquelles sont compris les cas particuliers où quelques-unes des constantes s'évanouissent.

La première de ces formes ne signifie rien, puisqu'elle ne donnerait que des valeurs imaginaires pour l'une quelconque des coordonnées ; excepté le cas où $L'=0$: on y satisferait alors, en faisant $t=0$, $u=0$, $v=0$, et elle indiquerait par conséquent l'origine des coordonnées.

Pour connaître la forme des surfaces auxquelles peut appartenir l'équation

$$A't^2 + B'u^2 + C'v^2 - L' = 0,$$

il faut considérer leurs sections par des plans parallèles à l'un des plans coordonnés. Je choisis celles qui le sont au plan des uv, et regardant t

comme constant, je fais, pour abréger, $L'-A't^2=\lambda^2$; il vient

$$B'u^2+C'v^2=\lambda^2;$$

équation à une ellipse dont le centre est sur l'axe des t, et dont les axes, qui ont pour expressions $\frac{\lambda}{\sqrt{B'}}$, $\frac{\lambda}{\sqrt{C'}}$, sont respectivement parallèles à ceux des u et des v. Elle se construirait en prenant sur la droite AB, axe des t, *fig.* 69, $AP=t$, et tirant parallèlement aux droites FIG. 69.
AC et AD, axes des u et des v, des lignes $PQ=\frac{\lambda}{\sqrt{B'}}$, $PR=\frac{\lambda}{\sqrt{C'}}$, sur lesquelles on décrirait une ellipse $QRqr$.

Les expressions des axes de cette ellipse changent avec la valeur de t, ensorte que la section se réduit à un point lorsque $\lambda=0$, ce qui répond à $t=\sqrt{\frac{L'}{A'}}$, et qu'elle devient la plus grande possible quand $t=0$, parce qu'alors λ étant égal à $\sqrt{L'}$, atteint son maximum, ainsi que les expressions des axes PQ et PR. Si donc on prend $AB=\sqrt{\frac{L'}{A'}}$, on aura, sur l'axe des t, le *sommet* de la surface proposée; et construisant dans le plan DAC, sur les axes $AC=\sqrt{\frac{L'}{B'}}$, $AD=\sqrt{\frac{L'}{C'}}$, l'ellipse $CDcd$, ce sera la plus grande des sections de cette surface, parallèlement au plan des uv. Au-delà du point A, sur Ab, partie négative de l'axe des t, les sections vont en diminuant jusqu'au point b, où elles se réduisent encore à un point: elles sont d'ailleurs les mêmes que celles qui sont placées à égale distance de l'origine, dans la partie AB, de l'axe des t. Il est évident, par ce que l'on vient de dire, que la surface proposée est fermée de toutes parts; que partout sa concavité est tournée vers l'intérieur, et qu'elle a deux sommets sur chacun des axes coordonnés: car, outre les sommets B et b déjà indiqués, ceux de la plus grande section, $CDcd$, sont aussi les sommets de cette même surface.

On trouverait immédiatement ces points, en cherchant ceux où la surface rencontre chacun des axes, c'est-à-dire en faisant soit $u=0$ et $v=0$, soit $t=0$ et $v=0$, soit enfin $t=0$ et $u=0$, dans l'équation de la surface.

Il faut remarquer aussi que les ellipses $QRqr$, parallèles au plan des uv, ont constamment deux de leurs sommets dans le plan ABC, et deux autres dans le plan ABD; l'ensemble des premiers compose la section *BCbc* de la surface proposée par le plan des tu, et celui des seconds, la section *BDbd* de la même surface, par le plan des tv; de manière que la première de ces courbes, répondant à $v=0$, a pour équation

$$A't^2+B'u^2-L'=0,$$

et la seconde, répondant à $u=0$, a pour équation

$$A't^2+C'v^2-L'=0:$$

ce sont donc encore des ellipses. Ces deux sections et la section *CDcd*, étant faites par les plans coordonnés, se nomment *sections principales*. On doit observer que dans le cas actuel elles sont réelles toutes trois, et donnent les plus grandes dimensions de la surface proposée, que l'on nomme en conséquence *ellipsoïde*.

Si deux des coefficiens A', B', C', sont égaux, B' et C', par exemple, l'équation de la surface proposée prendra la forme

$$A't^2+B'(u^2+v^2)-L'=0:$$

ses sections parallèles au plan des uv, auront alors pour équation $u^2+v^2=\frac{\lambda^2}{B'}$, et seront par conséquent des cercles ayant leur centre dans l'axe des t, et pour rayons, les ordonnées des deux sections principales *BDbd*, *BCbc*, qui sont dans ce cas deux ellipses égales : on doit donc en conclure que la surface proposée est engendrée par la révolution de l'ellipse *BDbd*, autour de l'axe *AB*.

Lorsqu'on aura en même temps $A'=B'=C'$, l'équation de la surface, devenant $t^2+u^2+v^2=\frac{L'}{A'}$, les trois sections principales seront des cercles, et cette surface sera une sphère ayant son centre à l'origine des coordonnées, et son rayon égal à $\sqrt{\frac{L'}{A'}}$.

J'ai déjà dit que l'équation $A't^2+B'u^2+C'v^2=0$, n'indiquait que l'origine des coordonnées; c'est, pour ainsi dire, la limite de tous les ellipsoïdes, lorsque leurs axes s'évanouissent. Quand un des coefficiens A', B', C' devient nul, l'équation ne contenant plus que deux variables, ne donne qu'une courbe placée sur l'un des plans coordonnés; mais cette courbe doit être considérée comme la base d'un cylindre élevé perpendiculairement à ce plan. Par exemple,

$$A't^2+B'u^2-L'=0,$$

qui appartient à une ellipse tracée dans le plan des tu, désignera de cette manière un cylindre ayant pour base cette ellipse, et perpendiculaire à son plan. Les équations $A't^2=L'$, $B'u^2=L'$, que l'on obtiendrait en faisant successivement $u=0$, $t=0$, donnant

$$t=\pm\sqrt{\frac{L'}{A'}},\quad u=\pm\sqrt{\frac{L'}{B'}},$$

indiquent chacune le système de deux lignes droites parallèles à l'axe des v; et c'est à quoi se réduisent les sections principales faites par les plans des tv et des uv. Il est d'ailleurs aisé de voir que toutes les coupes parallèles à ces plans seront des lignes droites parallèles aux précédentes, tandis que les coupes parallèles au plan des tu, seront égales à la base même du cylindre.

304. Passons à l'équation

$$A't^2+B'u^2-C'v^2-L'=0.$$

En y regardant t comme constant, et faisant encore $L'-A't^2=\lambda^2$, on en déduit

$$B'u^2-C'v^2=\lambda^2,$$

ce qui montre que les sections parallèles au plan des uv, sont des hyperboles dont l'axe transverse est parallèle à celui des u. La plus grande de ces hyperboles, qui répond à $t=0$, et forme la section principale dans le plan des uv, a pour équation

$$B'u^2-C'v^2=L';$$

et lorsqu'on fait $t=\sqrt{\frac{L'}{A'}}$, pour avoir $\lambda=0$, il vient

$$B'u^2-C'v^2=0,\quad \text{d'où}\quad u=\pm v\sqrt{\frac{C'}{B'}},$$

résultat qui indique le système de deux lignes droites, se coupant sur l'axe des t. C'est la limite des sections hyperboliques, dont les sommets se sont rapprochés jusqu'à coïncider; et tous ces sommets, situés dans le plan des ut, forment la section principale dans ce plan. Cette courbe, ayant pour équation

$$A't^2+B'u^2=L',$$

est une ellipse; mais elle ne donne que les limites intérieures de la surface proposée, puisque les sections hyperboliques tournent leur concavité vers l'extérieur. Dans le sens des t, la surface ne finit pas au point où $\lambda = 0$; car si l'on prend $A't^2 > L'$, l'équation des sections parallèles au plan des uv, ne fera que se changer en $C'v^2 - B'u^2 = \lambda^2$, et désignera alors des hyperboles dont l'axe transverse sera parallèle à celui des v, et susceptible d'augmenter à l'infini. On voit encore plus clairement peut-être, par les sections parallèles au plan des ut, que la surface proposée enveloppe de toutes parts l'axe des v, et n'est point fermée perpendiculairement à cet axe, sur lequel elle n'a point de sommets réels. En effet, l'équation de cette surface étant mise sous la forme

$$A't^2 + B'u^2 = L' + C'v^2,$$

si l'on y regarde v comme constant, donne une ellipse dont les axes sont d'autant plus grands, que l'on a assigné à v une valeur plus considérable; et par conséquent toutes les sections parallèles au plan des tu, forment une suite d'ellipses semblables, dont les dimensions augmentent à mesure que le plan coupant s'éloigne de l'origine.

La section principale dans le plan des tv, ayant pour équation

$$A't^2 - C'v^2 = L',$$

est une hyperbole; et toutes les sections parallèles sont de même nature, ensorte qu'on peut y appliquer ce qui a été dit par rapport aux sections parallèles au plan des uv.

On doit pouvoir, d'après ce qui précède, et en imitant le procédé indiqué dans le n° 303, pour la construction de l'ellipsoïde par ses sections, se faire une idée de la surface que nous considérons maintenant, et que l'on a nommée *hyperboloïde à une nappe*, parce qu'elle est formée d'une seule partie. S'il restait quelque difficulté pour en saisir la forme, cette difficulté disparaîtrait, en considérant le cas particulier où $A' = B'$. Par cette hypothèse, toutes les coupes parallèles au plan des tu deviennent des cercles; toutes les sections formées par des plans passant par l'axe des v, sont donc égales entre elles et aux sections principales comprises dans le plan des uv et des tv; et par conséquent la surface peut être engendrée par la révolution de l'une de ces sections tournant autour de l'axe des v, c'est-à-dire, par une hyperbole tournant autour de son second axe.

305. Lorsque $L' = 0$, l'équation discutée dans le n° précédent, devenant

$$A't^2 + B'u^2 - C'v^2 = 0,$$

donne pour les sections principales les équations

$$B'u^2 - C'v^2 = 0, \quad A't^2 - C'v^2 = 0, \quad A't^2 + B'u^2 = 0;$$

les deux premières appartiennent chacune au système de deux droites passant par l'origine, et la troisième indique seulement cette origine: on voit d'ailleurs que la surface proposée doit passer par ce point, puisqu'en supposant à-la-fois $t = 0$, $u = 0$, il viendra $v = 0$. Si l'on forme l'équation des coupes parallèlement à chaque plan coordonné, on trouvera des ellipses par rapport au plan des tu, et des hyperboles par rapport au plan des uv et tv, ce qui peut déjà donner une idée de la forme de la surface proposée; mais on en acquiert une plus complète, en remarquant que, puisque l'équation de la surface proposée est homogène, on peut la réduire à deux variables, par la supposition de

$$t = mv, \quad u = nv,$$

d'où il résulte

$$A'm^2 + B'n^2 - C' = 0.$$

Cette dernière équation laissant indéterminée une des quantités m et n, les deux équations posées précédemment, indiquent une infinité de lignes droites assujéties à passer par l'origine des coordonnées. Il suit de là que la droite menée d'un point quelconque de la surface à l'origine des coordonnées, coïncide partout avec cette surface, et que par conséquent une droite qui se mouvrait en passant toujours par l'origine des coordonnées, et rasant la circonférence d'une courbe quelconque tracée sur la même surface, n'en sortirait pas : cette génération est celle des *surfaces coniques* quelconques.

Les équations ci-dessus fournissent une directrice pour le mouvement de la droite; car si on remet dans la dernière, pour m et pour n, leur valeur, et qu'on y regarde ensuite v comme constant, il viendra

$$\frac{A'}{v^2}t^2 + \frac{B'}{v^2}u^2 - C' = 0,$$

équation d'une ellipse parallèle au plan des tu, et sur la circonférence de laquelle passera constamment la droite génératrice.

Si l'on avait $A' = B'$, l'ellipse se changerait en cercle, et la surface proposée serait un cône droit, à base circulaire, ayant son sommet à l'origine des coordonnées, et son axe coïncidant avec celui des v. Pour reconnaître que cette surface est engendrée par la révolution d'un angle autour de l'un de ses côtés, il n'y a qu'à substituer aux quantités m, n, leurs expressions angulaires, $\frac{\cos a}{\cos c}$, $\frac{\cos b}{\cos c}$; l'équation

$$A'm^2 + A'n^2 - C' = 0,$$

qui répond à ce cas, devient

$$A'(\cos a^2 + \cos b^2) - C' \cos c^2 = 0;$$

et à cause de $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$, elle donne

$$A'(1 - \cos c^2) - C' \cos c^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \cos c^2 = \frac{A'}{A' + C'};$$

ce qui montre que la génératrice fait toujours le même angle avec l'axe des v.

306. Le dernier cas de l'équation (a''), savoir

$$A't^2 - B'u^2 - C'v^2 - L' = 0,$$

donne pour les sections parallèles au plan des uv, l'équation

$$-B'u^2 - C'v^2 = \lambda^2,$$

qui ne peut rien signifier tant que λ n'est pas nul; ainsi, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \pm\sqrt{\frac{L'}{A'}}$, la surface n'offrant aucune section réelle, n'existe pas. Lorsque $\lambda = 0$, cette section n'est encore qu'un point, mais elle devient une ellipse dont les dimensions peuvent croître indéfiniment dès que $A't^2 > L'$. Il est visible, d'après cela, que la surface proposée est formée de deux parties séparées qui enveloppent l'axe des t, et dont la concavité est tournée vers l'intérieur. Les sommets des coupes elliptiques que je viens d'indiquer, forment sur le plan des tu et sur celui des tv, des hyperboles, puisque les sections principales sur ces plans sont données par les équations

$$A't^2 - B'u^2 = L', \quad A't^2 - C'v^2 = L',$$

et les sections qui leur sont parallèles sont également des hyperboles. La surface proposée se nomme *hyperboloïde à deux nappes* : lorsque $L'=0$, elle devient un cône dont l'axe coïncide avec celui des t, et quand $B'=C'$, les sections parallèles au plan des uv devenant des cercles, on reconnaît aisément qu'elle peut être engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe transverse.

307. En rapprochant ce qui a été dit dans les n^{os} 303, 304, 306, on voit que l'équation (a'') comprend trois genres de surfaces caractérisées par le nombre de leurs sommets. L'ellipsoïde en a six, deux sur chacun des axes des coordonnées ; l'hyperboloïde à une nappe n'en a que quatre, et l'hyperboloïde à deux nappes, seulement deux.

En introduisant dans l'équation (a'') les axes des sections principales, on la rend plus symétrique. Ce changement se présente de lui-même, lorsqu'on met cette équation sous la forme

$$\frac{A'}{L'}t^2+\frac{B'}{L'}u^2+\frac{C'}{L'}v^2=1\,;$$

il n'y a plus alors qu'à faire

$$\sqrt{\frac{L'}{A'}}=a,\qquad \sqrt{\frac{L'}{B'}}=b,\qquad \sqrt{\frac{L'}{C'}}=c\,:$$

il vient

$$\frac{t^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}+\frac{v^2}{c^2}=1\,;$$

ou

$$b^2c^2t^2+a^2c^2u^2+a^2b^2v^2=a^2b^2c^2.$$

On voit par là qu'un des axes devient imaginaire dans l'hyperboloïde à une nappe, et que deux le deviennent dans l'hyperboloïde à deux nappes ; pour construire alors ces axes en quantités réelles, il faut changer le signe de leur quarré, et l'on a par conséquent

$b^2c^2t^2+a^2c^2u^2+a^2b^2v^2=a^2b^2c^2$, pour l'ellipsoïde ;
$b^2c^2t^2+a^2c^2u^2-a^2b^2v^2=a^2b^2c^2$, pour l'hyperboloïde à une nappe ;
$b^2c^2t^2-a^2c^2u^2-a^2b^2v^2=a^2b^2c^2$, pour l'hyperboloïde à deux nappes.

308. Nous n'avons pu trouver, par ce qui précède, que les surfaces du second ordre qui sont douées d'un centre ; pour reconnaître celles qui en sont dépourvues, reprenons l'équation générale (a) (299), et

supposons qu'on en fasse d'abord disparaître les termes $2Dxy$, $2Exz$, $2Fyz$, en changeant la direction des axes des coordonnées, ce qui n'exigera d'autres calculs que ceux du n° 301, puisque les termes où chaque coordonnée est seule à la première puissance n'entrent point dans les équations sur lesquelles ces calculs s'appuient : il viendra

$$A't^2+B'u^2+C'v^2+2G't+2H'u+2K'v+L'=0 \quad (a'').$$

Il est aisé de voir qu'en substituant $t'+\alpha$, $u'+\beta$, $v'+\gamma$, au lieu de t, de u et de v, l'on pourra toujours faire évanouir les premières puissances des variables dont le quarré se trouve dans l'équation ci-dessus; ce n'est donc que lorsqu'il manque un ou plusieurs de ces quarrés, que l'équation générale des surfaces du second degré cesse d'être réductible à la forme (a'').

Supposons d'abord que le terme affecté de v^2 manque; on aura $C'=0$, et on pourra employer les indéterminées α, β et γ, à faire disparaître les termes affectés de t', de u' et le terme constant, en posant les équations

$$A'\alpha+G'=0, \quad B'\beta+H'=0,$$
$$A'\alpha^2+B'\beta^2+2G'\alpha+2H'\beta+2K'\gamma+L'=0,$$

qui conduiront toujours à un résultat réel et assignable : on pourra donc, dans ce cas, substituer à l'équation (a'') la suivante

$$A't'^2+B'u'^2+2K'v'=0 \ (a''').$$

S'il manquait encore un quarré, u^2, par exemple, la transformation précédente ne pourrait plus faire disparaître le terme affecté de u; mais l'équation (a'') étant réduite alors à

$$A't^2+2G't+2H'u+2K'v+L'=0,$$

on y ferait d'abord $t=t'+\alpha$, $u=u'+\beta$; et en posant

$$A'\alpha+G'=0, \quad A'\alpha^2+2G'\alpha+2H'\beta'+L'=0,$$

on la changerait en

$$A't'^2+2H'u'+2K'v=0,$$

puis on ferait

$$u'=u''\cos\varphi-v'\sin\varphi, \quad v=u''\sin\varphi+v'\cos\varphi,$$

et on disposerait de l'angle φ pour ôter le terme affecté de u'', ensorte qu'il resterait seulement une équation de la forme

$$A't'^2 + 2K''v' = 0,$$

qui n'est qu'un cas particulier de l'équation (a'''); et celle-ci n'étant elle-même qu'un cas particulier de l'équation

$$A't'^2 + B'u'^2 + C'v'^2 + 2K'v' = 0,$$

il s'ensuit que cette dernière comprend toutes les surfaces du second degré.

309. Revenons maintenant à l'équation

$$A't'^2 + B'u'^2 + 2K'v' = 0.$$

Elle n'offre que deux cas distincts, celui où les coefficiens A et B sont de même signe, et le cas contraire.

Dans le premier, il faut prendre v', de manière à rendre le terme $2K'v'$, d'un signe contraire à celui de ces coefficiens; et en faisant $2K'v' = -\lambda^2$, l'équation des coupes parallèles au plan des $t'u'$, sera

$$A't'^2 + B'u'^2 = \lambda^2.$$

Ces coupes seront donc des ellipses ayant leur centre dans l'axe des v', et dont les dimensions pourront croître indéfiniment; elles commenceront par n'être qu'un point placé à l'origine des coordonnées, et ce point est le sommet de la surface proposée, qui tourne sa concavité vers son intérieur, et enveloppe l'axe des v'. Les sommets des mêmes coupes elliptiques seront sur deux paraboles données par les équations

$$A't'^2 + 2K'v' = 0, \quad B'u'^2 + 2K'v' = 0,$$

et formant les sections principales dans les plans des $t'v'$ et des $u'v'$. Cette surface est nommée *paraboloïde elliptique* : elle devient le *paraboloïde de révolution*, lorsque $A' = B'$, parce que les coupes parallèles au plan des $t'u'$ étant des cercles, elle peut être engendrée par une parabole tournant autour de l'axe des v'.

310. Lorsque les coefficiens A et B sont de signes différens, les coupes parallèles au plan des $t'u'$ ont pour équation

$$A't'^2 - B'u'^2 = \lambda^2,$$

et sont en général des hyperboles, excepté sur le plan des $t'u'$, où elles se réduisent aux deux droites données par l'équation

$$A't'^2 - B'u'^2 = 0,$$

et qui forment la section principale dans ce plan. Il se fait ici, dans la direction de leurs axes, un changement analogue à celui qui a été remarqué dans le n° 304 : le signe de λ^2, changeant avec celui de v', l'axe tranverse, qui coïncidait d'abord avec l'axe des t', passe sur celui des u', ou *vice versâ*, selon que K' est positif ou négatif; et cela, parce que les sections principales dans les plans des $t'v'$ et des $u'v'$, qui sont encore deux paraboles, sont placées de différent côté par rapport au plan des $t'u'$. La surface proposée a, de chaque côté de ce plan, deux nappes qui se joignent par les droites indiquées ci-dessus, et qui tournent leur concavité vers l'extérieur. Cette surface est nommée *paraboloïde hyperbolique*.

On y peut comprendre le *cylindre parabolique*, qui répond au cas où l'un des coefficiens A' ou B', devient nul. L'équation de la surface ne renfermant plus que deux coordonnées, est formée de lignes perpendiculaires à leur plan : ce sont les hyperboles qui se sont changées en lignes droites.

Si l'on a, par exemple,

$$A't'^2 + 2K'v' = 0;$$

la base du cylindre est une parabole sur le plan des $t'v'$, auquel il est perpendiculaire.

511. L'on peut comprendre dans la classification des surfaces du second degré, établie sur la considération des sommets (307), les deux surfaces particulières à l'équation $A't'^2 + B'u'^2 + 2K'v' = 0$, qui n'ont point de centre. Le paraboloïde elliptique n'a qu'un sommet, et le paraboloïde hyperbolique n'en a pas, puisque ses nappes se coupent à l'origine des coordonnées, et que dans les autres surfaces du second degré, on entend par sommet, un point au-delà duquel la surface ne s'étend pas (303). Suivant cette acception, le cône, à proprement parler, n'a pas de sommet; et ce n'est que parce qu'on n'a pas fait attention d'abord aux deux nappes dont cette surface est composée, qu'on a appliqué ce nom au point où elles se réunissent, et qui est le centre de la surface.

L'équation des paraboloïdes devient plus symétrique lorsque l'on y introduit le paramètre des sections paraboliques ; pour cela on fait

$$-\frac{2K'}{A'}=p, \quad -\frac{2K'}{B'}=q, \quad \text{d'où} \quad A'=-\frac{2K'}{p}, \quad B'=-\frac{2K'}{q};$$

et il vient

$$\frac{t'^2}{p}+\frac{u'^2}{q}=v', \quad \text{ou} \quad qt'^2+pu'^2=pqv'.$$

Il sera facile de récapituler tout ce qui précède, en l'appliquant à l'équation

$$A't'^2+B'u'^2+C'v'^2+2K'v'=0,$$

qui comprend toutes les surfaces du second degré : on s'est beaucoup occupé de ces surfaces dans les journaux de l'École Polytechnique, et dans les nos de la *Correspondance* sur cette École, et on leur a découvert de belles propriétés, mais dont le développement ne saurait trouver place ici ; il me suffira de dire qu'il a été démontré que *toutes les surfaces du second degré peuvent être engendrées de deux manières différentes, par un cercle variable de grandeur et de position.* Le calcul propre à vérifier cette proposition, n'est pas très-difficile à établir d'après ce qui précède ; et d'autres propriétés des mêmes surfaces se présenteront d'elles-mêmes dans les applications du calcul différentiel à la théorie des surfaces courbes.

312. La discussion des surfaces du second degré peut servir d'exemple pour celle des surfaces données par des équations quelconques ; et il est facile de voir que la transformation des coordonnées dans l'espace, doit avoir, dans la recherche des formes et des propriétés des surfaces courbes, des usages analogues à ceux de la transformation des coordonnées sur un plan, dans la détermination des formes et des propriétés des courbes ; mais les calculs deviendraient très-compliqués, et les résultats auraient, du moins quant à présent, fort peu d'applications utiles : je me bornerai donc à un petit nombre de remarques sur ce sujet.

Premièrement, la définition du centre d'une surface courbe (302), fait voir que lorsque ce point est à l'origine des coordonnées, l'équation de la surface doit rester la même, quand on change en même temps le signe des trois variables, et cela exige que le nombre des facteurs variables soit pair dans tous les termes de l'équation, ou bien impair :

dans le premier cas, tous ces termes conserveront leur signe; dans le cas contraire, ils en changeront tous à-la-fois, ce qui revient au même. Il suit de là, que pour reconnaître si une surface courbe a un centre, lorsque son équation n'est pas immédiatement de la forme indiquée ci-dessus, il suffit de transporter l'origine des coordonnées, en posant

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma;$$

et de chercher s'il n'est pas possible, par la seule détermination des quantités α, β et γ, de faire ensorte qu'il ne reste dans la transformée que des termes où le nombre des facteurs variables soit de même dénomination, bien entendu que le terme constant, doit compter parmi les termes de degré pair, et disparaître si l'on ne conserve que les termes de degré impair.

Secondement, toute surface rapportée à un *plan diamétral absolu*, ne doit avoir dans son équation que des termes où la coordonnée perpendiculaire à ce plan, soit élevée à une puissance paire. Si cela n'est pas, il faut, avant de prononcer que la surface est dépourvue de plans diamétraux, chercher si la transformation des axes des coordonnées, ne peut pas faire disparaître tous les termes où l'une des coordonnées nouvelles serait élevée à des puissances impaires supérieures à la première. Quant aux termes qui contiennent celle-ci, un simple déplacement de l'origine des coordonnées suffit en général pour en débarrasser l'équation.

Troisièmement, les surfaces courbes ont pour asymptotes d'autres surfaces dont les équations sont plus simples. Je prendrai pour exemple l'hyperboloïde à une nappe, dont l'équation est

$$A't^2 + B'u^2 - C'v^2 = L' \ (304).$$

Si on en tire la valeur de v, il viendra

$$v = \frac{1}{\sqrt{C'}} \sqrt{A't^2 + B'u^2 - L'};$$

et en réduisant cette expression en série, on trouvera

$$v = \left(\frac{A't^2 + B'u^2}{C'}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{1 - \frac{1}{2} \frac{L'}{A't^2 + B'u^2} + \text{etc.}\right\}.$$

Si maintenant on prend la différence entre ce résultat et l'ordonnée v

de la surface conique, donnée par l'équation

$$A't^2 + B'u^2 - C'v^2 = 0,$$

on obtiendra

$$\frac{1}{\sqrt{C'}}\left\{\frac{1}{2}\frac{L'}{(A't^2+B'u^2)^{\frac{1}{2}}} - \text{etc.}\right\},$$

quantité d'autant plus petite, que les variables t et u deviendront plus grandes; ainsi les deux surfaces s'approchent de plus en plus, à mesure qu'elles s'éloignent de l'origine des coordonnées, et la surface conique est l'asymptote de l'hyperboloïde.

La recherche des asymptotes des surfaces courbes se ramène à celle des termes les plus considérables de leurs équations, dans l'hypothèse où quelqu'une des variables devient très-grande; et elle est fondée sur des principes analogues à ceux qui ont été développés dans le n° 60 de l'Introduction: les surfaces courbes ont quelquefois pour asymptote une ou plusieurs lignes droites.

313. Soient x, y et z, les coordonnées d'un point M situé sur une surface courbe: celle de ces variables, que l'on supposera déterminée par les deux autres, sera l'ordonnée de la surface, et celles-ci en seront les abscisses. Je supposerai ici que $M'M = z$, *fig.* 70, soit l'ordonnée, et que $AP = x$ et $PM' = y$ soient les abscisses. Application du calcul différentiel à la théorie du contact des surfaces. FIG. 70.

Lorsque x varie seul, et devient $x + h$, on passe du point M au point m situé sur la section QMm, faite par un plan parallèle à celui des xz, et mené par le point M; le développement de l'ordonnée $m'm$ de cette section, sera donc la série

$$z + \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si c'est y qui se change en $y + k$, et que x demeure constant, on passera au point n situé sur la section PMn, faite par un plan parallèle à celui des yz, et mené encore par le point M; le développement de l'ordonnée $n'n$ de cette section, sera

$$z + \frac{dz}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Enfin, si l'on fait varier x et y en même temps, on passera du point M à un point quelconque N; et le développement de la nouvelle ordonnée $N'N$ s'obtiendra de deux manières différentes ; savoir, en substituant $y+k$, au lieu de y, dans le premier des développemens ci-dessus, ou bien $x+h$ dans le second. Par l'une de ces opérations on passera de l'ordonnée $m'm$ à l'ordonnée $N'N$, dans la section pmN; et par l'autre, on passera de $n'n$ à $N'N$, dans la section qnN. Les résultats sont rapportés dans les nos 26 et 27, où la lettre u désigne la fonction que je nomme ici z. L'identité de ces deux développemens, évidente par leur formation analytique, se montre encore par leur signification géométrique ; puisque les deux sections pmN et qnN sont sur la même surface, dans des plans qui se coupent, il faut nécessairement qu'elles se rencontrent au point N, situé sur l'intersection de ces plans, et que par conséquent l'ordonnée $N'N$ ait la même valeur dans les deux courbes : c'est là ce qu'expriment l'équation $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydx}$ et toutes celles qui en dérivent.

Ainsi donc quand x et y deviennent respectivement $x+h$ et $y+k$, l'ordonnée z se change en

$$\begin{aligned} N'N = z &+ \frac{1}{1}\left\{\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}k\right\} \\ &+ \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2z}{dx^2}h^2+2\frac{d^2z}{dxdy}hk+\frac{d^2z}{dy^2}k^2\right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Pour abréger, je représenterai cette série par

$$\begin{aligned} &z+ph+qk \\ &+\tfrac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2) \\ &+\text{etc.}, \end{aligned}$$

en posant

$$\frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dy}=q,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=r,\quad \frac{d^2z}{dxdy}=s,\quad \frac{d^2z}{dy^2}=t.$$

Il est aisé de voir que lorsqu'on cessera de regarder les accroissemens h et k comme des quantités indépendantes l'une de l'autre, et qu'on établira un rapport entre eux ; on fixera la direction du plan mené perpendiculairement à celui des xy, par les deux points M et N, puisque

$$\frac{k}{h}=\frac{N'm'}{M'm'}=\text{tang } N'M'm';$$

mais tant qu'on laissera ce rapport arbitraire, on pourra appliquer le développement ci-dessus à toutes les ordonnées qui environnent l'ordonnée primitive $M'M$.

314. Il suit des considérations précédentes et de ce qui a été dit dans le n° 74, que si $u = 0$ représente l'équation d'une surface courbe, les équations différentielles partielles

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dz}dz = 0, \quad \text{et} \quad \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

appartiendront respectivement aux sections QMm et PMn; la coordonnée y n'entrera dans la première que comme une constante arbitraire, qui détermine la position du plan coupant; il en sera de même de la coordonnée x dans la seconde. On ne doit pas confondre le dz de l'une de ces équations avec celui de l'autre, car ce ne sont que des différentielles partielles : la différentielle totale est

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

En employant la notation abrégée établie dans le n° précédent,

$$dz = pdx \quad \text{et} \quad dz = qdy$$

exprimeront l'équation différentielle de la section parallèle au plan des xz, et celle de la section parallèle au plan des yz.

Si l'on demandait celle de la section faite par un plan quelconque, $M'MNN'$, perpendiculaire au plan des xy, l'équation de ce plan, la même que celle de sa commune section $M'N'$, et qui serait de la forme

$$y = mx + \mu,$$

établirait une dépendance entre les coordonnées x et y; il ne serait plus permis de faire varier l'une sans l'autre, et z ne pourrait varier que d'une seule manière. Il faudrait alors employer la différentielle totale, qui serait

$$dz = pdx + qdy;$$

et, en observant que l'équation du plan coupant donne $dy = mdx$, il viendrait

$$dz = (p + mq)dx.$$

Cet exemple offre l'explication géométrique de ce qui se lit sur la page 243, relativement à l'emploi des différentielles totales : cet emploi, supposant toujours une dépendance, au moins virtuelle, entre les deux variables, indique la direction dans laquelle on passe d'un point à un autre sur la surface proposée ; car, quoiqu'il ne s'agisse ici que d'un plan perpendiculaire à celui des xy, l'expression de dz conserverait la même forme, quand on substituerait une courbe à la droite $M'N'$; seulement m ne serait plus une constante, mais la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente de cette courbe fait avec l'axe des x.

Il faudra se rappeler dans la suite, que, d'après la signification des lettres p, q et l'équation $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$, on doit avoir

$$\frac{dp}{dx}=r,\quad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=s,\quad \frac{dq}{dy}=t,$$

et par conséquent

$$dp=rdx+sdy,\qquad dq=sdx+tdy.$$

315. Ces préliminaires étant bien entendus, on concevra sans peine que si deux surfaces passent par un même point dont les coordonnées soient x, y, z, et qu'en changeant x en $x+h$, y en $y+k$, l'équation de la première surface donne pour la nouvelle ordonnée

$$z+ph+qk+\tfrac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2)+\text{etc.};$$

et l'équation de la seconde surface,

$$z+Ph+Qk+\tfrac{1}{2}(Rh^2+2Shk+Tk^2)+\text{etc.};$$

la distance de ces surfaces, mesurée dans le sens de leurs ordonnées, sera exprimée par

$$\begin{aligned}&(P-p)h+(Q-q)k\\&+\tfrac{1}{2}\{(R-r)h^2+2(S-s)hk+(T-t)k^2\}\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

Si l'on suppose maintenant que l'équation de la seconde surface renferme un certain nombre de constantes indéterminées, on pourra en disposer pour anéantir les premiers termes de cette distance, et en raisonnant dans le cas actuel, comme on l'a fait par rapport aux courbes, dans le n° 222, on se convaincra qu'une troisième surface pour laquelle ces termes ne disparaîtraient pas, passerait nécessairement en dehors des deux autres, dans tous les points qui environnent leur point commun, au moins tant qu'on prendra les quantités h et k assez petites pour que la somme des termes du premier ordre soit plus considérable que celle de tous ceux des ordres suivans (175).

Lorsqu'on aura

$$P-p=0, \quad Q-q=0,$$

les deux premières surfaces proposées auront un contact du premier ordre; il sera du second, si l'on a en même temps

$$R-r=0, \quad S-s=0, \quad T-t=0,$$

et ainsi de suite.

Cela posé, soit $V'=0$ une équation quelconque entre trois variables x', y', z', et un certain nombre de constantes arbitraires; on pourra, par la détermination de ces constantes, faire ensorte que la surface à laquelle appartient cette équation, ait avec une surface entièrement donnée, et dont je représenterai les coordonnées par x, y et z, un contact d'un ordre qui dépendra du nombre de ces mêmes constantes.

La première condition à remplir, c'est que les deux surfaces aient un point commun, c'est-à-dire qu'en changeant x' en x et y' en y, dans l'équation $V'=0$, on en tire

$$z'=z.$$

Exprimant ensuite les quantités

$$p, q, r, s, t, \text{ etc.}, \quad P, Q, R, S, T, \text{ etc.},$$

par les coefficiens différentiels des ordonnées z et z', suivant la convention établie dans le n° 513, les conditions posées ci-dessus pour un contact du premier ordre, deviendront

$$\frac{dz'}{dx'}=\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz'}{dy'}=\frac{dz}{dy}.$$

Celles qu'il faut y joindre pour établir un contact du second ordre, seront

$$\frac{d^2z'}{dx'^2}=\frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z'}{dx'dy'}=\frac{d^2z}{dxdy},\quad \frac{d^2z'}{dy'^2}=\frac{d^2z}{dy^2},$$

et ainsi de suite.

316. Supposons d'abord que la surface représentée par l'équation $V'=0$ soit plane ; son équation ne contenant au plus que trois constantes, elle ne pourra avoir en général qu'un contact du premier ordre avec une surface entièrement donnée. En prenant cette équation sous la forme

$$z'=Ax'+By'+D,$$

on a

$$\frac{dz'}{dx'}=A,\quad \frac{dz'}{dy'}=B,$$

d'où il résulte entre les constantes A, B, D et les coordonnées x, y et z, les relations suivantes :

$$z=Ax+By+D;$$

$$A=\frac{dz}{dx},\qquad B=\frac{dz}{dy};$$

retranchant l'expression de z de celle de z', et mettant pour A et B, leurs valeurs, le résultat

$$z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x)+\frac{dz}{dy}(y'-y)$$

sera l'équation du *plan tangent* à la surface donnée, au point dont les coordonnées sont x, y et z.

Cette équation sera

$$z'-z=p(x'-x)+q(y'-y),$$

en remettant p et q, au lieu de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$.

Pour en faire une application, je prendrai l'équation

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2,$$

appartenant à l'ellipsoïde (307). On en tire

$$\left.\begin{aligned}b^2c^2x+a^2b^2z\frac{dz}{dx}=0,\\ a^2c^2y+a^2b^2z\frac{dz}{dy}=0,\end{aligned}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{aligned}p&=-\frac{c^2x}{a^2z},\\ q&=-\frac{c^2y}{b^2z},\end{aligned}\right.$$

et substituant ces valeurs, il viendra

$$z' - z = -\frac{c^2x}{a^2z}(x'-x) - \frac{c^2y}{b^2z}(y'-y).$$

Réduisant au même dénominateur, on obtiendra un résultat qui, en vertu de l'équation proposée, se changera en

$$b^2c^2xx' + a^2c^2yy' + a^2b^2zz' = a^2b^2c^2.$$

Si le point de contact n'était pas donné sur la surface proposée, mais qu'on connût la position d'un point extérieur par lequel dût passer le plan tangent demandé; en nommant α, β, γ, les coordonnées de ce dernier point, comme elles devraient satisfaire à l'équation que l'on vient de trouver, on les mettrait à la place des variables x', y', z', et l'on aurait

$$b^2c^2\alpha x + a^2c^2\beta y + a^2b^2\gamma z = a^2b^2c^2.$$

Cette équation est celle d'un plan sur lequel doivent par conséquent se trouver tous les points de contact cherchés, dont il est aisé de voir que le nombre doit être infini; et comme ils sont aussi sur l'ellipsoïde proposé, leur lieu est l'intersection de cet ellipsoïde et du plan.

Les intersections du plan tangent avec deux des plans coordonnés, peuvent servir pour sa construction, comme la soutangente sert à celle de la tangente des courbes; et il est trop facile de les déterminer, pour qu'il soit besoin d'entrer dans aucun détail à cet égard.

317. La droite menée perpendiculairement au plan tangent, par le point où il touche la surface proposée, s'appelle la *normale*, et ses équations sont, d'après ce qui précède, et en vertu du nº 280,

$$x' - x + p(z'-z) = 0, \qquad y' - y + q(z'-z) = 0.$$

La distance du point pris sur la surface courbe, à un point quelconque de la normale, sera

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} = (z'-z)\sqrt{1+p^2+q^2},$$

d'après les équations ci-dessus; et si l'on fait $z'=0$, le résultat

$$-z\sqrt{1+p^2+q^2}$$

donnera la longueur de la partie de la normale, comprise entre la surface proposée et le plan des xy.

Si l'on cherchait à déterminer le maximum ou le minimum de l'expression $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$, en regardant x, y et z comme variables, ainsi qu'on l'a fait dans le n° 281, mais en les supposant liées par l'équation de la surface proposée, au lieu de l'être par celles d'un plan, on retomberait sur les équations de la normale, car cette ligne est la plus longue que l'on puisse mener de chacun de ses points à la surface proposée, du côté où cette surface est concave, et la plus courte du côté où elle est convexe.

En mettant pour p et q leurs valeurs relatives à l'ellipsoïde (316), il viendra

$$-z\sqrt{1+p^2+q^2}=-\frac{1}{a^2b^2}\sqrt{a^4b^4z^2+c^4b^4x^2+a^4c^4y^2};$$

et quand $a=b=c$, c'est-à-dire lorsque la surface proposée est une sphère ayant son centre à l'origine, et pour équation

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

l'expression précédente, se réduisant à $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$, indique, comme cela doit être, le rayon de la sphère.

318. On peut parvenir à l'équation du plan tangent par plusieurs autres considérations; une des plus simples est de le regarder comme passant
F. 70. par trois points infiniment proches, M, m et n, *fig.* 70, pris sur cette surface, et de déterminer son équation par les formules du n° 275. Pour appliquer ces formules, je supposerai que x, y et z désignent les coordonnées des points quelconques du plan cherché; alors

celles du point M seront x', y', z'; et suivant ce qui a été dit n° 314,
celles du point m seront $x'+dx'$, y', $z'+pdx'$;
celles du point n x', $y'+dy'$, $z'+qdy'$:

prenant les différences de ces neuf quantités, comme l'indique l'équation finale du n° 275, il viendra

$$pdx'dy'(x'-x)+qdx'dy'(y'-y)-dx'dy'(z'-z)=0,$$

et par conséquent

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

où l'on pourra restituer l'accent aux coordonnées particulières du plan, en l'ôtant à celles de la surface, qui entrent dans les fonctions p et q.

On pourrait croire que le plan tangent, déterminé comme on vient de le voir, ne touche la surface proposée que sur les sections Mm et Mn; mais en différentiant son équation par rapport aux coordonnées x', y' et z' qui lui sont propres, on trouvera

$$dz' = pdx' + qdy' :$$

ainsi, quand on prendra $dx' = dx$, $dy' = dy$, on aura

$$dz' = pdx + qdy = dz;$$

et par conséquent tous les points de la surface proposée, qui environnent immédiatement le point M, coïncident avec ceux du plan tangent, tant que l'on n'a égard qu'aux quantités du premier ordre.

Il suit de là, qu'un plan quelconque, mené par le point M, coupe la surface proposée dans une courbe qui a deux points communs avec le plan tangent, ou, ce qui est la même chose, a pour tangente l'intersection de ce plan avec le plan coupant.

319. C'est une question qui trouve quelquefois son application, que de déterminer parmi toutes les droites qui peuvent toucher la surface proposée au point M, celle dont l'inclinaison sur le plan des xy est la plus grande; et comme toutes ces droites sont comprises dans le plan tangent, on apperçoit aisément que celle qui fait le plus grand angle avec le plan des xy, est perpendiculaire à la commune section des deux plans; c'est la *ligne de plus grande pente* du plan tangent par rapport à celui des xy. Pour la déterminer, il suffit de remarquer que le premier de ces plans rencontre le second, suivant une ligne dont l'équation est

$$-z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

et revient à

$$y' - y = -\frac{p}{q}(x' - x) - \frac{z}{q};$$

l'on aura

$$y' - y = \frac{q}{p}(x' - x)$$

pour l'équation de la droite perpendiculaire à la précédente, et qui sera, sur le plan des xy, la projection de la ligne cherchée.

Lorsqu'on voudra passer du point M à son consécutif pris sur cette ligne, il faudra, suivant ce qu'on a vu au n° 314, établir entre dx et dy, la relation qui se trouve entre dx' et dy', d'après l'équation ci-dessus, et qui est $dy' = \frac{q}{p}dx'$: on aura donc

$$pdy - qdx = 0.$$

Cette équation, jointe à celle de la surface proposée, fera connaître la direction dans laquelle doivent se succéder les points consécutifs, pour descendre du point M jusqu'au plan des xy, par les arcs les plus inclinés, où la *ligne de plus grande pente*, qui conduit de ce point au plan des xy, ligne qui généralement sera courbe. Pour la déterminer, il faudrait tirer de l'équation $pdy - qdx = 0$, une relation entre x et y : on peut bien, au moyen de l'équation proposée, chasser les z contenus dans les fonctions p et q; mais le résultat ne sera encore qu'une équation différentielle entre les variables x et y, et pour remonter à l'équation primitive, il faudra le secours du *Calcul intégral*.

L'équation des lignes de *plus grande pente* s'obtient aussi sans employer la considération du plan tangent. En représentant par $dy = mdx$, l'équation différentielle de la projection $M'N'$ de l'une de ces lignes, on aura sur cette ligne, $dz = (p + mq)\,dx$; et $M'N'$ étant regardée comme la différentielle de son abscisse, dans le plan $M'N'NM$, l'inclinaison de sa tangente par rapport à $M'N'$ ou au plan des xy, aura pour tangente trigonométrique

$$\frac{dz}{M'N'} = \frac{(p+mq)\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{p+mq}{\sqrt{1+m^2}}:$$

on en cherchera le maximum, en regardant seulement m comme variable, puisque les quantités p et q se rapportent au premier point M, qui est supposé donné; et l'on trouvera

$$d\left(\frac{p+mq}{\sqrt{1+m^2}}\right) = \frac{(q-pm)\,dm}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où l'on déduira

$$q - pm = 0, \quad \text{ou} \quad qdx - pdy = 0.$$

Théorie de la courbure des surfaces.

520. Passons maintenant à la détermination des contacts que la sphère

peut avoir avec une surface quelconque : soient α, β, γ les coordonnées du centre de cette sphère, et δ son rayon ; elle aura pour équation

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=\delta^2.$$

Les conditions du contact du premier ordre déterminent trois des constantes qu'elle renferme ; car en désignant par x, y, z, les coordonnées de la surface donnée, et par $dz=pdx+qdy$, la différentielle de son ordonnée z, on doit avoir (315)

$$z'=z\,;\qquad \frac{dz'}{dx'}=p,\qquad \frac{dz'}{dy'}=q\,;$$

lorsqu'on change x' et y' en x et en y : on peut donc écrire x, y, z, p et q, au lieu de x', y', z', P et Q, tant dans l'équation de la sphère que dans ses deux différentielles partielles, qui donnent

$$\frac{dz'}{dx'}=-\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}=P\,;\qquad \frac{dz'}{dy'}=-\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}=Q,$$

et l'on formera par ce moyen les trois équations

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\delta^2 \qquad (1);$$
$$(x-\alpha)+p(z-\gamma)=0,\quad (y-\beta)+q(z-\gamma)=0 \qquad (2),$$

Les équations (2) qui, lorsqu'on y substitue x' au lieu de α, y' au lieu de β et z' au lieu de γ, deviennent les mêmes que celles de la normale (317), nous apprennent que toutes les sphères qui peuvent toucher la surface proposée, ont leur centre sur la normale menée par le point de contact ; et le nombre de ces sphères est infini, car il reste encore à déterminer une des quatre quantités α, β, γ et δ.

Cependant on ne peut pas établir un contact complet du second ordre entre la sphère et la surface proposée, puisque ce contact exige trois nouvelles conditions (315) ; mais si l'on suppose y dépendant de x, k dépendra de h, et le développement de la seconde valeur de z prendra la forme

$$z+\frac{1}{dx}dz\frac{h}{1}+\frac{1}{dx^2}d^2z\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.},$$

où il faut faire varier en même temps x, y et les différentielles de y dans celles de z (*voy.* page 243). En posant, pour abréger, $dy=mdx$, il viendra

$$dz=(p+qm)dx,\qquad d^2z=(dp+mdq+qdm)dx\,;$$

mettant pour $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$ leurs valeurs (314), et $m\mathrm{d}x$ pour $\mathrm{d}y$, puis formant les différentielles correspondantes de la seconde surface, on trouvera qu'en vertu des équations $p=P$, $q=Q$, la distance des deux surfaces, dans le sens de leurs ordonnées, se réduit à

$$\{(R-r)+2(S-s)m+(T-t)m^2\}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}:$$

les termes du second ordre de cette distance n'étant plus multipliés que par h^2, on peut les faire disparaître, au moyen d'une seule équation qui déterminera la quatrième constante.

Cela posé, en différentiant par rapport à x' et par rapport à y', les expressions de $\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}$ et de $\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}$, on obtiendra

$$R=-\frac{1}{z'-\gamma}+\frac{(x'-\alpha)}{(z'-\gamma)^2}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}=-\frac{1}{z'-\gamma}\left(1+\frac{\mathrm{d}z'^2}{\mathrm{d}x'^2}\right).$$
$$S=\frac{x'-\alpha}{(z'-\gamma)^2}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}=\frac{(y'-\beta)}{(z'-\gamma)^2}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}=-\frac{1}{z'-\gamma}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'},$$
$$T=-\frac{1}{z'-\gamma}+\frac{y'-\beta}{(z'-\gamma)^2}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}=-\frac{1}{z'-\gamma}\left(1+\frac{\mathrm{d}z'^2}{\mathrm{d}y'^2}\right).$$

Changeant x', y', z', en x, y, z, écrivant p et q au lieu de $\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}$ et $\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}$, et substituant dans le coefficient de h^2, on formera l'équation

$$\frac{(1+p^2)}{z-\gamma}+r+2\left(\frac{pq}{z-\gamma}+s\right)m+\left(\frac{1+q^2}{z-\gamma}+t\right)m^2=0 \quad (3).$$

Lorsqu'elle sera satisfaite ainsi que les précédentes, le contact de la sphère avec la surface proposée sera du second ordre, par rapport aux courbes tracées sur l'une et l'autre surface, de manière que si l'on abaisse de tous les points de ces courbes, des perpendiculaires sur le plan des xy, il en résulte une courbe pour laquelle $\mathrm{d}y=m\mathrm{d}x$.

On tire de l'équation (3)

$$z-\gamma=-\frac{(1+p^2)+2pqm+(1+q^2)m^2}{r+2sm+tm^2},$$

valeur que pour abréger, nous représenterons par M; et en la substituant dans les équations (2) et (1), on aura

$$z-\gamma=M,\quad y-\beta=-qM,\quad x-\alpha=-pM,$$
$$\delta=M\sqrt{1+p^2+q^2};$$

la sphère étant alors entièrement déterminée, sera osculatrice par rapport à la surface proposée, mais seulement sur les courbes indiquées.

La quantité m ne dépendant que de la position de la tangente de la courbe tracée sur le plan des xy, conserve la même valeur pour toutes les courbes qui passent par le point M' et s'y touchent; et cette tangente est la projection de la droite qui indique sur le plan tangent commun à la surface proposée et à la sphère, le sens dans lequel celle-ci est osculatrice. Il est facile de voir que cette droite est donnée par les deux équations

$$y'-y=m(x'-x),$$
$$z'-z=p(x'-x)+q(y'-y),$$

la dernière étant celle du plan tangent (316).

321. Parmi le nombre infini de valeurs que peut prendre, pour un même point de la surface proposée, l'expression de δ, lorsqu'on donne à m toutes les valeurs possibles, cherchons celles qui sont des maximums ou des minimums. Pour les trouver, nous aurons l'équation $\frac{d\delta}{dm}=0$, qui se réduit à $\frac{dM}{dm}=0$, puisque la quantité m n'entre dans δ que par le facteur M; mais en faisant disparaître le dénominateur de l'équation (3), d'où dépend la valeur de $z-\gamma$ ou M, on a

$$(r+2sm+tm^2)M+1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2=0 \quad (4);$$

différentiant par rapport à m, et faisant $\frac{dM}{dm}=0$, il vient

$$(s+tm)M+pq+(1+q^2)m=0 \quad (5),$$

d'où on tire

$$m=-\frac{pq+sM}{1+q^2+tM}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (4), il en résultera

$$(1+p^2+rM)(1+q^2+tM)^2-(pq+sM)^2(1+q^2+tM)=0;$$

supprimant le facteur commun $1+q^2+tM$, et développant, on aura

$$(rt-s^2)M^2+[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]M+1+p^2+q^2=0 \quad (6);$$

faisant pour abréger,

$$rt - s^2 = e, \quad (1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = f, \quad 1+p^2+q^2 = g^2;$$

et résolvant l'équation ci-dessus par rapport à M, on trouvera

$$M = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 4eg^2}}{2e}, \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{-fg \pm g\sqrt{f - 4eg^2}}{2e}.$$

Des deux valeurs de δ, l'une répond au maximum, et l'autre au minimum; et on formera l'équation d'où elles dépendent immédiatement, en substituant dans l'équation (6) la valeur de M, tirée de l'équation $\delta = M\sqrt{1+p^2+q^2}$, il viendra

$$(rt - s^2)\delta^2 + [(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r](1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\delta + (1+p^2+q^2)^2 = 0 \quad (7).$$

322. Pour connaître maintenant dans quel sens se fait l'osculation de chacune des sphères auxquelles appartiennent ces valeurs, il faut déterminer m, ce qui se fera en chassant M de l'équation (4), par le moyen de l'expression $M = -\frac{pq + (1+q^2)m}{s + tm}$; il vient alors, après les réductions, et en ordonnant par rapport à m,

$$[(1+q^2)s - pqt]m^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]m - [(1+p^2)s - pqr] = 0 \quad (8).$$

Un simple changement de coordonnées suffira pour mettre en évidence dans cette équation le rapport qu'ont entre elles, sur la surface proposée, les directions cherchées. Il est visible qu'on peut faire coïncider le plan des xy avec le plan tangent au point que l'on considère, et placer l'origine des coordonnées à ce point, sans pour cela déranger la position respective de la surface proposée et des sphères osculatrices; mais alors

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0,$$

et l'équation (8) devient

$$sm^2 + (r - t)m - s = 0, \quad \text{ou} \quad m^2 + \left(\frac{r-t}{s}\right)m - 1 = 0;$$

d'où il suit qu'en nommant m' et m'' ses racines, on a

$$m'm'' + 1 = 0.$$

Maintenant, si pour l'axe des z, qui coïncide à présent avec la normale MG, *fig.* 71, et par une ligne MN', située dans le plan des xy, FIG. 71.
et dont l'équation soit $y=mx$, on fait passer le plan GMN, on aura $dy=mdx$, dans tous les points de ce plan; l'osculation de la sphère avec la surface proposée aura donc lieu sur les courbes suivant lesquelles il les rencontre. Il suit de là que le grand cercle qui est son intersection avec la sphère, sera le cercle osculateur de son intersection avec la surface proposée; car s'il en était autrement, le cercle osculateur de cette dernière courbe ferait partie d'une sphère qui passerait entre la sphère osculatrice et la surface proposée.

On voit, par ce qui vient d'être dit, que l'expression générale de δ est aussi celle du rayon de courbure des sections que les plans menés par la normale font dans la surface proposée; et l'équation $m'm''+1=0$, montre que celle de ces sections qui a le plus grand rayon de courbure et celle qui a le plus petit se rencontrent à angle droit.

325. Le déplacement de l'origine donnant $x=0$, $y=0$, $z=0$, il en résulte

$$\gamma=\frac{1+m^2}{r+2sm+tm^2}, \quad \delta=-\gamma\,(320);$$

ainsi, pour trouver la valeur du rayon de courbure d'une section faite dans la surface proposée, par un plan quelconque mené par la normale, ou le nouvel axe des z, il suffirait de substituer au lieu de m, dans l'expresion de γ donnée ci-dessus, la tangente de l'angle que fait ce plan avec celui des xz. On obtiendrait le rayon de courbure de la section faite par ce dernier, en supposant $m=0$, ce qui donnerait $\gamma=\frac{1}{r}$. Si donc on connaissait d'ailleurs le rayon de courbure de cette section, on aurait par là la valeur du coefficient différentiel r, relatif au nouveau système de coordonnées. On déterminera sans plus de difficulté les deux coefficiens s et t, lorsqu'on connaîtra *à priori* les rayons de courbure de deux autres sections, faisant avec la première des angles donnés; et sans rien emprunter de l'équation de la surface proposée, on sera alors en état d'assigner le rayon de courbure d'une section faite par un plan quelconque mené par l'axe des z, pourvu qu'on ait l'angle que ce plan fait avec l'une des trois sections précédentes, circonstance qui mérite d'être remarquée.

Dans le changement de coordonnées que nous avons imaginé, en prenant la normale pour l'axe des z et le plan tangent pour le plan des xy, nous n'avons rien statué sur la direction des axes de ces dernières coordonnées; mais puisque les plans des cercles osculateurs du plus grand et du plus petit rayon sont perpendiculaires entre eux, nous pouvons supposer que le plan des xz passe par l'un de ces cercles, et que le plan des yz coïncide avec l'autre : prenons donc le plan $N'MG$ pour celui des xz, et le plan $n'MG$ pour celui des yz. Dans ce changement le coefficient différentiel s s'évanouit; car l'une des valeurs de m devient nulle, et l'autre infinie; et si on fait d'abord $m=0$, dans l'équation $m^2s+m(r-t)-s=0$, il en résultera $s=0$: en la mettant ensuite sous la forme $s+\frac{(r-t)}{m}-\frac{s}{m^2}=0$, on s'assurera que la supposition de m infinie donne encore $s=0$.

Dans cette hypothèse on aura pour une section faisant avec le plan des x et z un angle quelconque, $\delta=-\frac{1+m^2}{r+tm^2}$; alors nommant V cet angle dont m exprime la tangente, et mettant pour m sa valeur $\frac{\sin V}{\cos V}$, il viendra

$$\delta=-\frac{1}{r\cos V^2+t\sin V^2}.$$

On peut exprimer les quantités r et t au moyen du plus grand et du plus petit rayon de courbure, car on a pour le premier $V=0$, et pour le second $V=1^q$; en désignant l'un par δ', et l'autre par δ'', on trouvera

$$\delta'=-\frac{1}{r},\quad \delta''=-\frac{1}{t},\quad \text{d'où}\quad r=-\frac{1}{\delta'},\quad t=-\frac{1}{\delta''},$$

et
$$\delta=\frac{\delta'\delta''}{\delta''\cos V^2+\delta'\sin V^2}.$$

Il suit de là que le rayon de courbure d'une section quelconque, perpendiculaire au plan tangent, ne dépend que du plus grand et du moindre rayon de courbure, et de l'angle que fait le plan coupant avec ceux des sections auxquelles ces rayons se rapportent.

324. On exprime aussi très-simplement, avec les deux rayons de courbure d'une surface, celui d'une section faite par un plan quelconque dans cette surface. En désignant par t' et u', les coordonnées

prises dans le plan de la section, le rayon de courbure de cette courbe est exprimé par

$$\varepsilon = -\frac{(dt'^2 + du'^2)^{\frac{3}{2}}}{dt'd^2u'} = -\frac{(1+n^2)^{\frac{3}{2}}dt'}{dn} \text{ (227)},$$

si l'on fait $du' = ndt'$; et il ne s'agit plus que de transformer cette expression par les coefficiens différentiels de l'ordonnée de la surface : or on a (296)

$$x = t' \cos\psi - u' \cos\theta \sin\psi + \alpha,$$
$$y = t' \sin\psi + u' \cos\theta \cos\psi$$
$$z = u' \sin\theta;$$

on conclut de là

$$dx = dt' \cos\psi - du' \cos\theta \sin\psi,$$
$$dy = dt' \sin\psi + du' \cos\theta \cos\psi,$$
$$dz = du' \sin\theta;$$

mettant ces valeurs dans l'équation $dz = pdx + qdy$, il viendra

$$du' \sin\theta = p(dt' \cos\psi - du' \cos\theta \sin\psi) + q(dt' \sin\psi + du' \cos\theta \cos\psi),$$

d'où on tirera

$$\frac{du'}{dt'} = n = \frac{p\cos\psi + q\sin\psi}{\sin\theta + p\cos\theta\sin\psi - q\cos\theta\cos\psi},$$

$$dn = \frac{\left\{\begin{array}{l}(\sin\theta + p\cos\theta\sin\psi - q\cos\theta\cos\psi)(dp\cos\psi + dq\sin\psi)\\ -(p\cos\psi + q\sin\psi)(dp\cos\theta\sin\psi - dq\cos\theta\cos\psi)\end{array}\right\}}{(\sin\theta + p\cos\theta\sin\psi - q\cos\theta\cos\psi)^2}.$$

Il faudrait substituer dans la dernière de ces expressions, pour dp et dq, leurs valeurs

$$rdx + sdy, \quad sdx + tdy,$$

après avoir mis dans celles-ci celles de dx et de dy; mais on simplifie beaucoup le calcul, en supposant que le plan des xy soit tangent au point donné sur la section proposée, et que les axes des x et des y soient dans les plans des cercles osculateurs passant par ce point : comme on a alors $p=0$, $q=0$, $s=0$, il en résulte

$$n = 0, \quad dn = \frac{\sin\theta(dp\cos\psi + dq\sin\psi)}{\sin\theta^2},$$

$$dp = rdt'\cos\psi, \quad dq = tdt'\sin\psi,$$

et par conséquent

$$\varepsilon = -\frac{(1+n^2)^{\frac{3}{2}}dt'}{dn} = -\frac{\sin\theta}{r\cos\psi^2 + t\sin\psi^2},$$

ou bien

$$\varepsilon = \frac{\delta'\delta''\sin\theta}{\delta''\cos\psi^2 + \delta'\sin\psi^2},$$

puisque $r = -\frac{1}{\delta'}$, $t = -\frac{1}{\delta''}$ (323).

On remarquera sans doute que cette dernière expression est le produit du sinus de l'inclinaison du plan coupant sur le plan tangent, et du rayon de courbure de la section faite par un plan passant par la normale à la surface courbe et par l'intersection du plan tangent à cette surface et du plan coupant. C'est en partant de l'expression de ε, calculée pour des axes situés d'une manière quelconque, qu'Euler est parvenu à la détermination des deux rayons de courbure δ' et δ''; et l'expression particulière de ε, rapportée ci-dessus, est due à M. Meusnier, ainsi que plusieurs remarques importantes sur ce sujet.

325. Revenons maintenant au cas où la situation des plans coordonnés est quelconque, et voyons comment on peut trouver, à l'égard de ces plans, la position de ceux qui contiennent le plus grand et le plus petit cercle osculateur. Le moyen qui se présente le premier consiste à effectuer la transformation des coordonnées indiquée dans le n° 322, et à déterminer ensuite sur le plan tangent, devenu celui des abscisses, la direction des axes de ces dernières, par la condition que le coefficient différentiel s s'évanouisse; mais on peut résoudre la question d'une manière plus directe, en cherchant l'équation du plan d'un cercle osculateur, par la condition que $dy = m dx$ sur les intersections de ce plan avec la surface proposée et la sphère osculatrice. Son équation devra avoir lieu conjointement avec celles de ces surfaces, dans tous les points où il les rencontre; et comme il passe par le point qui leur est commun, et dont les coordonnées sont x, y, z, cette équation sera de la forme

$$A(x'-x) + B(y'-y) + C(z'-z) = 0.$$

En prenant les différentielles, et changeant dx', dy', dz' en dx, dy,

dz, on aura sur le plan,

$$Adx + Bdy + Cdz = 0;$$

et sur les deux surfaces courbes,

$$dz = pdx + qdy;$$

d'où éliminant dz, et mettant pour dy sa valeur mdx, il viendra

$$A + Cp + (B + Cq)m = 0 \qquad (a).$$

De plus, ce plan devant aussi passer par le centre de la sphère osculatrice, point dont les coordonnées sont α, β, γ, il faudra que

$$A(x - \alpha) + B(y - \beta) + C(z - \gamma) = 0;$$

les équations de la page 573, changeront cette dernière en

$$-Ap - Bq + C = 0 \qquad (b);$$

et par le moyen des équations (a) et (b), on obtiendra

$$\frac{A}{C} = \frac{m + pq + q^2m}{pm - q}, \quad \frac{B}{C} = -\frac{1 + p^2 + pqm}{pm - q}.$$

Il est à propos de remarquer que lorsqu'on aura déterminé la valeur de m, si on la substitue dans celles de $x - \alpha$, $y - \beta$ et $z - \gamma$, et qu'on joigne ces valeurs à l'équation de la surface proposée, on aura quatre équations dont on pourra éliminer les variables x, y et z, qui particularisent le point donné sur cette surface; le résultat ne contenant plus que α, β, γ, exprimera la relation que doivent avoir les coordonnées des centres des sphères osculatrices, indépendamment du point par lequel elles passent: ce sera donc l'équation de la surface qui est le lieu des centres de toutes ces sphères. Cette surface est en général composée de deux nappes, dont l'une contient le centre des sphères du plus grand rayon, et l'autre ceux des sphères du plus petit; mais quelquefois l'équation qui la détermine se décompose en deux facteurs rationnels, et représente dans ce cas deux surfaces distinctes.

326. La considération des normales consécutives, qui nous a conduits à l'expression du rayon de courbure des courbes (261), s'ap-

plique également aux surfaces; et elle répand un nouveau jour sur les propriétés particulières au plus grand et au plus petit rayon de courbure.

Dans les équations de la normale,

$$x' - x + p(z' - z) = 0 \qquad (a),$$
$$y' - y + q(z' - z) = 0 \qquad (b),$$

les quantités x, y, z, p et q, relatives au point que l'on considère sur la surface proposée, sont constantes pour la même normale, mais elles changent de valeur lorsqu'on passe à une seconde normale consécutive à la première; or ce passage peut se faire dans une infinité de directions, savoir, du point donné à chacun des points environnans : il faut donc, pour embrasser tous les cas possibles, faire varier en même temps x, y et z; et comme on ne cherche que le point d'intersection de la première normale avec la seconde, on regardera les coordonnées x', y' et z', affectées à ce point, comme constantes. En différentiant sous ce point de vue les équations (a) et (b), et en observant que

$$dz = pdx + qdy,$$
$$dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy \ (314),$$

on trouvera

$$-dx - p^2dx - pqdy + (z' - z)(rdx + sdy) = 0 \qquad (c)$$
$$-dy - q^2dy - pqdx + (z' - z)(sdx + tdy) = 0 \qquad (d).$$

Les équations (a) et (b) donnant les valeurs de $x' - x$ et de $y' - y$, lorsque celle de $z' - z$ sera connue, il faut, pour que la question proposée ait une solution, que les deux équations (c) et (d) s'accordent dans la détermination de cette dernière quantité. Le résultat qu'on obtiendra en éliminant $z' - z$, ne renfermera plus que la seule quantité $\frac{dy}{dx}$ qui ne soit pas donnée par la nature de la question, et dont il particularisera la valeur : cette quantité fait connaître la direction de la droite qui joint les projections des deux points consécutifs que l'on considère, ou, ce qui est la même chose, la quantité m, (320); il suit donc de là, que pour trouver deux normales qui se coupent, ou qui soient dans un même plan, on ne peut passer indistinctement d'un point à un autre sur la surface proposée.

Si on chasse d'abord $\frac{dy}{dx}$ des équations (c) et (d), on aura pour déterminer $z' - z$ une équation qui, en changeant z' en y, rentrera dans l'equation (6) du n° 321; et lorsqu'on éliminera $z' - z$ des mêmes équations, le résultat qui fera connaître $\frac{dy}{dx}$, sera le même que l'équation (8) qui donne les valeurs de m : le plus grand et le plus petit cercle osculateur auront donc leur centre à l'intersection des deux normales consécutives, caractère qui les distingue d'une manière bien remarquable de tous les autres cercles osculateurs, et qui fournit, comme on voit, un moyen facile pour les déterminer.

Je ferai remarquer qu'on peut obtenir sous une forme très-simple l'équation d'où dépend $\frac{dy}{dx}$, en mettant dans les équations (c) et (d) dz pour $pdx + qdy$, dp pour $rdx + sdy$, dq pour $sdx + tdy$; car après avoir éliminé $z' - z$, on trouvera alors

$$dp\,(dy + qdz) - dq\,(dx + pdz) = 0 \qquad (e).$$

527. La valeur de $\frac{dy}{dx}$, étant donnée en fonction de x, y et z, change pour chaque point de la surface proposée; la position du point M, *fig.* 70, FIG. 70.
détermine la direction dans laquelle on doit passer au second point N; de la position de ce dernier résulte une nouvelle direction sur laquelle se trouve le troisième, et ainsi de proche en proche. Chaque point de la surface proposée tient donc ainsi à une suite de points liés ensemble, par la condition que leurs normales se coupent deux à deux consécutivement. Ces points forment une courbe sur la surface proposée, et leurs projections en produisent, sur le plan des x et y, une autre dont $M'N'$ représente un petit côté, et dont par conséquent la tangente a pour équation

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

Ce que nous venons de dire pour une valeur de $\frac{dy}{dx}$, doit être appliqué en particulier à chacune des deux valeurs dont cette quantité est susceptible; on voit par là que le point M se trouve sur deux courbes qui se coupent à angle droit, et dont l'une répond aux plus grands rayons de courbure, et l'autre aux plus petits. Ces courbes sont appelées *lignes de courbure*.

Les intersections consécutives de la suite des normales, relative à une même ligne de courbure, formeront une sorte de développée de cette ligne. Je dis une sorte; car il y aura entre la développée dont il s'agit et celle qui a été considérée dans le n° 261, la différence, que cette dernière a tous ses points dans le plan même de la courbe à laquelle elle appartient, tandis que la première, toujours placée sur la surface des centres (325), n'aura pas tous ses points dans un même plan, lorsque ceux de la ligne de courbure n'y seront pas non plus. On observera encore que tous les rayons de courbure sont tangens à la surface des centres, et que ceux qui appartiennent à une même ligne de courbure, composent une surface courbe tangente à la précédente. Je reviendrai sur ces indications, en parlant de la génération des surfaces et des *courbes à double courbure*.

Nous prendrons, d'après M. Monge, l'ellipsoïde pour donner un exemple des lignes de courbure. L'équation de cette surface,

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2,$$

donne par la différentiation

$$p=-\frac{c^2x}{a^2z},\qquad q=-\frac{c^2y}{b^2z},$$

$$r=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2-y^2),\quad s=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}xy,\quad t=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2-x^2):$$

par ces valeurs, et en chassant z, l'équation (e) devient

$$\left.\begin{array}{l}a^2(b^2-c^2)xy\dfrac{dy^2}{dx^2}+\{b^2(a^2-c^2)x^2-a^2(b^2-c^2)y^2-a^2b^2(a^2-b^2)\}\dfrac{dy}{dx}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -b^2(a^2-c^2)xy\end{array}\right\}=0\ (e'),$$

et peut être mise sous la forme

$$Axy\frac{dy^2}{dx^2}+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0\qquad (e''),$$

en faisant

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A,\qquad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}=B.$$

Ne pouvant, sans le secours du calcul intégral qui sera le sujet du volume suivant, tirer parti de cette équation, je la particulariserai pour en montrer ici quelques propriétés. Je supposerai que l'ellipsoïde soit de révolution, parce que la génération de la surface indique alors quelles doivent être les lignes de courbure. On voit en effet que les normales qui sont consécutives sur une des positions de l'ellipse génératrice, doivent se rencontrer deux à deux, et que par conséquent cette ellipse est une des lignes de courbure de l'ellipsoïde. Si l'on observe ensuite que lorsqu'elle tourne, ses normales passent toujours par le même point de l'axe de rotation, on reconnaîtra que deux points situés sur la circonférence d'un cercle perpendiculaire à cet axe, ont nécessairement des normales qui se coupent, et que par conséquent ce cercle est la seconde ligne de courbure. Cela est évident par rapport aux points M, M' et M'', *fig.* 72, dont les normales sont MO, $M'O$ et $M''o$, l'axe de rotation étant AD, et la courbe génératrice DME. FIG. 72.

Dans l'hypothèse que je viens d'établir, on a $a = b$, d'où il résulte $A = 1$, $B = 0$, et par conséquent

$$xy\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(x^2 - y^2) - xy = 0.$$

Si on résout cette dernière équation par rapport au coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, on en obtiendra les deux valeurs rationnelles

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

La première appartient à une ligne droite passant par l'origine des coordonnées, puisqu'il en résulte que la tangente trigonométrique de l'inclinaison de cette ligne par rapport à l'axe des abscisses est égale au rapport des coordonnées, ce qui suppose que $\frac{y}{x} = m$; et quant à la seconde valeur, on voit qu'elle dérive de l'équation du cercle $x^2 + y^2 = n^2$. Ceci est bien d'accord avec les considérations géométriques; car l'ellipse DE a évidemment pour projection, sur le plan ABC des xy, la droite AE menée par l'origine A; et le cercle MM'', compris dans un plan MGM'' parallèle au plan ABC, est lui-même sa projection sur ce dernier. Les constantes m et n sont arbitraires, parce que les lignes de courbure sont susceptibles d'un nombre infini de positions ou de grandeurs différentes, que l'on détermine en assujétissant ces courbes à passer par le point donné. Les équations de leurs projections, dans cet exemple, si on représentait par α et β les abscisses du point M, deviendraient

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Ce n'est que parce que les variables x et y sont sorties du radical, que les lignes de courbure se trouvent distinctes, dans l'exemple actuel: quand les variables demeurent liées par l'irrationnalité, les lignes de courbure ne sont plus que les deux branches d'une courbe unique.

Dans la sphère, dont toutes les normales passent par le centre, les lignes de courbure ne sont autre chose qu'un grand cercle; et il y en a par conséquent un nombre infini pour chaque point : c'est aussi ce que montre l'équation (e'), que la supposition de $a=b=c$, rend identique, indépendamment des variables x et y et de leurs différentielles; d'où il suit que, dans quelque sens que l'on passe d'un point à un autre sur la surface de la sphère, les normales consécutives ne cessent point de se rencontrer deux à deux.

La recherche des intersections des normales consécutives des surfaces, n'est qu'un cas particulier du problème général, dans lequel il s'agit de trouver celles des lignes consécutives menées suivant une loi mathématique quelconque, par tous les points d'une surface donnée; et ce problème, qui comprend toute la théorie de la réfraction et de la réflexion des rayons lumineux par des surfaces quelconques, a été résolu très-élégamment par M. Malus. (*Voyez* le 14[e] *cahier du Journal de l'École Polytechnique*, et le tome II des *Mémoires présentés à l'Institut par des Savans étrangers*.)

328. Puisqu'un contact complet du second ordre emporte avec lui six conditions à remplir (315), il s'ensuit que l'équation de la surface touchante doit renfermer un pareil nombre de constantes arbitraires, et que par conséquent l'équation la plus simple qu'on puisse prendre pour cette surface, ne peut être que de la forme

$$z=A+2Bx+2Cy+Dx^2+2Exy+Fy^2.$$

Si l'on transportait l'origine au point de contact, en prenant le plan tangent pour celui des xy, comme on aurait alors

$$p=P=0, \quad q=Q=0 \ (322),$$

l'équation ci-dessus se réduirait à $z=Dx^2+2Exy+Fy^2$; et si l'on prenait pour plans des xz et des yz, ceux qui contiennent le plus grand et le plus petit cercle osculateur, on aurait $s=S=0$ (323), d'où $E=0$; il viendrait pour la surface touchante, cette équation très-simple

$z = Dx^2 + Fy^2$, qui appartient aux surfaces courbes du second ordre considérées dans le n° 309.

Il est évident que deux surfaces qui ont un contact complet du second ordre, ont à ce point la même courbure dans tous les sens. On peut prouver aussi que lorsque deux surfaces qui passent par un même point, ont leurs plus grands et leurs plus petits rayons de courbure respectivement égaux, elles ont entre elles un contact complet du second ordre; en effet, en les rapportant l'une et l'autre au plan tangent qui leur est commun et aux plans de leur plus grand et de leur plus petit cercle osculateur, leurs équations différentielles premières s'anéantissent, et leurs équations différentielles secondes deviendront

$$d^2z = rdx^2 + tdy^2, \quad d^2z = Rdx^2 + Tdy^2.$$

Les rayons de courbure δ^{v} et δ^{vi} (323), étant les mêmes pour l'une et pour l'autre, on en tirera

$$r = R, \quad \text{et} \quad t = T.$$

Il suit de là que la surface engendrée par la révolution du plus grand cercle osculateur MN, *fig.* 71, autour de la droite oH menée par le centre o du plus petit cercle osculateur, perpendiculairement à son plan, a un contact complet du second ordre avec la surface proposée, et qu'il en serait de même de celle que produirait la révolution du plus petit cercle osculateur Mn autour d'une droite menée par le centre O du plus grand et perpendiculairement à son plan. FIG. 71.

309. Pour suivre à l'égard des surfaces courbes la même marche que par rapport aux lignes courbes, il faudrait passer à la recherche de leurs *points singuliers*, et même de leurs *lignes singulières;* car il existe sur certaines surfaces des lignes qu'on pourrait appeler *lignes d'inflexion* ou de *rebroussement*, parce que le sens de la courbure de ces surfaces change, ou bien qu'elles retournent sur elles-mêmes, dans tous les points de ces lignes : mais le détail des variétés dont ces points et ces lignes sont susceptibles, sortirait des bornes que j'ai dû me prescrire, et serait plus curieux qu'utile : on a d'ailleurs dans ce qui précède, tous les élémens nécessaires pour cette recherche.

La détermination des limites des surfaces courbes se tire de la considération du plan tangent, comme celle des limites des courbes se déduit de leurs tangentes.

Les maximums et les minimums s'obtiennent en faisant simultanément $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$, ce qui rend le plan tangent parallèle au plan des xy.

En cherchant la forme de la surface qui répond à l'équation

$$z=b-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}},$$

on reconnaîtra sans peine que le point qui répond à $x=0$, $y=0$ et $z=b$, est une espèce de bec ou rebroussement au-delà duquel la surface ne s'étend pas, et qu'elle y est touchée intérieurement dans tous les sens par l'axe des z : cela servira à expliquer la remarque analytique faite au n° 167, sur une équation de la même forme.

Les changemens de courbure sont indiqués en général par le changement de signe des rayons de ces courbures ; et il faut remarquer à ce sujet que, dans leur état ordinaire, les surfaces se partagent en diverses classes, à raison de la duplicité de leur courbure. Il peut arriver que les deux courbures soient tournées dans le même sens, comme dans l'ellipsoïde, ou bien dans des sens différens, comme dans l'hyperboloïde à une nappe et dans toutes les surfaces qui présentent des gorges, ou enfin qu'une des courbures soit nulle, comme dans le cylindre ou dans le cône. Cette dernière circonstance a lieu toutes les fois que l'équation (7), page 576, se réduit au premier degré par l'évanouissement de la quantité $rt-s^2$, ce qui peut avoir lieu non-seulement pour des valeurs particulières des coordonnées, mais pour toute la surface, puisque l'équation $rt-s^2=0$, étant différentielle partielle, répond à une infinité d'équations primitives distinctes (78) : nous verrons bientôt que ces équations appartiennent à une classe de surfaces douées de propriétés remarquables, qui se présenteront dans les divers modes de génération de surfaces dont nous allons nous occuper.

De la génération des surfaces.

530. Commençons par chercher l'équation d'une surface formée par les intersections successives d'une infinité d'autres d'une nature donnée, c'est-à-dire, déduites d'une même équation générale, renfermant une constante arbitraire m qui prend successivement toutes les valeurs possibles. Il est évident que deux de ces surfaces, résultant de valeurs de m très-peu différentes seront nécessairement très-voisines l'une de l'autre, et pourront se couper suivant une ligne; en imaginant une suite de surfaces qui se suc-

cèdent ainsi de proche en proche, d'après une certaine loi, leurs intersections successives, en se resserrant de plus en plus, détermineront un espace dont la surface que nous cherchons sera la *limite* : c'est sous ce nom que nous la désignerons désormais.

Prenons pour les surfaces génératrices une suite de plans, passant tous par le même point; les équations de ces plans ne pourront être que de la forme

$$A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=0,$$

et la position particulière de chacun d'eux ne dépendra que des rapports $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ que, pour abréger, nous représenterons par m et n. Cela posé, concevons que ces deux quantités soient liées entre elles, ensorte qu'on ait $m=\mathrm{f}(n)$, la caractéristique f désignant une fonction donnée; l'équation précédente deviendra

$$\mathrm{f}(n)\,(x-\alpha)+n(y-\beta)+(z-\gamma)=0\ldots\ldots(1);$$

et pour passer d'un plan à celui qui le suit immédiatement, il faudra faire varier la quantité n seule, puisque les coordonnées x, y et z, étant affectées aux points de la droite suivant laquelle se coupent les deux plans proposés, sont communes à l'un et à l'autre : cette considération donnera

$$\mathrm{f}'(n)\,(x-\alpha)+(y-\beta)=0\ldots\ldots(2),$$

en faisant $\mathrm{d}\mathrm{f}(n)=\mathrm{f}'(n)\,\mathrm{d}n$, et divisant par $\mathrm{d}n$. Il est d'abord évident que quand la fonction $\mathrm{f}(n)$ sera connue, on éliminera n entre cette équation et la précédente, et il en résultera celle de la surface cherchée ; mais je ferai remarquer de plus que l'élimination peut encore avoir lieu en laissant la fonction f indéterminée. En effet, puisqu'on peut tirer de l'équation (2), $\mathrm{f}'(n)=-\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, on en doit conclure que la quantité n est une fonction de la quantité $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, fonction qu'on désignera dans son état indéterminé, par la caractéristique ψ, et on aura

$$n=\psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right).$$

Substituant cette expression dans l'équation (1), il viendra

$$(x-\alpha)\,\mathrm{f}\left[\psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)\right]+(y-\beta)\,\psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)+z-\gamma=0.$$

En donnant à ce résultat la forme

$$-f\left[\psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)\right]-\frac{y-\beta}{x-\alpha}\psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)=\frac{z-\gamma}{x-\alpha},$$

il est facile de voir que le premier membre est une fonction de $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$; on peut donc le représenter par $\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$, et il viendra

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right).$$

Telle est la forme de l'équation générale des surfaces qui sont les limites d'une infinité de plans passant tous par le point dont les coordonnées sont α, β et γ, et se succédant d'ailleurs suivant une loi quelconque. Cette génération comprend toutes les surfaces coniques; car les intersections des plans consécutifs seront des droites menées par le point commun à ces plans.

Le procédé que j'ai indiqué dans le n° 305, pour reconnaître une surface conique, conduit au même résultat; car par ce procédé il faut d'abord transporter l'origine au centre de la surface (312), en substituant $x'+\alpha$, $y'+\beta$, $z'+\gamma$, au lieu de x, y, z; et qu'une détermination des quantités α, β, γ, puisse faire disparaître le terme constant et rendre homogène le résultat, par rapport à x', y', z'. Si on y fait alors $z'=mx'$ et $y'=nx'$, il se réduira à une fonction de m et de n, et pourra être représenté par $f(m, n)=0$; mais à cause de $x'=x-\alpha$, $y'=y-\beta$, $z'=z-\gamma$, on aura

$$m=\frac{z-\gamma}{x-\alpha},\ n=\frac{y-\beta}{x-\alpha},\ \text{et par conséquent } f\left(\frac{z-\gamma}{x-\alpha},\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)=0.$$

Les deux quantités $\frac{z-\gamma}{x-\alpha}$ et $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, étant donc liées par une même équation, on en peut conclure, comme ci-dessus, que l'une est une fonction de l'autre.

Il ne paraît pas d'abord qu'on puisse tirer parti de l'équation

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$$

pour reconnaître si une équation proposée appartient ou non à une surface conique; mais en éliminant la fonction indéterminée φ par le procédé indiqué n° 77, et faisant toujours pour abréger $dz=pdx+qdy$, on trouvera

$$z-\gamma=p(x-\alpha)+q(y-\beta).$$

Ce résultat exprime la relation qui doit exister entre l'ordonnée z, ses coefficiens différentiels et les abscisses x et y, pour toutes les surfaces coniques; et il servira à reconnaître l'équation d'une surface de cette *famille*, comme l'équation obtenue dans le n° cité, sert à reconnaître les fonctions de $ax+by$.

331. La fonction inconnue ou arbitraire φ se détermine par les conditions qui particularisent la surface proposée; l'une des plus simples consiste à supposer que cette surface passe par une courbe donnée. Soient $\mathrm{F}(x,y,z)=0$, et $\mathrm{f}(x,y,z)=0$, les équations de deux surfaces qui contiennent la courbe dont il s'agit; il faudra que dans chaque point de cette courbe, les trois équations suivantes :

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right),\quad \mathrm{F}(x,y,z)=0,\quad \mathrm{f}(x,y,z)=0,$$

aient lieu à-la-fois.

Faisons $\frac{y-\beta}{x-\alpha}=t$, il viendra $\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\varphi(t)$; concevons ensuite qu'on ait éliminé x, y et z entre ces deux dernières équations et les équations $\mathrm{F}(x,y,z)=0$, $\mathrm{f}(x,y,z)=0$, il restera nécessairement une équation entre t et $\varphi(t)$, que nous représenterons par $f[t,\varphi(t)]=0$; remettant pour t et $\varphi(t)$ les quantités qu'ils expriment, nous aurons l'équation de la surface conique cherchée.

On peut encore se proposer de déterminer le cône circonscrit à une surface donnée. Dans ce cas, il faut chercher d'abord les équations de la courbe suivant laquelle le cône doit toucher cette surface; et il est facile de voir que cela revient à trouver le lieu des points où elle est touchée par une suite de plans menés par le sommet du cône, question que nous avons déjà résolue pour les surfaces comprises dans l'équation

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2 \ (316),$$

par un procédé qui s'étend à une surface quelconque. Il ne s'agit en effet que de combiner avec l'équation de la surface donnée, celle du plan tangent mise sous la forme $z-\gamma=p(x-\alpha)+q(y-\beta)$; ayant alors les équations de deux surfaces qui contiennent la courbe par laquelle doit passer le cône cherché, on se débarrassera de la fonction arbitraire comme précédemment. Dans l'exemple cité, la courbe qui est le lieu de tous les contacts, n'est que du second degré, puisqu'elle est représentée par les équations

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$
$$b^2c^2\alpha x + a^2c^2\beta y + a^2b^2\gamma z = a^2b^2c^2.$$

Combinant cette dernière avec $\frac{y-\beta}{x-\alpha} = t$ et $\frac{z-\gamma}{x-\alpha} = \varphi(t)$, on réduira la première à ne contenir que t et $\varphi(t)$, et si on remet ensuite pour ces quantités, leur valeur, il en résultera l'équation du cône demandé.

Il est à propos de remarquer qu'on a dans ce qui précède, les moyens de résoudre analytiquement les problèmes principaux de la perspective et de la théorie des ombres, en supposant pour cette dernière que le corps lumineux soit réduit à un point (*Complément des Élém. de Géom.*)

532. Les surfaces cylindriques peuvent être regardées comme produites par les intersections successives d'une suite de plans menés suivant une certaine loi, perpendiculairement à un plan donné. Soit $ax+by+cz=0$, l'équation de ce dernier plan, et $Ax+By+Cz+1=0$, celle de l'un quelconque des premiers; on aura d'abord

$$Aa + Bb + Cc = 0 \; (285);$$

et faisant $\frac{A}{C} = m$, $\frac{B}{C} = n$, il viendra $n = -\frac{c+am}{b}$; mettant ensuite l'équation $Ax + By + Cz + 1 = 0$, sous la forme

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + z + \frac{1}{C} = 0;$$

il en résultera

$$m(bx - ay) + bz - cy + \frac{b}{C} = 0.$$

La position du plan représenté par cette équation, ne dépend plus que des deux quantités m et $\frac{b}{C}$; et en supposant que la seconde soit une fonction de la première, nous aurons

$$m(bx - ay) + bz - cy + f(m) = 0 \ldots\ldots. (1).$$

Passant ensuite au plan consécutif, en différentiant par rapport à m.

seule, nous obtiendrons

$$bx - ay + f'(m) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Quand la forme de la fonction f sera donnée, on éliminera m entre ces deux équations; mais en raisonnant comme dans le n° précédent, on trouvera $m = \psi(bx - ay)$, d'où

$$(bx - ay)\psi(bx - ay) + f[\psi(bx - ay)] + bz - cy = 0;$$

et on conclura de là que l'équation générale des surfaces cylindriques, sera de la forme $bz - cy = \varphi(bx - ay)$.

En éliminant la fonction arbitraire φ, il viendra $ap + bq - c = 0$. On déterminerait la fonction arbitraire, comme pour les surfaces coniques.

333. Concevons une suite de sphères ayant leur centre sur une même ligne droite; chacune d'elles coupera celle qui lui est consécutive dans un cercle, dont le plan sera perpendiculaire à la ligne qui joint tous les centres; l'assemblage des intersections de ces sphères prises deux à deux consécutivement, formera donc une surface qui, étant coupée par un plan perpendiculaire à la droite proposée, donnera toujours un cercle, et sera par conséquent produite par la révolution d'une certaine courbe autour de cette droite.

Pour exprimer analytiquement cette génération, nous représenterons par

$$x' = az' + \alpha,\quad y' = bz' + \beta,$$

les équations de l'axe de rotation; celle des sphères dont le centre se trouve sur cet axe, sera

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = n^2,$$

et pour la particulariser, il suffira de connaître une des coordonnées de son centre. Faisons $z' = m$; il viendra, en vertu des équations de l'axe de révolution,

$$x' = am + \alpha,\quad y' = bm + \beta;$$

substituant ces valeurs dans l'équation de la sphère, il sera facile de lui donner la forme

$$\left.\begin{matrix}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2-2m[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z] \\ +a^2m^2+b^2m^2+m^2\end{matrix}\right\}=n^2.$$

Supposant ensuite que la grandeur du rayon de chaque sphère dépende de la situation de son centre, on pourra faire

$$a^2m^2+b^2m^2+m^2-n^2=\mathrm{f}(m);$$

et l'équation ci-dessus se changera en

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2-2m[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z]+\mathrm{f}(m)=0 \quad (1).$$

En passant à la sphère consécutive, on aura

$$-2[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z]+\mathrm{f}'(m)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Si la fonction $\mathrm{f}(m)$ n'est pas déterminée, on tirera de cette dernière équation

$$m=\psi[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z];$$

et en substituant cette expression dans l'équation (1), il viendra

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=\varphi[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+z].$$

Si l'axe de rotation passait par l'origine des coordonnées, on aurait $\alpha=0$, $\beta=0$, ce qui réduirait l'équation ci-dessus à

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+z);$$

et si cet axe coïncidait avec celui des z, comme on aurait de plus $a=0$, $b=0$, il viendrait

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(z), \quad \text{ou} \quad z=\pi(x^2+y^2).$$

En éliminant la fonction arbitraire de l'équation générale, on obtiendra

$$(x-\alpha)(b+q)-(y-\beta)(a+p)+z(bp-aq)=0,$$

équation de condition, au moyen de laquelle on reconnaîtra si une surface proposée est de révolution ou non, et quelle est, dans le premier cas, la position de son axe: menant ensuite un plan quelconque par cette droite, on aura la courbe génératrice.

Dans les trois *familles* de surfaces dont nous venons de déterminer les équations générales, l'élimination de la quantité m a pu se faire ; il n'en sera pas de même dans la question suivante, qui renferme les particularités les plus importantes de la Théorie que nous exposons maintenant, et dont les résultats jetteront le plus grand jour sur une des principales branches du Calcul intégral.

334. Soit proposé de trouver l'équation générale des surfaces courbes formées par les intersections successives d'une suite de sphères décrites du même rayon, et dont tous les centres sont situés dans le plan des xy, sur une courbe donnée. Ces surfaces sont un cas particulier des *surfaces annulaires* (*Compl. des Élém. de Géom.*), que nous considérerons plus bas dans toute leur étendue. En nommant x' et y' les coordonnées de la courbe donnée, et a le rayon de toutes les sphères, l'équation générale de ces surfaces sera

$$(x-x')^2+(y-y')^2+z^2=a^2.$$

Si on considère en particulier celle pour laquelle on a $x'=m, y'=n$, et qu'on représente par $n=\varphi(m)$, la relation qui doit exister entre m et n, en vertu de l'équation de la courbe des centres, on aura pour une sphère et sa consécutive

$$[x-m]^2+[y-\varphi(m)]^2+z^2=a^2 \dots (1),$$
$$[x-m]+[y-\varphi(m)]\varphi'(m)=0. \dots (2).$$

L'équation (2) contenant la quantité m engagée dans diverses fonctions, et combinée avec les variables x et y, ne peut plus donner immédiatement cette quantité comme dans les exemples précédens. Tout ce qu'on peut obtenir, tant que la forme de la fonction φ reste indéterminée, c'est une équation entre les variables x, y, z et les coefficiens différentiels p et q. Pour y parvenir, on différentiera la première équation par rapport à x et par rapport à y successivement, et en regardant m comme constante ; car il est aisé de voir qu'en vertu de l'équation (2), tous les termes résultant de la variation de m, soit par rapport à x, soit par rapport à y, seront nuls. D'après cette observation, on trouvera

$$x-m+zp=0, \qquad y-\varphi(m)+zq=0.$$

Mettant dans l'équation (1), pour $x-m$ et $y-\varphi(m)$, les valeurs que donnent ces dernières équations, il viendra

$$(1 + p^2 + q^2) z^2 = a^2;$$

ce qui montre que dans toutes les surfaces cherchées la longueur de la normale, prise à l'égard du plan des xy, est constante (317), résultat qu'on pouvait prévoir d'ailleurs d'après leur génération. En effet, on verra bientôt, avec un peu d'attention, que l'une quelconque de ces surfaces peut être envisagée comme composée d'une infinité de zônes infiniment étroites, prises sur chacune des sphères qui concourent à sa formation, zônes qui sont déterminées sur cette sphère par ses intersections avec celle qui la précède et celle qui la suit; chacune de ces zônes jouissant de la propriété de la sphère, leur limite, ou la surface cherchée, en jouira par conséquent aussi.

Le problème actuel est parfaitement analogue à celui où il s'agit de déterminer une courbe qui touche tous les cercles décrits d'un même rayon sur les différens points d'une courbe donnée (262). Les zônes que nous venons de faire remarquer ici, sont remplacées, dans l'article cité, par les petits arcs compris sur chaque cercle entre ses intersections avec celui qui le précède et avec celui qui le suit; la courbe cherchée ne touche le cercle que dans un point; mais la surface a sur chaque sphère un contact dans toute la circonférence d'un cercle. En effet, tant que la quantité m sera regardée comme constante, les coefficiens différentiels p et q auront, pour la sphère représentée par l'équation (1), la même valeur que pour la surface cherchée; mais l'équation (2), qui exprime cette condition, peut être considérée comme celle d'un plan élevé par le centre de la sphère perpendiculairement à celui des xy; et sa combinaison avec l'équation (1) donnera le grand cercle dont la circonférence contient tous les points de contact. Ce plan est aussi perpendiculaire à la courbe qui contient les centres des sphères génératrices; car l'équation (2) est évidemment celle de la normale à la courbe dont les coordonnées sont m et $\varphi(m)$.

Les exemples des articles précédens sont susceptibles des mêmes remarques, et la surface limite touchera chacune des surfaces génératrices, suivant la ligne exprimée par l'ensemble des équations que nous avons désignées par (1) et (2). Le cône et le cylindre toucheront leurs plans générateurs dans toute l'étendue d'une ligne droite; la surface de révolution touchera ses sphères génératrices suivant un cercle.

335. Soit en général $V=0$, une équation entre x, y et z et une constante arbitraire m; en passant de l'une des surfaces que représente cette équation, à celle qui lui est consécutive, on aura pour les points communs à toutes deux, $\frac{dV}{dm}=0$. Le résultat de l'élimination de m entre cette équation et la précédente, appartiendra à la surface formée par les intersections successives des surfaces comprises dans l'équation $V=0$. Lorsqu'on donnera à m une valeur particulière, le système des deux équations $V=0$ et $\frac{dV}{dm}=0$, exprimera la ligne suivant laquelle la surface génératrice qui répond à cette valeur, est touchée par la surface limite.

Cette dernière proposition peut se prouver analytiquement, sans recourir à la considération des intersections successives des surfaces génératrices; car si on différentie l'équation $V=0$, par rapport à x et à y, en n'y regardant plus m comme une constante, mais comme une fonction de ces variables, on trouvera

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dm}\frac{dm}{dx}+\frac{dV}{dz}p=0,$$
$$\frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dm}\frac{dm}{dy}+\frac{dV}{dz}q=0,$$

équations qui, lorsqu'on aura $\frac{dV}{dm}=0$, se réduiront à

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dz}p=0, \qquad \frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dz}q=0,$$

et qui par conséquent seront encore satisfaites par l'équation $V=0$, lorsqu'on n'y regardera plus m comme une constante, pourvu qu'on ait égard à la relation qu'établit entre les variables x, y et z, l'équation $\frac{dV}{dm}=0$. Il suit de là que l'équation résultante donnera encore la même valeur de l'ordonnée z et de ses coefficiens différentiels pour toutes les valeurs de x et de y, qui auront entre elles la relation établie par l'équation $\frac{dV}{dm}=0$; la surface exprimée par la première, touchera donc celles que représente $V=0$, sur toute la ligne donnée par le système d'équations $V=0$ et $\frac{dV}{dm}=0$ (315).

336. Les courbes suivant lesquelles se coupent deux surfaces génératrices consécutives, ont été nommées par M. Monge, *les caractéristiques* de la surface limite, parce qu'en effet elles impriment à cette surface un caractère indépendant des conditions auxquelles elle peut être assujétie : quelle que soit la courbe des centres dans l'exemple du n° 334, les caractéristiques n'en seront pas moins des cercles.

Chacune des surfaces génératrices contient deux caractéristiques qui pourront en général se couper : leur point de rencontre se trouvera en même temps sur trois surfaces génératrices consécutives, ensorte que ses coordonnées demeureront constantes, quoique la quantité m ait varié deux fois ; on aura donc en même temps, pour ce point,

$$V=0, \quad \frac{dV}{dm}=0, \quad \frac{d^2V}{dm^2}=0.$$

Lorsqu'on donnera à m une valeur particulière, ces équations détermineront les trois coordonnées du point de rencontre des deux caractéristiques situées sur la surface génératrice qui répond à cette valeur ; mais si on élimine m, il ne restera que deux équations, qui appartiendront à la courbe formée par l'ensemble des points de rencontre des caractéristiques prises deux à deux consécutivement. Cette courbe ayant un de ses petits côtés sur chacune des caractéristiques, les touchera toutes, et sera à leur égard, ce qu'est la surface limite par rapport aux surfaces génératrices.

Dans l'exemple du n° 334, si on fait $\frac{d\varphi'(m)}{dm}=\varphi''(m)$, on aura pour la courbe dont on vient de parler, les trois équations suivantes

$$\begin{aligned}
&[x-m]^2+[y-\varphi(m)]^2+z^2=a^2 && (1),\\
&x-m+[y-\varphi(m)]\varphi'(m)=0 && (2),\\
&-1-\varphi'(m)^2+[y-\varphi(m)]\varphi''(m)=0 && (3),
\end{aligned}$$

qui doivent se réduire à deux, lorsqu'on aura assigné une forme particulière à la fonction $\varphi(m)$, parce qu'il sera possible alors d'éliminer la quantité m ; le résultat, composé de deux équations, ne renfermant plus que les variables x, y, z, indiquera deux surfaces courbes contenant en même temps la courbe cherchée, qui sera par conséquent leur intersection.

Dans l'état général de la fonction $\varphi(m)$, on ne saurait déduire des équations ci-dessus, qu'une équation différentielle à trois variables, qui exprime une propriété commune à toutes les courbes formées par les intersections successives des caractéristiques des surfaces de la famille à laquelle appartiennent les équations (1) et (2). Pour parvenir à cette équation différentielle, il faut différentier les équations (1) et (2), en y regardant m comme constante, ce qui est permis par les équations (2) et (3), puisqu'en nommant $V=0$ l'équation (1), elles ne sont autre chose que $\frac{dV}{dm}=0$, $\frac{d^2V}{dm^2}=0$. En opérant ainsi, on obtient

$$(x-m)\,dx+[y-\varphi(m)]\,dy+z\,dz=0 \qquad (4),$$

$$dx+dy\,\varphi'(m)=0 \qquad (5);$$

et si on détermine $\varphi'(m)$, $y-\varphi(m)$ et $x-m$, par les équations (5), (4) et (2), on trouvera

$$\varphi'(m)=\frac{-dx}{dy},\quad x-m=\frac{-z\,dz\,dx}{dx^2+dy^2},\quad y-\varphi(m)=\frac{-z\,dz\,dy}{dx^2+dy^2};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), il viendra

$$z^2(dx^2+dy^2+dz^2)=a^2(dx^2+dy^2),$$

équation dont on trouvera plus loin la signification géométrique.

337. Chacun des cas particuliers des surfaces limites ne touche que la suite des surfaces génératrices qui correspondent à une même forme de la fonction φ dans l'équation $V=0$; les diverses formes que cette fonction peut prendre, donnent lieu à une suite de surfaces limites qui peuvent être touchées quelquefois par une surface unique, laquelle touche par conséquent toutes les surfaces particulières qu'on déduirait de l'équation $V=0$, en donnant à m et à la fonction φ, toutes les valeurs et toutes les formes possibles. C'est la relation établie entre m et $\varphi(m)$, qui particularise la loi d'après laquelle les surfaces génératrices se succèdent les unes aux autres; et puisque pour passer de l'une d'elles à sa consécutive, on a fait varier m, il est évident que pour passer de l'une des surfaces limites à sa consécutive, il faudra faire varier $\varphi(m)$ indépendamment de m; car c'est là le seul moyen d'exprimer que la fonction φ a changé. On aura donc, en représentant par n la quantité $\varphi(m)$, $\frac{dV}{dn}=0$, pour tous les points de l'intersection de

deux surfaces limites consécutives: il faudra joindre cette équation avec $V=0$ et $\frac{dV}{dm}=0$; et en observant que cette dernière, dans laquelle on a fait varier $\varphi(m)$ en même temps que m, peut être mise sous la forme

$$\frac{dV}{dm}+\frac{dV}{dn}\,\frac{dn}{dm}=0,$$

on voit qu'il en résultera les trois équations

$$V=0,\quad \frac{dV}{dm}=0,\quad \frac{dV}{dn}=0,$$

qui serviront à éliminer m et n.

Les considérations purement analytiques auraient conduit au même résultat; car, en différentiant l'équation $V=0$, en y regardant m et n comme des fonctions de x et de y, on trouve

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dm}\,\frac{dm}{dx}+\frac{dV}{dn}\,\frac{dn}{dx}+\frac{dV}{dz}p=0,$$

$$\frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dm}\,\frac{dm}{dy}+\frac{dV}{dn}\,\frac{dn}{dy}+\frac{dV}{dz}q=0;$$

faisant $\frac{dV}{dm}=0$, $\frac{dV}{dn}=0$, et raisonnant comme dans le n° 335, on s'assurera que la surface représentée par l'équation résultante de l'élimination de m et de n, entre les équations $V=0$, $\frac{dV}{dm}=0$, $\frac{dV}{dn}=0$, doit toucher chacune de celles que donne l'équation $V=0$, quand m et n sont indépendantes.

En faisant $\varphi(m)=n$ dans l'exemple du n° 334, on trouve $\frac{dV}{dm}=x-m$, $\frac{dV}{dn}=y-n$, et par conséquent $m=x$, $n=y$; substituant dans l'équation $V=0$, ou $(x-m)^2+(y-n)^2+z^2=a^2$, il vient $z=\pm a$.

Cette équation indique deux plans parallèles à celui des xy, et qui en sont éloignés de la quantité a, l'un au-dessus, l'autre au-dessous, solution qui pouvait se prévoir facilement; car il est visible que toutes les sphères ayant leur centre sur le plan des xy, et décrites du même rayon, seront touchées par deux plans parallèles à celui-là.

338. Il reste à déterminer la fonction φ, pour que la surface limite

satisfasse à quelque condition particulière : nous supposerons d'abord que toutes les surfaces génératrices doivent toucher une même surface donnée, dont l'équation soit représentée par $F(x, y, z) = 0$, et dans laquelle les coefficiens différentiels de l'ordonnée z soient désignés par P et Q. Au point de contact de cette dernière, avec l'une quelconque des surfaces génératrices, les équations

$$V = 0, \quad F(x, y, z) = 0, \quad P = p, \quad Q = q;$$

auront lieu en même temps ; on en pourra donc chasser les coordonnées x, y et z, et il restera une équation entre m et $\varphi(m)$, qui fera connaître la composition de la fonction φ.

Nous considérerons encore le cas où la surface engendrée serait assujétie à passer par une courbe donnée. Soient $F(x, y, z) = 0$, $F_{,}(x, y, z) = 0$, les symboles des équations de cette courbe ; il est évident qu'elle sera touchée à-la-fois par les plans tangens de chacune des surfaces que représentent les équations ci-dessus, et que par conséquent l'intersection de ces plans sera sa tangente : mais si dans toute son étendue elle touche la surface limite, elle touchera nécessairement chacune des génératrices, et par conséquent ses tangentes seront aussi dans les plans tangens de ces dernières surfaces.

Pour exprimer analytiquement ces conditions, nommons P et Q, les coefficiens différentiels de la première surface, $P_{,}$ et $Q_{,}$, ceux de la seconde; les équations de leurs plans tangens seront

$$z - z' = P(x - x') + Q(y - y'),$$
$$z - z' = P_{,}(x - x') + Q_{,}(y - y'),$$

et les projections de la droite qui en est l'intersection, auront pour équations

$$x - x' = \frac{(Q_{,} - Q)(z - z')}{PQ_{,} - P_{,}Q}, \qquad y - y' = -\frac{(P_{,} - P)(z - z')}{PQ_{,} - P_{,}Q}.$$

Pour que cette droite se trouve dans le plan tangent de la surface génératrice, plan dont l'équation est $z - z' = p(x - x') + q(y - y')$, il faudra, qu'en mettant au lieu de $x - x'$ et de $y - y'$, les valeurs précédentes, le résultat soit identique; on aura donc

$$PQ_{,} - P_{,}Q = (Q_{,} - Q)p - (P_{,} - P)q:$$

cette équation réunie avec les suivantes

$$V = 0, \quad F(x, y, z) = 0, \quad F_{,}(x, y, z) = 0,$$

donnera par l'élimination des coordonnées x, y, z, la relation qui doit avoir lieu entre m et $\varphi(m)$.

339. Nous allons nous occuper maintenant des surfaces développables. Ces surfaces, dont le caractère est de pouvoir s'étendre et s'appliquer, sans déchirure ni duplicature, sur un plan, sont engendrées par les intersections consécutives d'une suite de plans menés d'après une loi quelconque. Leurs principales propriétés sont exposées par des considérations géométriques, dans le *Complément des Élémens de Géométrie*. Euler, dès 1772, les avait exprimées analytiquement, et je vais les donner à peu près comme les a présentées M. Monge.

L'équation d'un plan renfermant trois constantes arbitraires, il faut que la loi de succession des plans qui engendrent une surface développable, soit telle, que deux de ces constantes soient déterminées en fonction de la troisième, pour qu'après un plan quelconque on n'en puisse trouver qu'un nombre déterminé de consécutifs : prenant $z = Ax + By + m$, pour l'équation des plans proposés, et faisant $A = \varphi(m)$, $B = \psi(m)$, les caractéristiques φ et ψ désignant deux fonctions quelconques, l'équation générale des surfaces développables sera le résultat de l'élimination de m entre les deux suivantes :

$$z - m = x\varphi(m) + y\psi(m) \ldots\ldots (1),$$
$$-1 = x\varphi'(m) + y\psi'(m) \ldots\ldots (2).$$

On peut faire disparaître les fonctions arbitraires φ et ψ par la différentiation ; car en différentiant d'abord l'équation (1), par rapport à x et par rapport à y successivement, et en regardant m comme constante, en vertu de l'équation (2), on trouvera

$$p = \varphi(m), \qquad q = \psi(m);$$

et puisque ces résultats nous font voir que les coefficiens différentiels p et q sont des fonctions de la même quantité, nous devons en conclure que p est une fonction de q, *et vice versâ* : nous poserons donc

$$p = \pi(q).$$

Différentiant cette équation par rapport à x et par rapport à y, en faisant, comme dans le n° 314,

$$dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy,$$

on trouvera $r = s\pi'(q)$, $s = t\pi'(q)$; et éliminant $\pi'(q)$, il viendra

$$rt - s^2 = 0:$$

c'est cette équation qui exprime le caractère des surfaces développables, indépendamment de la forme des fonctions φ et ψ. Si nous faisons $rt - s^2$ ou $e = 0$, dans les expressions du rayon de courbure données n° 321, l'une d'elles devient infinie; les surfaces développables ont donc une de leurs courbures nulle. Le rayon de l'autre courbure se détermine en prenant la valeur de δ dans l'équation du premier degré à laquelle se réduit l'équation (7), lorsque $rt - s^2 = 0$.

Les surfaces développables sont touchées par leur plan tangent dans toute l'étendue de la ligne droite, qui est leur caractéristique, et que représente l'ensemble des équations (1) et (2). Le système des trois équations

$$\begin{aligned} z - m &= x\varphi(m) + y\psi(m) \\ -1 &= x\varphi'(m) + y\psi'(m) \\ 0 &= x\varphi''(m) + y\psi''(m) \end{aligned}$$

exprimera (336) la courbe produite par les intersections successives des caractéristiques, et à laquelle M. Monge a donné le nom d'*arête de rebroussement*. La connaissance de cette courbe suffit pour déterminer la surface développable à laquelle elle appartient, puisque toutes les caractéristiques de cette surface ne sont que les tangentes de son arête de rebroussement, et qu'elle peut par conséquent être regardée comme l'assemblage des tangentes de cette courbe. Les équations primitives des surfaces développables présentées sous ce point-de-vue, diffèrent des précédentes, et je les donnerai, lorsque je parlerai des courbes à double courbure (344); je vais, pour le moment, m'occuper de la détermination des fonctions arbitraires que contiennent les équations (1) et (2).

L'une des conditions les plus simples consiste à supposer que la surface développable cherchée doive toucher en même temps deux surfaces données. Pour traiter ce cas, posons que $F(x, y, z) = 0$ et $F_{,}(x, y, z) = 0$ soient les symboles des équations de ces surfaces : dans les points qui leur sont communs avec la surface développable cherchée, les surfaces données doivent avoir toutes deux pour plan tangent l'un des plans générateurs; désignons par x', y', z', les coordonnées du point où ce plan touche la première surface donnée, et par x'', y'', z'', celles du point où il touche la seconde; posons de plus que l'équation $\mathrm{F}(x', y', z') = 0$ donne $dz' = Pdx' + Qdy'$, et que de l'équation $\mathrm{F}_{,}(x'', y'', z'') = 0$, on tire $dz'' = P_{,}dx'' + Q_{,}dy''$; puisque par celle du plan générateur on a $dz = dx\varphi(m) + dy\psi(m)$, il viendra pour son contact avec la première surface donnée,

$$z' - m = x'\varphi(m) + y'\psi(m), \quad \varphi(m) = P, \quad \psi(m) = Q,$$

et pour son contact avec la seconde,

$$z'' - m = x''\varphi(m) + y''\psi(m), \quad \varphi(m) = P_{,}, \quad \psi(m) = Q_{,}.$$

Joignant les trois premières équations avec $\mathrm{F}(x', y', z') = 0$, on en chassera x', y' et z', et on aura une relation entre m, $\varphi(m)$ et $\psi(m)$; les trois dernières combinées avec $\mathrm{F}(x'', y'', z'') = 0$, en donneront pareillement une après l'élimination de x'', y'' et z'', et on pourra par conséquent connaître la forme des fonctions φ et ψ (*).

Si on se proposait de faire passer la surface développable cherchée par deux courbes données,

$$\mathrm{F}(x', y', z') = 0 \ldots \quad \text{et} \quad f(x', y', z') = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

étant les équations de la première

$$\mathrm{F}_{,}(x'', y'', z'') = 0 \ldots \quad f_{,}(x'', y'', z'') = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

celles de la seconde, on trouverait, comme dans le n° précédent, que les équations de leurs tangentes seraient de la forme

$$x - x' = M(z - z'), \quad y - y' = N(z - z'),$$
$$x - x'' = M_{,}(z - z''), \quad y - y'' = N_{,}(z - z'');$$

mais le plan générateur devant toucher ces deux courbes à-la-fois;

(*) La question que nous venons de traiter renferme la solution du problème général de la théorie des ombres et des pénombres; car en supposant que l'une des surfaces données soit lumineuse, l'ombre et la pénombre de l'autre surface seront comprises entre les nappes de la surface développable circonscrite en même temps à ces deux surfaces. (Voyez *Mém. des Savans étrangers*, T. IX.)

contiendra nécessairement leurs tangentes, et comme il doit passer par les points dont les coordonnées sont x', y' et z', x'', y'' et z'', on aura

$$z'-m=x'\varphi(m)+y'\psi(m)\ldots\ldots(1),$$
$$z''-m=x''\varphi(m)+y''\psi(m)\ldots\ldots(2).$$

Retranchant successivement ces équations de $z-m=x\varphi(m)+y\psi(m)$; il viendra

$$z-z'=(x-x')\varphi(m)+(y-y')\psi(m),$$

et $$z-z''=(x-x'')\varphi(m)+(y-y'')\psi(m);$$

substituant pour $x-x'$ et $y-y'$, $x-x''$ et $y-y''$, leurs valeurs tirées des équations des tangentes des courbes données, il en résultera les équations

$$1=M\varphi(m)+N\psi(m)\ldots\ldots\ldots(1),$$
$$1=M_{,}\varphi(m)+N_{,}\psi(m)\ldots\ldots\ldots(2);$$

combinant ensemble les quatre équations (1), on trouvera, après l'élimination des coordonnées x', y' et z', une des relations qui doit avoir lieu entre m, $\varphi(m)$, $\psi(m)$, et l'autre sera le résultat de l'élimination de x'', y'', z'', entre les quatre équations (2).

540. L'équation générale de toutes les surfaces formées par les intersections successives d'une suite de sphères, dans lesquelles le rayon varie en même temps que la position du centre, contient trois fonctions arbitraires; car l'équation d'une sphère quelconque, étant

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\delta^2;$$

si l'on fait dépendre les quantités α, β, γ, de la quantité δ, on aura pour l'intersection des deux sphères consécutives,

$$\begin{array}{l}[x-\varphi(\delta)]^2+[y-\psi(\delta)]^2+[z-\pi(\delta)]^2=\delta^2\\ -[x-\varphi(\delta)]\varphi'(\delta)-[y-\psi(\delta)]\psi'(\delta)-[z-\pi(\delta)]\pi'(\delta)=\delta.\end{array}$$

L'élimination des fonctions arbitraires demande trop de calcul, pour trouver place ici; nous observerons seulement qu'il faudrait pousser les différentiations, par rapport à chaque variable successivement, jusques au troisième ordre, en faisant varier δ, en même temps que chacune des coordonnées x, y et z: d'ailleurs dans un des articles suivans, nous ferons usage d'un procédé dont l'application simplifierait les opérations à effectuer dans cet exemple.

Pour particulariser la surface que nous considérons, il faudrait trois conditions ; on peut se proposer en effet d'assujétir les sphères génératrices à toucher à-la-fois trois surfaces données, ou faire passer la surface limite par trois courbes données ; il sera facile d'appliquer à l'une et à l'autre de ces questions, les méthodes des n^{os} précédens.

341. On peut parvenir aux équations générales des diverses familles de surfaces, en employant immédiatement la considération des lignes dont elles sont composées. Soient $V=0$, $V_{,}=0$, les équations d'une ligne quelconque ; cette ligne variera de forme ou de position, lorsqu'on changera les valeurs des constantes arbitraires qui entrent dans ses équations : si donc on établit une relation entre plusieurs de ces constantes, et qu'on en élimine une, on parviendra à un résultat qui exprimera l'ensemble d'une infinité de lignes de la même nature que celles que représentent les équations $V=0$ et $V_{,}=0$. Quelques exemples éclairciront suffisamment cette théorie.

Si on considère d'abord toutes les droites assujéties à passer par le point dont les coordonnées sont α, β et γ, leurs équations seront de la forme

$$y-\beta=a(x-\alpha), \quad z-\gamma=b(x-\alpha);$$

faisons $b=\varphi(a)$, et mettons pour a et b leurs valeurs tirées des équations précédentes, il viendra

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right),$$

équation qui appartient à toutes les surfaces coniques formées par les droites menées par le point donné.

Supposons que toutes les droites génératrices doivent être parallèles entre elles ; les quantités a et b, dans les équations

$$y=ax+\alpha, \quad z=bx+\beta,$$

resteront les mêmes, quelle que soit la droite que l'on considère en particulier, et il n'y aura que les quantités α et β qui varieront en passant d'une droite à une autre ; on fera donc $\beta=\varphi(\alpha)$, et il viendra

$$y=ax+\alpha, \quad z=bx+\varphi(\alpha).$$

La première de ces équations donne $\alpha = y - ax$, et substituant dans la seconde, on trouve

$$z - bx = \varphi(y - ax),$$

équation qu'il est aisé de faire rentrer dans celle du n° 332.

Si les droites génératrices devaient être toutes parallèles au plan des x et y, et passer par l'axe des z, leurs équations se réduiraient à

$$y = ax \quad \text{et} \quad z = \beta.$$

Les quantités a et β variant d'une droite à une autre, on posera $\beta = \varphi(a)$; et comme $a = \frac{y}{x}$, on aura $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, équation de la surface décrite dans le n° 89 du *Complément des Élémens de Géométrie*..

Les équations $z = \frac{c(x-a)}{y-b}$ et $z = \frac{c(x-a)(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$, dont on s'est occupé n° 153, expriment les ordonnées de deux surfaces de ce genre; car si pour simplifier on met x à la place de $x - a$, et y à la place de $y - b$, ce qui revient à transporter l'origine, on aura

$$z = \frac{cx}{y} = \frac{c}{\frac{y}{x}}, \quad z = \frac{cxy}{x^2+y^2} = \frac{c\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}.$$

Il est facile de voir maintenant pourquoi les fonctions z deviennent indéterminées, lorsqu'on fait $x = a$ et $y = b$ dans leur première forme, ou $x = 0$ et $y = 0$ dans leur seconde : les points qui répondent à ces dernières abscisses sont dans l'axe des z, sur lequel tombe une ordonnée de chacune des droites génératrices, dont le nombre est infini; lorsqu'on fait $\frac{y}{x} = m$, on considère une de ces droites en particulier, et on n'obtient plus que l'ordonnée qui lui appartient.

Nous n'avons encore supposé que deux coefficiens variables dans les équations des droites génératrices; il y en aurait trois, si on considérait une droite assujétie seulement à passer par l'axe des z, et qu'on regardât comme inconnues les deux autres conditions qui doivent particulariser sa position.

Les équations d'une pareille droite étant de la forme $y = ax$ et $z = bx + \beta$, on ferait $b = \varphi(a)$, $\beta = \psi(a)$, d'où il résulterait

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Les fonctions arbitraires que renferme cette équation peuvent être déterminées, en se donnant deux courbes par lesquelles doive passer la surface proposée.

Venons maintenant au cas général, en regardant comme variables en même temps les quatre coefficiens a, α, b, β, qui entrent dans les équations de la droite génératrice. Lorsque trois de ces coefficiens seront donnés en fonctions du quatrième, la loi, suivant laquelle on passera d'une droite à sa consécutive, sera déterminée : posons donc

$$\alpha = \varphi(a), \quad b = \psi(a), \quad \beta = \pi(a);$$

les deux équations

$$y = ax + \alpha, \quad z = bx + \beta,$$

deviendront

$$y = ax + \varphi(a)\ldots(1) \qquad z = x\psi(a) + \pi(a)\ldots(2).$$

Le système de ces deux équations représente toutes les surfaces composées de lignes droites, ou engendrées par une ligne droite qui se meut d'une manière quelconque ; pour les particulariser, il faut trois conditions : on peut donc assujétir la surface cherchée à passer par trois lignes données.

La droite génératrice devant couper chacune de ces lignes, il faudra que les équations (1) et (2) aient lieu en même temps que les leurs; éliminant les coordonnées x, y et z, entre les deux équations de la première de ces lignes et les équations (1) et (2), on aura un résultat qui exprimera la relation que doivent avoir les quantités a, $\varphi(a)$, $\psi(a)$ et $\pi(a)$, pour que la droite génératrice puisse couper cette première ligne; on combinera de même successivement les équations (1) et (2) avec celles de la seconde ligne donnée et avec celles de la troisième, et on se procurera par là, entre les fonctions arbitraires et la quantité a, deux nouvelles équations qui, conjointement avec celle dont on vient de parler, détermineront la forme de ces fonctions.

Nous prendrons pour exemple le cas où les trois lignes données sont droites, et nous représenterons leurs équations par

$$\left.\begin{array}{l} y = a'x + \alpha' \\ z = b'x + \beta' \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = a''x + \alpha'' \\ z = b''x + \beta'' \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = a'''x + \alpha''' \\ z = b'''x + \beta''' \end{array}\right\};$$

combinant successivement les équations (1) et (2) avec chacune des précédentes, et remettant pour abréger α, b et β, au lieu des fonctions $\varphi(a)$, $\psi(a)$ et $\pi(a)$, on aura les trois équations

$$(a-a')(\beta-\beta')-(\alpha-\alpha')(b-b')=0,$$
$$(a-a'')(\beta-\beta'')-(\alpha-\alpha'')(b-b'')=0,$$
$$(a-a''')(\beta-\beta''')-(\alpha-\alpha''')(b-b''')=0,$$

qui donneront les valeurs de α, b et β, en a; substituant ces valeurs dans (1) et (2), et éliminant a, on parviendra à l'équation de la surface cherchée. Nous n'entrerons pas dans les détails de ces calculs, qu'on peut simplifier en faisant coïncider une des droites données avec l'axe des z; nous dirons seulement que le résultat appartient à l'hyperboloïde à une nappe (304), et que lorsque cette surface est de révolution, elle peut être engendrée aussi par une ligne droite située de manière à ne pas rencontrer l'axe et tournant autour de cet axe. Pour concevoir ce mouvement de rotation, il faut imaginer que la droite mobile soit fixée sur la ligne qui mesure sa plus courte distance à l'axe de rotation, de manière qu'en tournant elle fasse toujours le même angle avec un plan perpendiculaire à cet axe.

Il est aisé d'étendre ces considérations à tel genre de lignes qu'on voudra; et pour obtenir l'équation de la surface formée par l'ensemble de ces lignes, il suffira de faire dépendre d'une seule toutes les constantes arbitraires que renferment leurs équations générales.

Un cercle peut être donné d'une manière commode dans l'espace, par le moyen d'une sphère et d'un plan; l'équation de la première est en général

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\delta^2\ldots\ldots(1);$$

celle d'un plan qui passerait par son centre, serait de la forme

$$(z-\gamma)=a(x-\alpha)+b(y-\beta)\ldots\ldots.(2).$$

La position et la grandeur du cercle, qui est l'intersection de ces deux surfaces, dépendra, comme on voit, de six constantes arbitraires; on supposera que cinq d'entre elles soient des fonctions de celle qui reste, et le système des équations (1) et (2), entre lesquelles on éliminera cette dernière constante, appartiendra aux surfaces formées de cercles qui se succèdent suivant une loi quelconque, et dans lesquelles sont comprises les surfaces *annulaires*. On pourra les particulariser de manière qu'elles passent par cinq lignes données, puisque leur équation générale contient un pareil nombre de fonctions arbitraires.

342. M. Lagrange a indiqué les moyens de trouver les surfaces composées de lignes d'une nature donnée; mais ce grand Géomètre n'a pas considéré la question dans toute la généralité dont elle est susceptible : il a supposé que les lignes génératrices étant sur la même surface, devaient toujours se couper deux à deux consécutivement, condition qui n'est pas nécessaire. Les surfaces connues dans les arts sous le nom de *surfaces gauches*, sont composées de lignes droites qui n'y satisfont point, et il n'y a que les surfaces développables pour lesquelles elle ait lieu : voici comment on peut l'exprimer.

On fait varier dans les équations (1) et (2), page 608, la quantité a, en regardant x, y, z comme des constantes, et il vient les quatre équations

$$\left.\begin{array}{r} y = ax + \varphi(a) \\ 0 = x + \varphi'(a) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} z = x\psi(a) + \pi(a) \\ 0 = x\psi'(a) + \pi'(a) \end{array}\right\}$$

qui doivent avoir lieu en même temps pour le point de rencontre des deux droites génératrices consécutives. En chassant x des deux équations qui se trouvent sur la seconde ligne, il en résulte l'équation

$$\varphi'(a)\psi'(a) - \pi'(a) = 0 \ldots\ldots\ldots (3),$$

qui établit une relation nécessaire entre les fonctions φ, ψ et π; elles cessent donc d'être toutes arbitraires, et par conséquent les équations (1) et (2) perdent de leur généralité.

Les surfaces développables, considérées comme formées de lignes droites qui se coupent deux à deux, sont donc représentées par les trois équations

$$y = ax + \varphi(a), \quad z = x\psi(a) + \pi(a), \quad \varphi'(a)\psi'(a) - \pi'(a) = 0,$$

entre lesquelles il faut éliminer la quantité a et l'une des fonctions arbitraires.

Pour montrer l'identité de ce résultat avec celui du n° 339, nous reprendrons les équations

$$z - m = x\varphi(m) + y\psi(m), \quad -1 = x\varphi'(m) + y\psi'(m);$$

et en chassant y de la première, nous aurons

$$z = \left(\varphi - \frac{\varphi'}{\psi'}\psi\right)x + m - \frac{\psi}{\psi'}, \quad y = -x\frac{\varphi'}{\psi'} - \frac{1}{\psi'},$$

en écrivant, pour abréger, φ pour $\varphi(m)$, et ainsi des autres. Ces équations étant comparées terme à terme avec $z = bx + \beta$ et $y = ax + \alpha$, il viendra

$$b = \varphi - \frac{\varphi'}{\psi'}\psi; \quad \beta = m - \frac{\psi}{\psi'}; \quad a = -\frac{\varphi'}{\psi'}; \quad \alpha = -\frac{1}{\psi'},$$

d'où on conclura d'abord que a, α, b et β, doivent être des fonctions d'une même quantité m. Mettant dans les expressions de b et de β pour $\frac{\varphi'}{\psi'}$ et ψ' leurs valeurs, on trouvera $b = \varphi + a\psi$, $\beta = m + \alpha\psi$; on aura donc pour déterminer a, α, b et β, les quatre équations

$$b = \varphi + a\psi, \quad \beta = m + \alpha\psi, \quad a\psi' + \varphi' = 0, \quad \alpha\psi' + 1 = 0,$$

desquelles éliminant φ, ψ et m, il résultera la relation qui doit avoir lieu entre les quantités a, α, b et β. Prenons les différentielles de b et de β, et nous trouverons

$$\begin{aligned} db &= \varphi' dm + a\psi' dm + \psi da = (\varphi' + a\psi')dm + \psi da, \\ d\beta &= dm + \alpha\psi' dm + \psi d\alpha = (1 + \alpha\psi')dm + \psi d\alpha, \end{aligned}$$

expressions qui, en vertu des équations $a\psi' + \varphi' = 0$ et $\alpha\psi' + 1 = 0$, se réduisent à $db = \psi da$ et $d\beta = \psi d\alpha$; éliminant ψ, on obtiendra

$$db d\alpha - da d\beta = 0.$$

Cette dernière équation revient à l'équation (3); car il est facile de voir que les quantités a, α, b et β devant être fonctions d'une même quantité, il s'ensuit que trois d'entre elles sont des fonctions de la quatrième.

En général, si $V = 0$ et $V_, = 0$, sont les équations des lignes génératrices, et renferment les arbitraires α, β, γ, δ, etc., il faudra, pour que ces lignes se coupent, que les équations

$$\begin{aligned} &\frac{dV}{d\alpha}d\alpha + \frac{dV}{d\beta}d\beta + \frac{dV}{d\gamma}d\gamma + \frac{dV}{d\delta}d\delta + \text{etc.} = 0, \\ &\frac{dV_,}{d\alpha}d\alpha + \frac{dV_,}{d\beta}d\beta + \frac{dV_,}{d\gamma}d\gamma + \frac{dV_,}{d\delta}d\delta + \text{etc.} = 0 \end{aligned}$$

aient lieu en même temps que les équations $V = 0$ et $V_, = 0$; éliminant x, y et z entre ces deux dernières et les deux premières, on aura une relation entre toutes les arbitraires; et par conséquent si l'on fait $\beta=\varphi(\alpha)$, $\gamma=\psi(\alpha)$, $\delta=\pi(\alpha)$, etc. il y aura une de ces fonctions qui sera déterminée par le moyen des autres.

Je ne quitterai point ce sujet sans faire remarquer que l'assemblage de toutes les normales menées à une surface courbe, suivant une de ses lignes de courbure (327), forme une surface développable dont l'arête de rebroussement se trouve sur la surface qui est le lieu de tous les centres de plus grande et de moindre courbure (325).

343. L'élimination des fonctions arbitraires dans les équations générales auxquelles nous sommes parvenus dans les articles précédens, serait assez laborieuse à effectuer; on peut l'abréger d'après les remarques qui vont suivre.

Soit l'équation

$$F[N, \varphi(M)]=0 \ldots\ldots (a),$$

dans laquelle $\varphi(M)$ désigne une fonction arbitraire à éliminer; les deux différentielles peuvent s'indiquer comme il suit:

$$\frac{dF}{dN}\frac{dN}{dx}+\frac{dF}{d\varphi}\varphi'(M)\frac{dM}{dx}=0,$$
$$\frac{dF}{dN}\frac{dN}{dy}+\frac{dF}{d\varphi}\varphi'(M)\frac{dM}{dy}=0,$$

en représentant par $\frac{dF}{dN}$, $\frac{dF}{dM}$, $\frac{dF}{d\varphi}$, les coefficiens différentiels pris par rapport aux quantités N, M et à la fonction arbitraire $\varphi(M)$, considérées comme des variables distinctes, en observant que

$$\frac{d\varphi(M)}{dx}=\varphi'(M)\frac{dM}{dx}, \qquad \frac{d\varphi(M)}{dy}=\varphi'(M)\frac{dM}{dy},$$

et en concevant que l'on ait fait varier z avec x et avec y dans

$$\frac{dM}{dx}, \quad \frac{dM}{dy}, \quad \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dN}{dy}.$$

Cela posé, si on élimine $\varphi'(M)$, il viendra

$$\frac{dF}{dN}\left(\frac{dN}{dx}\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dy}\frac{dM}{dx}\right)=0 \qquad (b),$$

résultat qui est précisément celui que l'on aurait obtenu, si l'on avait différentié l'équation proposée, en même temps par rapport à x et par rapport à y, sans faire varier $\varphi(M)$, ce qui aurait donné

$$\frac{dF}{dN}\left(\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy\right)=0,$$

et qu'on eût éliminé ensuite $\frac{dy}{dx}$, au moyen de l'équation $dM=0$, qui revient à

$$\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy=0.$$

Il suit de là que si on représente par m la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de cette dernière équation, il n'y aura qu'à écrire dans la différentielle totale de l'équation (a), mdx au lieu de dy, et $(p+qm)\,dx$ au lieu de dz, pour parvenir à l'équation (b), au moyen de laquelle on éliminera $\varphi(M)$ de l'équation (a).

Soit pour exemple l'équation

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (341);$$

la différentielle de cette équation, en y regardant comme constante la quantité $\frac{y}{x}$, comprise sous les fonctions arbitraires, sera

$$dz=dx\varphi\left(\frac{x}{y}\right), \quad \text{ou} \quad p+qm=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

m étant donnée par l'équation

$$d.\frac{y}{x}=0, \quad \text{ou} \quad xm-y=0:$$

mettant pour m sa valeur, il viendra

$$px+qy=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et la fonction ψ sera éliminée. On différentiera de nouveau en regargardant encore $\frac{y}{x}$ comme constante, puisque la fonction φ se rapporte aussi à cette quantité, et il viendra

$$pdx+xdp+qdy+ydq=dx\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

résultat qu'on changera en

$$p + rx + sy + (q + sx + ty)\, m = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

en substituant les valeurs convenues pour dp et dq (314); mettant encore pour m sa valeur, il viendra

$$(p + rx + sy)\, x + (q + sx + ty)\, y = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

d'où retranchant

$$px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

il restera

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0$$

pour l'équation différentielle partielle délivrée des deux fonctions arbitraires.

Quand même la quantité comprise sous les fonctions arbitraires ne serait pas donnée explicitement, mais dépendrait d'une seconde équation, l'élimination s'opérerait encore comme ci-dessus. Nous allons prendre pour exemple le système d'équations

$$y = ax + \varphi(a), \quad z = x\psi(a) + \pi(a),$$

qui appartient à toutes les surfaces formées des lignes droites (341). Pour pouvoir supposer constante la quantité a, il faut qu'on ait l'équation $\frac{da}{dx}dx + \frac{da}{dy}dy = 0$, qui ne nous apprend autre chose, sinon que $\frac{dy}{dx}$ a une valeur particulière, mais inconnue; nous désignerons cette valeur par m, et nous aurons ainsi $m\,dx$ au lieu de dy, $(p + qm)\,dx$ au lieu de dz. Dans cette hypothèse les différentielles des équations ci-dessus donneront

$$m = a, \quad p + qm = \psi(a),$$

d'où on tirera

$$p + aq = \psi(a);$$

différentiant cette dernière, il viendra

$$r + ms + a(s + mt) = 0,$$

en observant que

$$dp = (r + sm)\,dx, \quad dq = (s + tm)\,dx;$$

et mettant pour m sa valeur a, nous trouverons

$$r + 2as + a^2t = o;$$

résultat dans lequel il n'y a plus qu'à éliminer a. Pour cela, il faut différentier encore une fois; et en remontant à la signification des quantités r, s, t, on trouvera par le n° 32, que leurs différentielles peuvent être mises sous la forme

$$dr = \alpha dx + \beta dy, \quad ds = \beta dx + \gamma dy, \quad dt = \gamma dx + \delta dy;$$

ce qui devient, d'après l'hypothèse établie,

$$dr = (\alpha + \beta m)dx, \quad ds = (\beta + \gamma m)dx, \quad dt = (\gamma + \delta m)dx,$$

et donne $\quad \alpha + \beta m + 2a(\beta + \gamma m) + a^2(\gamma + \delta m) = o;$

substituant a au lieu de m dans cette dernière équation, nous aurons enfin le système des équations

$$r + 2as + a^2t = o,$$
$$\alpha + 3a\beta + 3a^2\gamma + a^3\delta = o,$$

entre lesquelles il ne reste plus à éliminer que a.

On trouverait la même chose en différentiant trois fois de suite chacune des équations proposées, et en faisant

$$dy = mdx, \quad dm = m'dx, \quad dm' = m''dx:$$

on aurait de cette manière les équations

$$m = a, \quad m' = o, \quad m'' = o;$$

$$p + mq = \psi(a), \quad r + 2ms + m^2t = o, \quad \alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3 = o;$$

et il faudrait éliminer m entre les deux dernières.

M. Monge, à qui sont dues les remarques précédentes, les appuie sur des considérations géométriques très-curieuses, ainsi que tous les détails que renferme son *Application de l'Analyse à la Geométrie*, ouvrage que doivent étudier tous ceux qui veulent connaître à fond cette matière.

344. Soient x, y et z les coordonnées d'une courbe quelconque XM, *fig.* 73, résultante de l'intersection de deux surfaces dont nous représenterons les équations par $F(x, y, z) = o$, $f(x, y, z) = o$. En éli- Application du Calcul différentiel aux courbes à double courbure. FIG. 73.

minant alternativement de ces équations chacune des variables z, y et x, on obtiendra trois nouvelles équations, la première entre y et x; la seconde entre z et x, et la troisième entre z et y, qui appartiendront respectivement aux projections $X'M'$, $X''M''$, $X'''M'''$, de la courbe proposée sur chacun des plans coordonnés. Elles exprimeront aussi les surfaces cylindriques élevées sur ces projections, perpendiculairement aux plans coordonnées qui les contiennent; et la courbe proposée XM sera l'intersection de deux quelconques de ces trois surfaces.

Sa tangente MT sera évidemment l'intersection des plans tangens aux mêmes surfaces cylindriques, que je nommerai *cylindres projetans;* et il est visible que le plan tangent d'une surface cylindrique perpendiculaire à l'un des plans coordonnés, rencontre ce plan coordonné dans une ligne qui touche la base du cylindre sur ce même plan, et que cette base est la projection de la courbe proposée. Il suit de là que les projections de la tangente MT, seront tangentes aux projections de la courbe XM; et comme il suffit de connaître deux projections de cette droite, nous choisirons celle qui se trouve sur le plan des x et y, et celle que contient le plan des y et z. En désignant donc par x', y' et z' les coordonnées courantes de la droite $T'M'$, tangente à la projection $X'M'$, son équation sera $\quad y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x)$;

et celle $T''M''$, tangente à $X''M''$, sera $\quad z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x)$.

Supposons que des équations des courbes $X'M'$ et $X''M''$, ôn ait tiré $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, les équations de la tangente TM deviendront

$$y'-\varphi(x)=(x'-x)\,\varphi'(x)\ldots\ldots(1),$$
$$z'-\psi(x)=(x'-x)\,\psi'(x)\ldots\ldots(2).$$

Si on élimine x entre ces équations, on aura la relation qui doit exister entre les coordonnées x', y' et z' de la tangente MT, quelle que soit la position du point M, et par conséquent l'équation de la surface formée par toutes les tangentes de la courbe XM. Si cette courbe est plane, la surface dont on vient de parler sera un plan; dans le cas contraire, ce sera seulement une surface développable, dont la courbe proposée sera l'arête de rebroussement.

Le système des équations (1) et (2) présente donc l'équation générale des surfaces développables sous une nouvelle forme; mais il conduit encore à l'équation différentielle partielle obtenue dans le n° 339, qui, étant indépendante des fonctions arbitraires, doit demeurer la même, sous quelque forme qu'on présente ces fonctions. L'élimination des fonctions arbitraires des équations ci-dessus demandant quelqu'attention, je vais en rapporter le calcul. Pour abréger, j'écrirai α au lieu de x, afin de supprimer les accens affectés aux coordonnées courantes de la tangente, et je ferai $\frac{d\alpha}{dx}=\alpha'$, $\frac{d\alpha}{dy}=\alpha''$. Alors les équations

$$\begin{aligned} z-\psi(\alpha) &= \psi'(\alpha)(x-\alpha), \\ y-\varphi(\alpha) &= \varphi'(\alpha)(x-\alpha) \end{aligned}$$

étant différentiées successivement par rapport à x et par rapport à y, donnent, après les réductions,

$$\begin{aligned} p &= \psi'(\alpha) + (x-\alpha)\alpha'\psi''(\alpha), \\ q &= \qquad\quad\;\; (x-\alpha)\alpha''\psi''(\alpha), \\ 0 &= \varphi'(\alpha) + (x-\alpha)\alpha'\varphi''(\alpha), \\ 1 &= \qquad\quad\;\; (x-\alpha)\alpha''\varphi''(\alpha); \end{aligned}$$

mettant dans les valeurs de p et de q celles de $(x-\alpha)\alpha'$, $(x-\alpha)\alpha''$, tirées des deux dernières équations, p et q seront exprimés en α seulement par des fonctions arbitraires de cette quantité; on aura donc $p=$ fonction de q, comme dans le n° 339.

345. Les résultats auxquels nous sommes parvenus dans le n° précédent, auraient pu s'obtenir d'une manière analogue à celle dont nous sommes arrivés aux équations des lignes osculatrices, considérées sur un plan (222). Lorsqu'on a deux équations entre trois variables x, y, z, il y a toujours deux de ces variables qui sont des fonctions de la troisième; si donc on suppose que x soit la variable indépendante, et qu'elle devienne $x+h$, les deux autres se changeront en

$$y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.},\quad z+\frac{dz}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Désignant par x', y' et z', les coordonnées de la ligne osculatrice, on aura de même, lorsque x' se changera en $x'+h$,

$$y'+\frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.},\quad z'+\frac{dz'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Comparant ces séries avec les précédentes, on en déduira les conditions d'osculation, comme pour les courbes données sur un plan : il faudra pour un contact du premier ordre, qu'en faisant $x' = x$, on ait

$$y' = y, \quad z' = z, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx}.$$

Une droite étant donnée par les équations

$$y' = ax' + \alpha, \quad z' = bx' + \beta,$$

on trouvera que $a = \frac{dy}{dx}$, $b = \frac{dz}{dx}$; et comme elle doit passer par les points dont les coordonnées sont x, y et z, on aura, comme dans le n° précédent,

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \qquad z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x).$$

On étendra facilement ces considérations aux contacts des ordres plus élevés.

346. Une ligne considérée dans l'espace peut être touchée par une surface, et avoir avec elle des contacts d'un ordre plus ou moins élevé. Désignons par x', y' et z', les coordonnées de la surface touchante; supposons que x' devienne $x' + h$, et que y' se change en $y' + k$; le développement de z' prendra la forme

$$\begin{aligned} & z' + \frac{dz'}{dx'}h + \frac{dz'}{dy'}k \\ & + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2z'}{dx'^2}h^2 + 2\frac{d^2z'}{dx'dy'}hk + \frac{d^2z'}{dy'^2}k^2\right\} \\ & + \text{etc.}; \end{aligned}$$

et lorsque, pour trouver les conditions du contact, on voudra comparer cette série avec la série analogue, déduite des équations de la courbe proposée, il faudra non-seulement faire $x' = x$, $y' = y$ et $z' = z$, dans chacun des coefficiens différentiels de la surface, mais encore mettre au lieu de k, la série

$$\frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

parce que l'accroissement k est, par la nature de la courbe, subordonné à l'accroissement h. Il résultera de ces substitutions une série que je représenterai par $z+Ph+Qh^2+Rh^3+$ etc., dans laquelle P, Q, R, etc. seront des fonctions données des coefficiens différentiels tirés de l'équation de la surface et de l'une des équations de la courbe proposée; et l'on aura pour un contact du premier ordre, $\frac{dz}{dx}=P$; pour un contact du second, $\frac{dz}{dx}=P$, $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2}=Q$, et ainsi de suite.

Prenons pour exemple le plan dont l'équation est $z'=Ax'+By'+D$, on aura d'abord $z=Ax+By+D$, puis changeant x en $x+h$ et y en $y+k$, il viendra $z+Ah+Bk$, au lieu de z; remplaçant k par $\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+$ etc., il en résultera

$$z+Ah+B\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+B\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

L'équation du plan renfermant trois constantes, on pourra, par leur moyen, satisfaire aux conditions du contact du second ordre, qui donneront $\frac{dz}{dx}=A+B\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}=B\frac{d^2y}{dx^2}$; tirant de ces équations, les valeurs de A et de B, et mettant pour $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, les expressions $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, il viendra

$$A=\frac{\psi'(x)\varphi''(x)-\varphi'(x)\psi''(x)}{\varphi''(x)},\qquad B=\frac{\psi''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Déterminant ensuite D pour que le plan cherché passe par le point M, on aura

$$z'-z=A(x'-x)+B(y'-y);$$

substituant pour z, y, A et B leurs expressions, il en résultera

$$z'-\psi(x)=\frac{\psi'(x)\varphi''(x)-\varphi'(x)\psi''(x)}{\varphi''(x)}[x'-x]+\frac{\psi''(x)}{\varphi''(x)}[y'-\varphi(x)].$$

Telle est l'équation du plan *osculateur* d'une ligne quelconque; si cette ligne était plane, le plan osculateur serait le même que celui qui la contient toute entière.

Nous ne poursuivrons pas plus loin cette théorie, qui n'offrira aucune difficulté à ceux qui auront suivi avec attention son application aux lignes données sur un plan et aux surfaces; nous ferons seulement observer que deux courbes, considérées dans l'espace, peuvent prendre une infinité de positions respectives, sans cesser de se toucher par le même point, puisqu'elles peuvent tourner autour de leur tangente commune; mais le contact est le plus intime, quand les plans osculateurs coïncident. Comme ce que nous avons à dire sur les courbes à double courbure, d'après M. Monge, tient à des considérations géométriques très-élégantes, nous allons nous rapprocher de sa manière.

347. Les courbes à double courbure peuvent être considérées comme des polygones, dont trois côtés consécutifs ne sauraient être dans le même plan : le prolongement de l'un de ces côtés donne la tangente, de même que pour les courbes planes; deux tangentes consécutives *TM* et *tm*, déterminent le plan qui passe par deux côtés consécutifs, et qui n'est autre chose que le plan osculateur.

On peut trouver son équation en le regardant comme passant par trois points consécutifs de la courbe proposée : soit donc

$$Ax' + By' + Cz' + 1 = 0$$

son équation; il faudra qu'on ait d'abord $Ax + By + Cz + 1 = 0$, puisqu'il doit contenir le point dont les coordonnées sont x, y et z; et pour que les deux points suivans s'y trouvent aussi, il faudra de plus que la différentielle première et la différentielle seconde de son équation, aient lieu en même temps que celles des équations de la courbe proposée.

On pourrait prendre une des différentielles $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ ou $\mathrm{d}z$, pour constante; mais il sera plus symétrique de les traiter toutes comme variables en même temps, et il viendra

$$A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z = 0, \qquad A\mathrm{d}^2x + B\mathrm{d}^2y + C\mathrm{d}^2z = 0,$$

d'où on tirera $\frac{A}{C} = \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}^2z - \mathrm{d}z\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}$, $\frac{B}{C} = \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}^2x - \mathrm{d}x\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}$;

retranchant l'équation $Ax+By+Cz+1=0$ de $Ax'+By'+Cz'+1=0$; mettant ensuite pour $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ leurs valeurs, et faisant disparaître les dénominateurs, nous trouverons le résultat suivant, remarquable par sa forme

$$(x'-x)(\mathrm{d}y\mathrm{d}^2z-\mathrm{d}z\mathrm{d}^2y)+(y'-y)(\mathrm{d}z\mathrm{d}^2x-\mathrm{d}x\mathrm{d}^2z)+(z'-z)(\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x)=0.$$

Si on met dans cette équation pour y, z, et leurs différentielles, les valeurs que donnent, en faisant tout varier, les équations $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, les différentielles disparaîtront, et on trouvera le même résultat que dans le n° précédent.

Je terminerai cet article en observant que la différentielle de l'arc d'une courbe considérée dans l'espace, a pour expression $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Cela se voit évidemment, en prenant la distance des points M et m, dont les coordonnées respectives sont $x, y, z, x+dx, y+dy$ et $z+dz$.

348. Mener une normale à une courbe considérée dans l'espace est un problème indéterminé; car il existe un nombre infini de droites qui, passant par le point de contact, sont en même temps perpendiculaires à la tangente; l'ensemble de ces droites forme un plan perpendiculaire à cette tangente, et que nous nommerons *plan normal*: son équation sera

$$(x'-x)\frac{dx}{dz}+(y'-y)\frac{dy}{dz}+(z'-z)=0 \quad (280),$$

ou

$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0.$$

Si on met au lieu de y, z, dy et dz, leurs valeurs représentées par $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi'(x)dx$ et $\psi'(x)dx$, il viendra

$$[x'-x]+[y'-\varphi(x)]\varphi'(x)+[z'-\psi(x)]\psi'(x)=0\ldots(a)$$

Considérons maintenant le plan normal pour le point consécutif; il est évident qu'il coupera celui qu'on vient de déterminer, dans une droite dont les coordonnées n'auront pas varié, quoique x soit devenu $x+dx$; on aura donc pour cette intersection l'équation

$$[y'-\varphi(x)]\varphi''(x)+[z'-\psi(x)]\psi''(x)-\varphi'(x)^2-\psi'(x)^2-1=0\ldots\ (b).$$

Éliminant x entre cette équation et la précédente, on aura celle de la surface développable formée par les intersections successives des plans normaux de la courbe proposée. On prendra une idée de cette surface, en considérant avec attention la figure 74. On a substitué à la courbe un polygone $MM'M''M'''\ldots$; par les milieux $G, G', G'', G'''\ldots$ de chacun des côtés de ce polygone, on leur a mené des plans perpendiculaires $GLKH$, $G'L'K'H'$, $G''L''K''H''$, $G'''L'''K'''H'''\ldots$: ces plans se coupent deux à deux, suivant des droites KH, $K'H'$, $K''H''$, $K'''H'''\ldots$ etc. FIG. 74.

qui ne seront parallèles entre elles que lorsque les côtés du polygone $MM'M''M'''$.... seront dans un même plan, et elles formeront alors un prisme.

Si on conçoit les droites KH, $K'H'$, $K''H''$, $K'''H'''$... prolongées jusqu'à ce que chacune d'elles rencontre sa consécutive, elles détermineront un polygone qui représentera l'arête de rebroussement de la surface développable formée par les plans normaux. Ce polygone contient les centres des sphères qui passent par quatre angles consécutifs du polygone $MM'M''M'''$... ; car l'intersection de deux droites telles que KH et $K'H'$ est aussi celle des trois plans $GLKH$, $G'L'K'H'$, $G''L''K''H''$, menés perpendiculairement sur le milieu des droites MM', $M'M''$, $M''M'''$, qui joignent les quatre points M, M', M'', M'''. Si tous les angles du polygone proposé se trouvaient sur la même sphère, toutes les droites KH, $K'H'$, $K''H''$, $K'''H'''$,.... se couperaient au centre de cette sphère, et seraient par conséquent les arêtes d'une pyramide.

Ces propriétés ne cesseront pas d'avoir lieu, quel que soit le nombre des côtés du polygone $MM'M''M'''$..., et conviendront par conséquent à la courbe proposée elle-même; il suit donc de là que si elle est plane, tous ses plans normaux formeront par leurs intersections consécutives une surface cylindrique; et si, étant à double courbure, elle se trouve néanmoins faire partie de la sphère, alors la surface de ses plans normaux sera conique, et aura son sommet au centre de la sphère: enfin dans le cas où la courbe proposée serait plane et se trouverait en même temps sur une sphère, elle serait nécessairement un cercle, et tous les plans qui lui seraient perpendiculaires se couperaient dans une même droite élevée par son centre perpendiculairement au plan qui la contient.

Pour parvenir à l'équation de l'arête de rebroussement de la surface formée par les intersections successives des plans normaux, il faut joindre aux équations (a) et (b) la différentielle de cette dernière, prise par rapport à x seul (336), et on aura

$$[y'-\varphi(x)]\varphi'''(x)+[z'-\psi(x)]\psi'''(x)-3\varphi'(x)\varphi''(x)-3\psi'(x)\psi''(x)=0\ldots(c)$$

Si on prenait dans ces trois équations la valeur de $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, pour la substituer dans $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$, on aurait le rayon de la sphère qui passe par les quatre points consécutifs M, M', M'', M''', et dont le centre se trouve à l'intersection des trois premiers plans normaux.

349. Soit XM, *fig.* 75, une courbe plane quelconque, dont FZ représente la développée; si par tous les points de cette développée, on élève perpendiculairement à son plan, des droites FG, $F'G'$, $F''G''$, $F'''G'''$.... elles seront sur la surface cylindrique résultant des intersections successives des plans normaux de la courbe proposée; car les plans MFG, $M'F'G'$, $M''F''G''$, $M'''F'''G'''$... menés par les normales MF, $M'F'$, $M''F''$, $M'''F'''$... et par les droites dont on vient de parler, sont perpendiculaires à la courbe XM. Cela posé, il est évident que chacun des points de la droite GF sera également éloigné de tous ceux du petit arc de cercle décrit du point F, comme centre, avec un rayon MF; de même, chaque point de la droite $F'G'$, consécutive à la précédente, sera également éloigné de tous les points de l'arc décrit du point F' comme centre avec un rayon $M'F'$, et ainsi de suite : on pourra donc regarder le point quelconque G pris sur la droite FG, comme un centre de l'arc MM', et en conclure par conséquent qu'au même point de la courbe XM, répondent une infinité de rayons de courbure, tels que GM, dont le plus court sera MF, qui se trouve dans le même plan que la courbe proposée (*).

La surface cylindrique $FF'F''F'''$.... $G'''G''G'G$ contiendra, outre la courbe $FF'F''F'''$, une infinité d'autres courbes, qui, par leur développement, produiront la proposée XM. En effet, si on substitue au cylindre un prisme d'un grand nombre de faces, qu'on prenne arbitrairement un point G sur l'une des arêtes de ce prisme, qu'on prolonge le rayon correspondant GM, jusqu'à ce qu'il rencontre l'arête suivante $F'G'$, on aura un nouveau rayon $G'M'$ consécutif au premier; en prolongeant ce rayon jusqu'à la rencontre de l'arête $F''G''$, et ainsi de suite, on formera un polygone $GG'G''G'''$ par le développement duquel seront décrits les arcs MM', $M'M''$, $M''M'''$ considérés comme des arcs de cercle; puisque le rayon GM se confondra avec son consécutif $G'M'$, lorsque le point M aura parcouru l'arc MM'. Il est facile de voir que la même chose aurait lieu en faisant tourner le plan $FF'G'G$ autour de $G'F'$, pour l'amener dans le prolongement de la face suivante $F'F''G''G'$: d'où il suit qu'en développant le prisme $FF'F''F'''$.....

(*) Pour sentir que les dénominations ci-dessus sont bien fondées, il suffit de remarquer que tous les points de la droite élevée par le centre d'un cercle, perpendiculairement à son plan, peuvent servir à la description de ce cercle, comme le centre lui-même, puisqu'ils sont également éloignés de tous les points de la circonférence.

$G''G'G'G$, le polygone $GG'G'G''$.... deviendrait une ligne droite. On sent, d'après cela, qu'un fil tendu d'abord dans la direction GM, et plié ensuite librement sur le prisme dont on vient de parler, suivrait le contour du polygone $GG'G'G''$...

On voit donc qu'une courbe plane a, outre la développée $FF'F''F'''$... située dans son plan, une infinité d'autres développées qui sont à double courbure, et que toutes deviennent des lignes droites, lorsqu'on développe le cylindre qui les contient.

Il est à propos de remarquer que les tangentes de ces développées font toutes le même angle avec celles du cylindre qu'elles rencontrent, et sont par conséquent également inclinées à l'égard du plan qui contient la courbe proposée.

350. Appliquons maintenant aux courbes à double courbure la théorie que nous venons d'exposer à l'égard des courbes planes. Il est évident
FIG. 74. que la droite KH, *fig.* 74, sera perpendiculaire au plan qui contient les deux côtés consécutifs MM' et $M'M''$, puisqu'elle est l'intersection de deux plans qui leur sont respectivement perpendiculaires ; et si on conçoit le premier prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre KH en O, le point O sera le centre du cercle qui passerait par les trois points M, M' et M''. Il suit de là que chacun des points de la droite KH, sera également éloigné de ces points ; il en sera de même des points de $K'H'$, par rapport aux points M', M'', M''', de ceux de $K''H''$, à l'égard des points M'', M''', M''''; etc. Donc si on mène une droite GF dans le premier plan normal $GLKH$, et que par le point où elle rencontre KH, et par le point G' on mène la droite $G'F$ dans le second plan normal $G'L'K'H'$, les deux droites GF et $G'F$, seront également inclinées à l'égard de KH; prolongeant ensuite $G'F$ jusqu'à la rencontre de $K'H'$, et menant $G''F'$ dans le troisième plan normal, les deux droites $G'F'$ et $G''F'$ seront également inclinées par rapport à $K'H'$. En poursuivant cette construction, on formera un polygone $FF'F''F'''$... sur la circonférence duquel s'appliquerait un fil tendu d'abord dans la direction GF, et plié ensuite librement sur la surface $HH'H''H'''$.... $K'''K''K'K$, formée par les intersections successives des plans normaux. Son développement produirait les arcs de cercle, passant par les points M, M', M'', M'''... combinés trois à trois. La considération de ce polygone fait voir bien clairement l'existence et la

formation de toutes les développées d'une courbe à double courbure quelconque (*).

Le plus court de tous les rayons de courbure sera dans le cas actuel, comme pour les courbes planes, celui qui se trouve dans le plan même des deux côtés consécutifs que l'on considère; mais tous les rayons de cette espèce, qu'on peut appeler *rayons de courbure absolus*, ne seront point tangens à une même courbe, car ils ne se rencontreront point. On s'en convaincra, en remarquant que la ligne GO, étant perpendiculaire à KH, ne rencontrera point $G'O'$ perpendiculaire à $K'H'$, puisque l'une est dans le plan $GLKH$, et l'autre dans le plan $G'L'K'H'$, et qu'elles ne passent pas par le même point de la commune section KH de ces plans : la suite des centres *absolus* de courbure O, O',... ne sera donc point une des développées de la courbe proposée. Nous allons confirmer, par des procédés analytiques, les résultats que nous avons déduits des considérations géométriques précédentes.

351. Soient x', y', z', les coordonnées du centre d'une sphère, x, y, z, étant celles d'un point de sa surface, et u son rayon; on aura

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=u.$$

Pour déterminer les quantités x', y', z' et u, il faut quatre conditions; celles qui se présentent d'abord consistent à assujétir la sphère proposée à passer par quatre points consécutifs de la courbe donnée; or cela suppose que le rayon u reste le même, quoique les coordonnées x, y et z varient trois fois de suite: on aura donc en même temps

$$du=0, \qquad d^2u=0, \qquad d^3u=0.$$

Si on développe ces équations, on retombera sur celles que nous avons

(*) Si on conçoit une ligne quelconque tracée dans le plan $GLKH$, cette ligne décrira une portion de cône droit autour de KH, pendant que le plan qui la contient tournera pour venir s'appliquer sur son consécutif $G'L'K'H'$; lorsque ce dernier tournera lui-même autour de $K'H'$ pour venir s'appliquer sur son consécutif, la droite que nous considérons décrira une seconde portion de cône autour de $K'H'$, et ainsi de suite; l'assemblage de toutes ces portions de cône formera une surface développable qui aura avec la surface $HH'H''H'''\ldots K'''K''K'K$, des rapports analogues à ceux qu'une développante a avec sa développée.

désignées dans le n° 348 par (a), (b) et (c); déterminant $(x-x')$, $(y-y')$ et $(z-z')$ par ces équations, et substituant les valeurs trouvées, dans l'expression de u, on aura le rayon de la sphère osculatrice.

En ne considérant que trois points consécutifs, on aura seulement les équations

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=u,$$
$$du=0,$$
$$d^2u=0.$$

Déterminant alors $(x-x')$ et $(y-y')$ en $(z-z')$, par les deux dernières; et substituant ensuite dans l'expression de u, le résultat exprimera tous les rayons de courbure relatifs à un même point. Pour obtenir le rayon de courbure absolu, il faudrait faire varier z', et chercher parmi toutes les valeurs de $z-z'$, celle qui donne le minimum de u; on peut aussi parvenir au même but, par la considération que le centre absolu de courbure est dans le plan osculateur, et c'est cette voie que nous suivrons.

Les équations $du=0$ et $d^2u=0$ étant développées, donnent

$$(x-x')dx+(y-y')dy+(z-z')dz=0,$$
$$(x-x')d^2x+(y-y')d^2y+(z-z')d^2z+dx^2+dy^2+dz^2=0;$$

en faisant pour abréger $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$, on en tire

$$(x-x')(dxd^2y-dyd^2x)+(z-z')(dzd^2y-dyd^2z)-ds^2dy=0,$$
$$(y-y')(dxd^2y-dyd^2x)+(z-z')(dxd^2z-dzd^2x)+ds^2dx=0;$$

mais par l'équation du plan osculateur, donnée n° 347, on a

$$dxd^2y-dyd^2x=C,\quad dzd^2x-dxd^2z=B,\quad dyd^2z-dzd^2y=A;$$

les équations précédentes pourront donc être écrites ainsi qu'il suit :

$$-A(z-z')+C(x-x')-ds^2dy=0 \ldots\ldots (d)$$
$$-B(z-z')+C(y-y')+ds^2dx=0 \ldots\ldots (e);$$

combinant ces équations avec celle du plan osculateur,

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

il viendra

$$(A^2+B^2+C^2)(z-z')+A\mathrm{d}s^2\mathrm{d}y-B\mathrm{d}s^2\mathrm{d}x=0,$$

d'où
$$z-z'=-\frac{\mathrm{d}s^2(A\mathrm{d}y-B\mathrm{d}x)}{A^2+B^2+C^2}.$$

Mettant dans l'expression de u^2, pour $x-x'$ et $y-y'$, les valeurs

$$\frac{A(z-z')+\mathrm{d}s^2\mathrm{d}y}{C} \quad \text{et} \quad \frac{B(z-z')-\mathrm{d}s^2\mathrm{d}x}{C}$$

que donnent les deux équations (d) et (e), et faisant $\mathrm{d}s^2\mathrm{d}y=E$, $\mathrm{d}s^2\mathrm{d}x=F$, il viendra

$$C^2u^2=(A^2+B^2+C^2)(z-z')^2+2(z-z')(AE-BF)+E^2+F^2;$$

remplaçant $z-z'$ par la valeur trouvée ci-dessus, on aura

$$C^2u^2=\frac{(AE-BF)^2}{A^2+B^2+C^2}-2\frac{(AE-BF)^2}{A^2+B^2+C^2}+E^2+F^2,$$

ou en réduisant au même dénominateur,

$$C^2u^2=\frac{-(AE-BF)^2+(E^2+F^2)(A^2+B^2+C^2)}{A^2+B^2+C^2}.$$

En développant ce résultat, on verra qu'il peut se mettre sous la forme

$$C^2u^2=\frac{(AF+BE)^2+C^2(E^2+F^2)}{A^2+B^2+C^2};$$

mais $\quad AF+BE=-\mathrm{d}z\mathrm{d}s^2(\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x)=-C\mathrm{d}z\mathrm{d}s^2;$

donc
$$u^2=\frac{E^2+F^2+\mathrm{d}z^2\mathrm{d}s^4}{A^2+B^2+C^2}:$$

remettant enfin pour A, B, C, E et F, leurs valeurs, on trouvera

$$u^2=\frac{\mathrm{d}s^6}{(\mathrm{d}y\mathrm{d}^2z-\mathrm{d}z\mathrm{d}^2y)^2+(\mathrm{d}z\mathrm{d}^2x-\mathrm{d}x\mathrm{d}^2z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x)^2}.$$

Cette expression du rayon de courbure absolu d'une courbe à double courbure, comprend celle du rayon de courbure d'une section faite par un plan quelconque dans une surface courbe ; le plan osculateur est le même dans ce cas que le plan coupant, et son équation, combinée avec celle de la surface proposée, donne les équations des projections de la section. Si on voulait introduire les coefficiens différentiels de l'ordonnée de la surface proposée, il faudrait observer que les équations différentielles du plan et celles de la surface devant avoir lieu en même temps, on ne peut regarder comme constante qu'une différentielle. En supposant qu'on les fasse varier toutes en même temps, pour plus de symétrie, on aura

$$dz = pdx + qdy,\quad d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 + pd^2x + qd^2y;$$
$$Adx + Bdy + Cdz = 0,\quad Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0;$$

à l'aide de ces équations on fera disparaître les différentielles, et la valeur de u ne dépendra plus que des quantités A, B, C, p, q, r, s et t. Je ne ferai point ici ces calculs, qui n'ont d'autre difficulté qu'un peu de longueur, et qui donneraient un résultat analogue à celui du n° 324.

352. Reprenons l'équation $z - z' = -\frac{ds^2(Ady - Bdx)}{A^2 + B^2 + C^2}$ (n° préc.), et mettons dans le numérateur du second membre, à la place des quantités A et B, leurs valeurs, nous aurons

$$z - z' = -\frac{ds^2dy\,(dyd^2z - dzd^2y) - ds^2dx\,(dzd^2x - dxd^2z)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

résultat auquel on peut donner la forme suivante :

$$z - z' = -\frac{ds^2\,[(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,d^2z - dz\,(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)]}{A^2 + B^2 + C^2}:$$

mais $\qquad dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = \frac{1}{2}\,d.ds^2 = dsd^2s;$

donc $\qquad z - z' = -\frac{ds^3(dsd^2z - dzd^2s)}{A^2 + B^2 + C^2}.$

Les équations $du = 0$, $d^2u = 0$, ainsi que celle du plan osculateur, étant symétriques par rapport aux quantités x, y, z et à leurs différentielles, on en tirera immédiatement des valeurs de $y - y'$ et de $x - x'$, semblables à celles qu'on vient de trouver pour $z - z'$, et on aura

$$y - y' = -\frac{ds^3\,(dsd^2y - dyd^2s)}{A^2 + B^2 + C^2},$$
$$x - x' = -\frac{ds^3\,(dsd^2x - dxd^2s)}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

On peut donner à ces expressions et à celle de u une forme très-élégante, en observant que leur dénominateur $A^2 + B^2 + C^2$ étant développé, devient

$$\begin{aligned} & dy^2d^2z^2 - 2dydzd^2yd^2z + dz^2d^2y^2 \\ + & dz^2d^2x^2 - 2dxdzd^2xd^2z + dx^2d^2z^2, \\ + & dx^2d^2y^2 - 2dxdyd^2xd^2y + dy^2d^2x^2, \end{aligned}$$

et qu'on peut l'écrire ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} & (dz^2 + dx^2)\, d^2y^2 - 2dydzd^2yd^2z \\ + & (dy^2 + dx^2)\, d^2z^2 - 2dxdzd^2xd^2z \\ + & (dz^2 + dy^2)\, d^2x^2 - 2dxdyd^2xd^2y\,; \end{aligned}$$

mais puisque

$$dz^2 + dx^2 = ds^2 - dy^2,\quad dy^2 + dx^2 = ds^2 - dz^2,\quad dz^2 + dy^2 = ds^2 - dx^2,$$

on aura

$$ds^2(d^2y^2 + d^2z^2 + d^2x^2) - \left\{ \begin{array}{l} dy^2d^2y^2 + 2dydzd^2yd^2z \\ dz^2d^2z^2 + 2dxdzd^2xd^2z \\ dx^2d^2x^2 + 2dxdyd^2xd^2y \end{array} \right\},$$

résultat dont la seconde partie n'est autre chose que le quarré de $dyd^2y + dzd^2z + dxd^2x$, ou de dsd^2s, pris négativement. Ce résultat se réduira donc à $ds^2(d^2y^2 + d^2x^2 + d^2z^2 - d^2s^2)$; mis dans la valeur de u, il la changera en

$$u^2 = \frac{ds^4}{d^2y^2 + d^2x^2 + d^2z^2 - d^2s^2};$$

de plus, si on fait attention que

$$dsd^2z - dzd^2s = ds^2d\,.\frac{dz}{ds},$$

$$dsd^2y - dyd^2s = ds^2d\,.\frac{dy}{ds},$$

$$dsd^2x - dxd^2s = ds^2d\,.\frac{dx}{ds},$$

on trouvera

$$z - z' = -\frac{ds^3d\,.\frac{dz}{ds}}{d^2z^2 + d^2y^2 + d^2x^2 - d^2s^2},$$

$$y - y' = -\frac{ds^3d\,.\frac{dy}{ds}}{d^2z^2 + d^2y^2 + d^2x^2 - d^2s^2},$$

$$x - x' = -\frac{ds^3d\,.\frac{dx}{ds}}{d^2z^2 + d^2y^2 + d^2x^2 - d^2s^2}.$$

Lorsqu'on voudra faire usage de ces valeurs, il sera bon de prendre une différentielle pour constante, quoique cela ne soit pas indispensablement nécessaire (69). Quand on aura chassé de ces expressions les variables x, y et leurs différentielles, celles de z disparaîtront, et il ne restera plus que la variable z, dont l'élimination conduira à deux équations qui appartiendront à la courbe sur laquelle se trouvent tous les centres de courbure.

353. Le calcul suivant va confirmer la remarque que nous avons faite dans le n° 350 à l'égard de cette courbe, et nous prouvera qu'elle ne saurait être en général une développée, que dans le cas où la courbe proposée est plane.

Faisons pour abréger

$$dsd^2x - dxd^2s = \alpha, \quad dsd^2y - dyd^2s = \beta, \quad dsd^2z - dzd^2s = \gamma,$$

et éliminons des équations ci-dessus la quantité $\frac{ds^3}{d^2z^2 + d^2y^2 + d^2x^2 - d^2s^2}$, qui leur est commune, il viendra

$$(y - y')\gamma = (z - z')\beta, \quad (x - x')\gamma = (z - z')\alpha,$$

équations qui sont celles du rayon de courbure absolu. En regardant les coordonnées x', y' et z' comme celles du point d'intersection de deux rayons de courbure consécutifs, il faudra que ces quantités restent constantes, lorsque x, y et z varieront une fois, et que par conséquent les équations

$$\begin{gathered}(y - y')\,d\gamma + \gamma dy = (z - z')\,d\beta + \beta dz,\\ (x - x')\,d\gamma + \gamma dx = (z - z')\,d\alpha + \alpha dz\end{gathered}$$

aient lieu en même temps que les précédentes : éliminant $x - x'$, $y - y'$ et $z - z'$, entre ces quatre équations, on obtiendra l'équation de condition qui doit avoir lieu pour que deux rayons de courbure consécutifs se coupent : cette équation sera

$$(\gamma dy - \beta dz)(\alpha d\gamma - \gamma d\alpha) - (\gamma dx - \alpha dz)(\beta d\gamma - \gamma d\beta) = 0.$$

En effectuant les multiplications indiquées, et faisant les réductions qui s'offriront ensuite, on trouvera un résultat qui pourra s'écrire ainsi qu'il suit :

$$d\alpha(\beta dz - \gamma dy) + d\beta(\gamma dx - \alpha dz) + d\gamma(\alpha dy - \beta dx) = 0\,;$$

mettant au lieu de α, β et γ les quantités qu'ils représentent, on aura d'abord

$$\begin{array}{ll} d\alpha = ds d^3x - dx d^3s\,, & \beta dz - \gamma dy = ds(dz d^2y - dy d^2z)\,; \\ d\beta = ds d^3y - dy d^3s\,, & \gamma dx - \alpha dz = ds(dx d^2z - dz d^2x)\,, \\ d\gamma = ds d^3z - dz d^3s\,, & \alpha dy - \beta dx = ds(dy d^2x - dx d^2y)\,; \end{array}$$

et substituant ces valeurs, les termes affectés de d^3s s'évanouiront; puis supprimant le facteur commun ds^2, on trouvera que l'équation ci-dessus a pour développement

$$\left.\begin{array}{r} dz d^2x d^3y - dz d^2y d^3x + dy d^2z d^3x \\ - dy d^2x d^3z + dx d^2y d^3z - dx d^2z d^3y \end{array}\right\} = 0\,,$$

et qu'elle est par conséquent la même que celle qu'on obtiendrait en cherchant si le plan osculateur peut passer par quatre points consécutifs; car cette dernière résulterait de l'élimination des quantités $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, entre les trois équations

$$\begin{aligned} A dx + B dy + C dz &= 0, \\ A d^2x + B d^2y + C d^2z &= 0, \\ A d^3x + B d^3y + C d^3z &= 0. \end{aligned}$$

354. Pour parvenir aux équations d'une développée, nous observerons que les équations $du = 0$, $d^2u = 0$, renferment la relation qui doit avoir lieu entre les quantités x', y', z', pour tous les centres, et que le caractère commun à tous ceux qui sont sur une même développée, consiste en ce que les rayons menés de chacun d'eux au point correspondant de la courbe proposée, sont tangens à cette développée. Considérées sous ce point-de-vue, leurs équations seront

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z')\,, \qquad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z')\,:$$

une seule de ces équations suffit avec l'équation $du = 0$, pour déterminer la tangente de la développée, parce que l'équation $du = 0$ est elle-même celle du plan tangent de la surface développable formée par les intersections consécutives des plans normaux, et sur laquelle se trouvent les développées. Il n'y aura donc qu'à combiner les équations

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad du = o, \quad d^2u = o:$$

pour en éliminer x, y, z et leurs différentielles, au moyen des équations de la courbe proposée et de leurs différentielles; les deux équations résultantes seront celles de la développée cherchée; mais elles seront elles-mêmes différentielles, puisqu'elles contiendront dx' et dz', et ce n'est qu'en faisant usage des méthodes du Calcul intégral, qu'on pourra remonter aux équations primitives de la courbe qu'elles représentent: ainsi nous sommes obligés de nous arrêter à ce qui précède.

355. Ce serait ici le lieu de parler des points singuliers que peuvent présenter les courbes à double courbure, mais cette discussion nous mènerait trop loin; je me contenterai de faire remarquer qu'elles sont susceptibles de deux espèces d'inflexions: la première, analogue à celle qu'on rencontre dans les courbes planes, a lieu dans les points où le rayon de courbure absolu change de signe; la seconde est relative à la courbure de la surface développable que forme l'ensemble de leurs tangentes, et a lieu lorsque le rayon de courbure de cette surface passe du positif au négatif, et réciproquement.

Formée par les intersections consécutives des plans osculateurs, cette même surface n'a qu'une courbure (339) dont les centres sont dans des plans perpendiculaires aux tangentes de la courbe proposée, et par conséquent parallèles aux plans normaux (348).

Les intersections des plans normaux étant perpendiculaires aux plans osculateurs, et formant l'arête de rebroussement de la surface des plans normaux, il est visible que les tangentes de cette courbe comprennent entre elles le même angle que les plans osculateurs de la première, et que les plans normaux de la seconde étant aussi perpendiculaires à ces droites, sont parallèles aux plans osculateurs de cette première. Cette relation est réciproque entre les deux courbes, puisque les tangentes de la courbe proposée comprennent évidemment entre elles un angle égal à celui que forment ses plans normaux qui sont les plans osculateurs de l'arête de rebroussement de la surface des plans normaux.

Il suit de là qu'en appelant *première flexion* d'une courbe à double courbure, celle qui est exprimée par les angles compris entre ses tangentes consécutives, et qui détermine son rayon de courbure absolu, et *seconde flexion*, celle qui est déterminée par les angles compris entre ses plans osculateurs, on a cet énoncé : *La première flexion d'une courbe à double courbure quelconque est égale à la seconde flexion de l'arête de rebroussement de la surface de ses plans normaux, et la première flexion de celle-ci est égale à la seconde flexion de celle-là.*

Cette remarque, due à M. Fourrier, est tirée d'un Mémoire de M. Lancret, jeune géomètre, qu'une mort prématurée a enlevé au moment où il donnait de justes espérances de ses talens (*). Ce Mémoire contient beaucoup de conséquences sur la relation de ces flexions, et de nouvelles recherches sur les développées des courbes à double courbure, que l'auteur détermine par la considération de la surface développable formée par l'ensemble des rayons d'une même développée, ou la *surface des fils* (350); il lui est échappé à ce sujet une légère méprise, qu'il a rectifiée dans un second Mémoire qui paraîtra dans le deuxième volume du Recueil des *Mémoires présentés à l'Institut par des Savans étrangers*.

356. Dans ce dernier Mémoire, M. Lancret a considéré les développées imparfaites que j'ai déjà indiquées dans le n° 262, à l'égard des courbes planes; mais il ne s'est pas borné à ces courbes, il a transporté le problème dans l'espace, et en a déduit un grand nombre de remarques très-curieuses, tant sur ces développées elles-mêmes, qu'il nomme *développoïdes*, que sur les surfaces qui les contiennent, et sur d'autres courbes qui se lient aux unes et aux autres.

Ici, au lieu du plan normal dans lequel sont compris tous les rayons des diverses développées de la courbe, il faut considérer un cône droit ayant pour axe la tangente de la courbe proposée, et comprenant sur sa surface toutes les lignes qui peuvent rencontrer la courbe sous le même angle. Chaque point de la courbe étant le sommet d'un semblable cône, ils se coupent deux à deux consécutivement dans des hy-

(*) Il appelle l'arête de rebroussement de la surface des plans normaux, *développée par le plan*, parce que si l'on fait mouvoir le long de cette arête un plan qui lui soit perpétuellement osculateur, l'un des points de ce plan décrira dans son mouvement, la courbe à double courbure donnée; je ne sais cependant si l'on ne pourrait pas trouver un peu vague cette application d'un mot qui a dans ses autres acceptions un sens très-précis.

perboles qui sont les caractéristiques de la surface contenant toutes les développoïdes; et la courbe qui joint les sommets de ces hyperboles, jouit de propriétés remarquables sur cette surface. Je ne pourrais suivre ici dans ses détails l'analyse de M. Lancret, mais je vais indiquer une manière assez simple de mettre le problème en équation.

En désignant par x', y', z', les coordonnées d'un point commun à deux lignes consécutives rencontrant la courbe sous un angle dont le cosinus est représenté par m, on aura

$$x-x'=a(z-z'),\qquad y-y'=b(z-z')\qquad (1),$$

$$\mathrm{d}x=a\mathrm{d}z+(z-z')\mathrm{d}a,\qquad \mathrm{d}y=b\mathrm{d}z+(z-z')\mathrm{d}b\ (2),$$

$$m=\frac{1+a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}}{\sqrt{1+a^2+b^2}.\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}z^2}}}\qquad (3).$$

Les équations (2) sont les différentielles des équations (1), prises en ne faisant pas varier les coordonnées x', y', z', qui sont communes aux deux droites consécutives; l'équation (3) est tirée de l'expression du cosinus de l'angle compris entre la première de ces droites et la tangente de la courbe proposée (284).

Cela posé, il est visible que si on mettait dans l'équation (3) les valeurs de a et de b prises dans les équations (1), on aurait l'équation du cône qui contient toutes les droites faisant le même angle avec la courbe proposée; et les équations de cette courbe fournissant les moyens de chasser y, z et leurs différentielles, le résultat ne dépendrait plus que de x. En le différentiant par rapport à cette variable seulement, on passerait à un second cône; et l'élimination de x entre ce dernier résultat et le précédent, donnerait l'équation de la surface, qui est le lieu de toutes les développoïdes.

Si on élimine $z-z'$ entre les équations (2), il viendra

$$\mathrm{d}b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}-\mathrm{d}a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=a\mathrm{d}b-b\mathrm{d}a\qquad (4),$$

équation qui renferme la condition nécessaire pour que les deux droites consécutives se rencontrent, et rend en conséquence les quantités a et b dépendantes l'une de l'autre. Au moyen de l'équation (3), on rapporte cette relation à la variable x, qui particularise le point pris sur la courbe proposée; car on tire de l'équation citée et de sa différentielle, des expressions de b et de db, qui réduisent l'équation (4) aux deux seules variables a et x: mais comme elle est différentielle, il faudrait en déduire par le calcul intégral, une équation primitive entre a et x; puis, avec l'expression de a en x, on aurait celle de b en x par l'équation (3). Substituant ces valeurs dans les équations (1), on obtiendrait les équations particulières d'une arête de la surface développable déterminée par une développoïde : et si on éliminait x, l'équation résultante appartiendrait à cette surface même. En combinant les équations (1) avec celle qu'on voudra des équations (2), que les expressions de a et de b, conjointement avec les équations de la courbe proposée, réduiront à ne contenir que x, on parviendrait aux valeurs des coordonnées x', y', z' d'un point de la développoïde. Enfin si on éliminait x entre ces trois valeurs, on aurait les équations de la développoïde elle-même (*).

Cette théorie comprend, comme cas particulier, celle des développées : on a pour ce cas $m=0$, et l'équation (3) se réduit à

$$1+a\frac{dx}{dz}+b\frac{dy}{dz}=0.$$

Il n'est pas bien difficile de faire la concordance entre ce que donnent alors les formules ci-dessus et celles du n° 354; et la nécessité de l'emploi du calcul intégral se montre par cette dernière voie comme par la première.

Cette nécessité n'a plus lieu quand la question n'est traitée que sur un plan. En effet, si l'on ne conserve que les coordonnées x et z, x' et z', les équations (1), (2) et (3) deviennent respectivement

$$x-x'=a(z-z'),$$

$$dx=adz+(z-z')da,$$

$$m=\frac{1+a\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+\frac{dx^2}{dz^2}}};$$

(*) Ceux de mes lecteurs qui connaissent le calcul intégral, remarqueront que l'équation primitive entre x et a, contiendra une constante arbitraire; les autres peuvent l'inférer de ce qui a été dit dans les n^os^ 8 et 49, et sentiront que cela est nécessaire pour que l'on puisse déduire du procédé indiqué, le nombre infini de développoïdes dont une même courbe est susceptible; car le sujet comporte des considérations analogues à celles du n° 349.

la dernière et sa différentielle donnent a et da en x et dx; et par ces valeurs, les deux autres équations ne contiennent plus que x', z' et x; bien entendu que l'on a préalablement chassé z et dz, au moyen de l'équation de la courbe donnée : on retombe aisément de là sur les formules trouvées pour les développées planes (225).

Du développement des courbes tracées sur des surfaces courbes.

357. *Une courbe quelconque étant tracée sur une surface développable, trouver ce qu'elle devient dans le développement de cette surface*; et réciproquement, *une courbe étant tracée sur un plan, trouver ce qu'elle devient lorsqu'on enveloppe ce plan sur une surface donnée :* voilà deux questions qui s'offrent naturellement, dès que l'on considère les surfaces développables et les courbes à double courbure; je vais exposer succinctement ici les solutions que j'en ai données dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, en 1790.

Il est évident que le problème se réduit à rapporter les courbes proposées à des lignes qui conservent leur grandeur après le développement de la surface, et prennent alors des situations respectives faciles à assigner. Les droites qui touchent dans toute leur étendue la surface développable, remplissent ces conditions. En les considérant comme les intersections consécutives de ses plans générateurs (339), on peut concevoir cette surface comme un polyèdre composé d'une infinité de faces planes infiniment longues et infiniment étroites ERE', $E'R'E''$, etc.,
FIG. 76. *fig.* 76, dont le développement s'opère, en faisant d'abord tourner une première face autour de l'un de ses côtés, jusqu'à ce qu'elle soit dans le prolongement de celle qui la touche par ce côté; puis faisant tourner ensuite conjointement ces deux faces autour du côté qui joint la seconde à la troisième, jusqu'à ce qu'elles se trouvent dans le prolongement de cette dernière, et ainsi de suite. Il est visible que les arêtes du polyèdre proposé ne souffrent ni extension, ni contraction dans ce mouvement, et conservent leur rectitude et les angles qu'elles formaient entre elles. Soit maintenant un polygone $MM'M''$... dont chacun des angles ait son sommet placé sur une arête du polyèdre; les côtés de ce polygone étant compris en entier dans une seule face du polyèdre, conserveront leur longueur pendant le développement; et comme ils décriront des cônes droits autour des arêtes qu'ils rencontrent, les angles qu'ils font avec ces arêtes ne changeront pas.

Lorsqu'on passe du polyèdre à la surface courbe continue, les arêtes sont remplacées par les droites qui touchent cette surface dans toute leur étendue ; et pour les distinguer des autres droites qui touchent aussi la surface, mais dans un point seulement, je continuerai à les nommer *arêtes*. Dans le même passage, le côté du polygone tracé sur le polyèdre, devient la différentielle de l'arc de la courbe tracée sur la surface ; et l'angle compris entre ce côté et une arête adjacente sur le polyèdre, se change en celui que forment la tangente de la courbe et l'arête menée sur la surface par le point de contact.

Pour employer ces lignes et ces angles de la manière la plus simple, il est à propos de considérer à part les trois classes dans lesquelles se partagent les surfaces développables, eu égard à la situation respective de leurs arêtes; savoir :

1°. Les surfaces cylindriques, dont toutes les arêtes sont parallèles (341);

2°. Les surfaces coniques, dont toutes les arêtes passent par le même point ;

3°. Les surfaces développables, dont les arêtes se coupent deux à deux sur une courbe à double courbure, qui en est l'arête de rebroussement.

Je vais m'occuper successivement de chacune de ces classes de surfaces.

358. Soient x', y', z', les coordonnées des points quelconques de l'espace, x, y, z, celles des points d'une courbe tracée sur une surface cylindrique ; je représenterai par

$$x'-x=a(z'-z),\qquad y'-y=b(z'-z),$$

les équations de l'arête de cette surface, puisqu'elle doit passer par le point pris sur la courbe proposée ; quant à celles de la tangente de cette courbe, elles seront

$$x'-x=\frac{dx}{dz}(z'-z),\qquad y'-y=\frac{dy}{dz}(z'-z)\ (344):$$

le cosinus de l'angle compris entre ces deux droites sera (284)

$$\frac{a\dfrac{dx}{dz}+b\dfrac{dy}{dz}+1}{\sqrt{1+a^2+b^2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{dx^2}{dz^2}+\dfrac{dy^2}{dz^2}}},\quad\text{ou}\quad \frac{adx+bdy+dz}{\lambda\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

en faisant, pour abréger, $\sqrt{1+a^2+b^2}=\lambda$.

Cela posé, les arêtes du cylindre, dans son développement, conservant leur parallélisme, peuvent être prises pour les ordonnées de la courbe *aplanie* (c'est-à-dire couchée sur le développement); en concevant des abscisses perpendiculaires à ces ordonnées, désignant les unes par u, les autres par v, le cosinus de l'angle compris entre la tangente de la courbe et son ordonnée aplanie, sera exprimé par $\frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}}$: on aura donc par les remarques du n° précédent,

$$\frac{adx+bdy+dz}{\lambda\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}} \qquad (1);$$

et puisque l'arc de la courbe ne change pas de longueur en passant de la surface courbe sur le plan, on aura de plus

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{du^2+dv^2} \qquad (2)\ (*).$$

Si maintenant on représente par

$$x=\varphi(z), \qquad y=\psi(z),$$

les équations des projections de la courbe tracée sur le cylindre, on changera les équations ci-dessus en d'autres de la forme

$$\frac{a\varphi'(z)+b\psi'(z)+1}{\lambda\sqrt{\overline{\varphi'(z)}^2+\overline{\psi'(z)}^2+1}}=\frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}},$$

$$dz\sqrt{\overline{\varphi'(z)}^2+\overline{\psi'(z)}^2+1}=\sqrt{du^2+dv^2},$$

desquelles, par l'élimination de z, on tirera une équation différentielle entre u et v, qui sera celle de la courbe aplanie.

Si c'est au contraire cette dernière qui soit donnée, qu'on en tire $v=\Pi(u)$, les équations (1) et (2) deviendront

$$\frac{adx+bdy+dz}{\lambda\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{\Pi'(u)}{\sqrt{1+\overline{\Pi'(u)}^2}},$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=du\sqrt{1+\overline{\Pi'(u)}^2};$$

(*) Observons en passant qu'en vertu de l'équation (2), l'équation (1) se réduit à

$$\frac{adx+bdy+dz}{\lambda}=dv,$$

résultat plus commode, parce qu'il est facile d'en déduire une nouvelle équation primitive entre x, y, z et v.

d'où, par l'élimination de u, on obtiendra une équation différentielle à trois variables, qui, conjointement avec celle de la surface cylindrique donnée, déterminera la forme que prend la courbe plane, lorsqu'on l'applique sur cette surface.

Dans le cas où, au lieu d'une courbe, ce serait une ligne droite, comme alors $\frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}}$ serait une quantité constante, en la désignant par C, il suffirait de l'équation

$$\frac{adx+bdy+dz}{x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=C,$$

pour déterminer la courbe que formerait cette droite lorsqu'on l'appliquerait sur la surface cylindrique. Ces courbes sont connues sous le nom d'*hélices*; l'arête d'un filet de vis est l'hélice tracée sur un cylindre droit.

Si on supposait les arêtes de la surface cylindrique perpendiculaires au plan des x, y, on aurait seulement

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=C, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{C}{\sqrt{1-C^2}},$$

ce qui fait voir que les tangentes des hélices font un angle constant avec le plan perpendiculaire au cylindre sur lequel ces courbes sont tracées.

La considération de ce plan fournit des expressions très-simples pour passer des courbes tracées sur la surface cylindrique, aux courbes aplanies; car il coupe cette surface dans une courbe qui, sur le développement, devient une ligne droite perpendiculaire aux arêtes. On peut donc prendre les arcs de cette section pour les abscisses de la courbe aplanie; les ordonnées seront la distance des deux courbes, mesurée dans le sens des arêtes de la surface cylindrique; et il ne s'agit que d'exprimer ces grandeurs par les coordonnées primitives x, y, z, ce qui est très-facile, même dans le cas général. En se bornant à celui où le plan coupant coïncide avec celui des x, y, on aura

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=du,$$
$$z=v.$$

et l'équation de la section qui est alors la base du cylindre, étant représentée par $y=\varphi(x)$, celle de la projection de la courbe proposée l'étant par $z=\psi(x)$, il viendra

$$dx\sqrt{1+\overline{\varphi'(x)}^2} = du\,;$$
$$\psi(x) = v,$$

d'où l'on déduira facilement une relation différentielle entre u et v.

359. Je passe aux surfaces coniques : α, β, γ, désignant les coordonnées du sommet, les arêtes auront pour équations

$$(x'-\alpha) = a(z'-\gamma), \quad y'-\beta = b(z'-\gamma) \ (341)\,;$$

et comme elles doivent aussi passer par le point dont les coordonnées sont x, y, z, il en résultera

$$a = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \qquad b = \frac{y-\beta}{z-\gamma}.$$

On trouvera par ce moyen, que le cosinus de l'angle compris entre les arêtes de la surface et les tangentes de la courbe tracée sur cette surface, est exprimé par

$$\frac{(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy + (z-\gamma)\,dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\,.\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}\,;$$

ce qui revient à

$$\frac{d.\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Cela posé, les arêtes du cône deviennent, dans son développement, des rayons vecteurs menés par le sommet ; en les représentant alors par v, on aura

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2} = v \quad (1),$$

et l'angle compris entre le rayon vecteur et les tangentes de la courbe aplanie, donnera

$$\frac{d.\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{dv}{\sqrt{dv^2+v^2du^2}} \quad (2),$$

équation qui se réduit à

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{dv^2+v^2du^2},$$

en vertu de l'équation (1).

On emploiera ces équations comme leurs correspondantes dans le n° précédent; je me bornerai à remarquer que toutes les courbes qui font un angle constant avec les arêtes des cônes sur lesquels elles sont tracées, sont caractérisées par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}.\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}=C;$$

et qu'elles deviennent des spirales logarithmiques lorsque les cônes sont développés (254). Quand l'angle est droit, on a seulement

$$\mathrm{d}.\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}=0;$$

les courbes proposées sont alors l'intersection d'une surface conique avec la sphère décrite de son sommet comme centre, et sur le développement elles deviennent des cercles.

L'équation commune à toutes les courbes qui deviennent des lignes droites sur le développement, ne se présente pas tout de suite, parce que l'équation d'une droite en coordonnées polaires, n'est pas très-simple; mais on obtient aisément une relation différentielle entre u et v, pour une droite quelconque PL, *fig.* 77, en employant la perpendiculaire FIG. 77.
AN abaissée de l'origine A, sur cette droite. En effet, on a

$$PN=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AN}^2},\quad \text{d'où}\quad \mathrm{d}.PN=\mathrm{d}.\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AN}^2};$$

en faisant $AN=a$, et en observant que $\mathrm{d}.PN$ remplace celle de l'arc de la courbe, on aura

$$\sqrt{\mathrm{d}v^2+v^2\mathrm{d}u^2}=\mathrm{d}.\sqrt{v^2-a^2},$$

d'où l'on pourra déduire u et v, par les équations (1) et (2). Si, pour simplifier, on place au sommet du cône l'origine des coordonnées x, y, z, il viendra

$$\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}=\mathrm{d}.\sqrt{x^2+y^2+z^2-a^2};$$

et si on exécute la différentiation indiquée, et que l'on fasse disparaître les radicaux, il en résultera l'équation très-symétrique

$$(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)^2+(x\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x)^2+(y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y)^2=a^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2),$$

commune à toutes les courbes que peut former une ligne droite enveloppée sur une surface conique quelconque. Elle jouit encore d'une autre propriété remarquable, celle d'appartenir à toutes les courbes à double courbure, qui sont les arêtes de rebroussement des surfaces développables circonscrites à la sphère; c'est ce qui sera prouvé dans le volume suivant, où je m'occuperai de nouveau de cette équation.

360. Venons aux surfaces développables qui ont une arête de rebroussement. Il est d'abord aisé de voir que lorsqu'on les développe, cette courbe conserve la courbure indiquée par son rayon de courbure absolu; car l'angle compris entre ses tangentes, qui sont les arêtes de la surface, ne changeant pas (357), les deux normales consécutives menées dans le plan osculateur, ne changeront point de situation respective, et la courbe conservera sa *première flexion*, c'est-à-dire celle qui est exprimée par le rayon de courbure absolu. En désignant donc par u et v, les coordonnées de la courbe aplanie, on aura, en ne prenant aucune différentielle pour constante,

$$\frac{(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}}}{dud^2v-dvd^2u}=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dxd^2z-dzd^2x)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2} \quad (1)$$

$$\sqrt{du^2+dv^2}=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \quad (2)$$

équations qui s'emploieront, comme leurs correspondantes des n^{os} précédens, à trouver une relation différentielle soit entre u et v, soit entre x, y et z.

On remarquera que toutes les courbes à double courbure dont le rayon de courbure absolu est constant, considérées comme arête de rebroussement de surfaces développables, deviendront des cercles sur le développement de ces surfaces.

361. Avant d'aller plus loin, il faut chercher les équations des arêtes d'une surface développable quelconque. Soit

$$dz=pdx+qdy$$

son équation différentielle; celle de son plan tangent, sera

$$z'-z=p(x'-x)+q(y'-y) \quad (1).$$

En différentiant cette dernière par rapport aux variables x, y, z seulement, on aura, en vertu de la première,

$$dp(x'-x)+dq(y'-y)=0 \qquad (2).$$

Celle-ci appartient au plan tangent consécutif à celui que désigne l'équation (1); les coordonnées x', y', z', n'ayant point varié, sont celles de la ligne commune aux deux plans, et qui est une arête de la surface développable : les équations de cette arête seront donc

$$x'-x=\frac{dq}{pdq-qdp}(z'-z), \qquad y'-y=-\frac{dp}{pdq-qdp}(z'-z);$$

et il faut bien observer que ces équations seront délivrées des différentielles de p et de q, puisque sur une surface développable quelconque, $p=\pi(q)$ (339). On doit remarquer encore que ces équations appartiennent aussi aux tangentes de l'arête de rebroussement de la surface proposée; ensorte que si l'on entendait par x, y, z, les coordonnées de cette courbe, on aurait

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dq}{pdq-qdp}, \qquad \frac{dy}{dz}=-\frac{dp}{pdq-qdp},$$

d'où l'on conclurait

$$dxdp+dydq=0.$$

La dernière de ces équations s'obtient sur-le-champ, si l'on fait attention que le plan tangent d'une surface développable la touchant dans toute l'étendue d'une ligne droite, on doit avoir $d^2z=0$ sur cette ligne, en supposant d'ailleurs dx et dy constans.

Si l'on différentie l'équation (2) par rapport aux variables x, y et z seulement, on obtiendra celle d'un troisième plan tangent à la surface développable, consécutif aux précédens; et les coordonnées x', y', z', communes à ces trois plans, appartiendront alors à l'arête de rebroussement. On trouvera ainsi :

$$-dpdx-dqdy+(x'-x)d^2p+(y'-y)d^2q=0 \qquad (3);$$

et la combinaison des équations (1), (2) et (3), donnera les valeurs

$$x' - x = \frac{(\mathrm{d}p\mathrm{d}x + \mathrm{d}q\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}q}{\mathrm{d}q\mathrm{d}^2p - \mathrm{d}p\mathrm{d}^2q},$$

$$y' - y = -\frac{(\mathrm{d}p\mathrm{d}x + \mathrm{d}q\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}q}{\mathrm{d}q\mathrm{d}^2p - \mathrm{d}p\mathrm{d}^2q}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q},$$

$$z' - z = \frac{(\mathrm{d}p\mathrm{d}x + \mathrm{d}q\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}q}{\mathrm{d}q\mathrm{d}^2p - \mathrm{d}p\mathrm{d}^2q}\cdot\frac{p\mathrm{d}q - q\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}.$$

Le facteur commun à ces trois expressions, peut être mis sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x + \mathrm{d}q\mathrm{d}y}{\mathrm{d}q\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}},$$

et il est aisé de s'assurer qu'il doit être débarrassé de toute différentielle, lorsque la surface proposée est développable; car si l'on prend dans l'équation $rt - s^2 = 0$ (339), la valeur de r pour la substituer dans celle de dp, il viendra

$$\mathrm{d}p = \frac{s}{t}\,(s\mathrm{d}x + t\mathrm{d}y) = \frac{s}{t}\,\mathrm{d}q,$$

$$\mathrm{d}p\mathrm{d}x + \mathrm{d}q\mathrm{d}y = \left(\frac{s}{t}\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\right)(s\mathrm{d}x + t\mathrm{d}y)$$

$$= \frac{1}{t}\,(s\mathrm{d}x + t\mathrm{d}y)^2 = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}q^2;$$

d'où on tirera

$$\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x + \mathrm{d}q\mathrm{d}y}{\mathrm{d}q\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}} = \frac{\mathrm{d}q}{t\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}},$$

expression qui ne conservera pas de différentielles, puisque p est une fonction de q.

Pour donner une application simple des formules précédentes, je prendrai l'équation

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2},$$

qui est celle d'un cône droit ayant son sommet à l'origine. Cette équation conduit à

$$p = kx(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$q = ky(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{d}p = k\mathrm{d}x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} - kx(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\mathrm{d}q = k\mathrm{d}y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} - ky(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{dpdx + dqdy}{dqd\frac{dp}{dq}} = -x, \quad \frac{pdq - qdp}{dq} = \frac{h(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{z}{x}.$$

La première de ces valeurs, mise dans l'équation (2), donne sur le plan des xy, pour la projection d'une arête de la surface, l'équation

$$xy' = yx',$$

et indique par conséquent une droite passant par l'origine des coordonnées, c'est-à-dire par le sommet du cône proposé. Avec les mêmes valeurs, on tire des premières expressions de la page précédente,

$$x' - x = -x, \quad y' - y = -y, \quad z' - z = -z,$$

d'où $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, ce qui montre que l'arête de rebroussement se réduit à un seul point qui est le sommet de cette surface, ce qui est d'ailleurs évident.

362. Quand on connaît l'arête de rebroussement d'une surface développable, tant sur cette surface que dans son développement, on peut construire des formules pour passer de toute autre courbe tracée sur la même surface, à la courbe aplanie correspondante, en cherchant l'expression de la distance entre les deux premières courbes, mesurée dans le sens des arêtes de la surface, et la différentielle de l'arc de l'arête de rebroussement, fonctions qui ne changent point de valeur dans le développement. Par ces fonctions, la courbe aplanie sera rapportée aux tangentes et aux arcs de celle que forme l'arête de rebroussement, quand elle est aplanie elle-même; mais ce système de coordonnées n'étant pas commode pour discuter une courbe, il faudrait le transformer en coordonnées rectangles; c'est pourquoi je vais exposer tout de suite un autre procédé où l'on n'emploie que des fonctions particulières à la courbe qu'on se propose d'aplanir.

Soient MM' et $M'M''$, *fig.* 78, deux côtés consécutifs d'un polygone FIG. 78.
tracé sur un polyèdre dont AB représente une des arêtes; lorsque les angles $AM'M$ et $AM'M''$, qui ne changent point (357), seront amenés dans le même plan, en tournant autour de AB, leur somme formera l'angle $MM'M''$ compris entre deux côtés consécutifs du polygone aplani; et l'angle $MM'L$ sera la différence des angles $AM'M$ et $AM'L$, tournés dans le même sens par rapport à l'arête AB. En substituant la surface courbe au polyèdre, les droites $M'M$ et $M''L$, seront

remplacées par deux tangentes consécutives de la courbe qu'il s'agit d'aplanir; les angles $AM'M$, $AM'L$, deviendront ceux que forment ces tangentes avec l'arête de la surface qui passe par leur point commun; enfin l'angle $MM'L$ exprimera la différentielle de celui que la tangente de la courbe aplanie fait avec l'axe des abscisses de cette courbe, différentielle qui conduit immédiatement au rayon de courbure de la même courbe: cherchons donc l'expression analytique de cet angle sur la surface courbe et dans son développement.

Les équations des arêtes de la surface développable, en faisant pour abréger

$$p\mathrm{d}q - q\mathrm{d}p = \mathrm{d}n,$$

sont

$$x' - x = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}n}(z' - z), \qquad y' - y = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}n}(z' - z);$$

et celles de la tangente de la courbe tracée sur cette surface, étant

$$x' - x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}(z' - z), \qquad y' - y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}(z' - z),$$

le cosinus de l'angle formé par ces deux droites, sera (284)

$$\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}x - \mathrm{d}p\mathrm{d}y + \mathrm{d}n\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}q^2 + \mathrm{d}p^2 + \mathrm{d}n^2}\,.\,\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}.$$

Cette formule doit être différentiée, en regardant $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$ et $\mathrm{d}n$ comme des constantes, puisque ces fonctions se rapportent encore à la même arête, tandis qu'on passe à une tangente consécutive sur la courbe proposée; et en écrivant $\mathrm{d}s$ au lieu de $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}s\,(\mathrm{d}q\mathrm{d}^2x - \mathrm{d}p\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}n\mathrm{d}^2z) - \mathrm{d}^2s\,(\mathrm{d}q\mathrm{d}x - \mathrm{d}p\mathrm{d}y + \mathrm{d}n\mathrm{d}z)}{\mathrm{d}s^2\sqrt{\mathrm{d}q^2 + \mathrm{d}p^2 + \mathrm{d}n^2}};$$

divisant par l'expression du sinus, et donnant le signe $-$ au résultat, on aura la différentielle de l'arc qui mesure l'angle dont il s'agit (58): or l'expression du sinus est (284)

$$\frac{\sqrt{(\mathrm{d}p\mathrm{d}x + \mathrm{d}q\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}q\mathrm{d}z - \mathrm{d}n\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}p\mathrm{d}z + \mathrm{d}n\mathrm{d}y)^2}}{\sqrt{\mathrm{d}q^2 + \mathrm{d}p^2 + \mathrm{d}n^2}\,.\,\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}};$$

il viendra donc pour la différentielle cherchée,

$$-\frac{\mathrm{d}s\,(\mathrm{d}q\mathrm{d}^2x - \mathrm{d}p\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}n\mathrm{d}^2z) - \mathrm{d}^2s\,(\mathrm{d}q\mathrm{d}x - \mathrm{d}p\mathrm{d}y + \mathrm{d}n\mathrm{d}z)}{\mathrm{d}s\sqrt{(\mathrm{d}p\mathrm{d}x + \mathrm{d}q\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}q\mathrm{d}z - \mathrm{d}n\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}p\mathrm{d}z + \mathrm{d}n\mathrm{d}y)^2}}.$$

Cette formule, déjà assez remarquable en elle-même, est susceptible de grandes simplifications

Premièrement, si l'on fait pour abréger

$$dp\,dx + dq\,dy = d\gamma^2, \quad dq\,dz - dn\,dx = d\beta^2, \quad dp\,dz + dn\,dy = d\alpha^2,$$

et que l'on mette au numérateur pour ds et d^2s leurs valeurs, on obtiendra

$$-\frac{d\gamma^2(dy\,d^2x - dx\,d^2y) + d\beta^2(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + d\alpha^2(dy\,d^2z - dz\,d^2y)}{ds^2\sqrt{d\gamma^4 + d\beta^4 + d\alpha^4}};$$

observant ensuite que

$$dq\,dz - dn\,dx = dq\,(p\,dx + q\,dy) - (p\,dq - q\,dp)\,dx = q\,(dp\,dx + dq\,dy),$$
$$dp\,dz + dn\,dy = dp\,(p\,dx + q\,dy) + (p\,dq - q\,dp)\,dy = p\,(dp\,dx + dq\,dy),$$

on en conclura

$$d\beta^2 = q\,d\gamma^2, \qquad d\alpha^2 = p\,d\gamma^2,$$

et par conséquent

$$-\frac{(dy\,d^2x - dx\,d^2y) + q\,(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + p\,(dy\,d^2z - dz\,d^2y)}{ds^2\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \ldots\ldots (\mathrm{V}),$$

formule qui revient à

$$\frac{d\,.\frac{dy}{dx} + q\,d\,.\frac{dz}{dx} - p\frac{dy^2}{dx^2}\,d\,.\frac{dz}{dy}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Enfin l'on peut chasser p ou q du numérateur de la formule (V), au moyen de l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$. En éliminant p, par exemple, ce numérateur deviendra

$$\frac{(dx^2 + dz^2)\,d^2y - dy\,(dx\,d^2x + dz\,d^2z) + q\,[(dx^2 + dy^2)\,d^2z - dz\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y)]}{dx};$$

ajoutant et retranchant les termes dy^2d^2y, $q\,dz^2d^2z$, cette expression se réduit à

$$\frac{ds^3}{dx}.\left\{d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds}\right\}.$$

On trouverait des réductions analogues, si l'on éliminait q au lieu de p; ensorte que la formule (V) peut se présenter sous ces deux formes :

$$\frac{ds\left\{d\frac{dy}{ds}+qd\frac{dz}{ds}\right\}}{dx\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{ds\left\{d\frac{dx}{ds}+pd\frac{dz}{ds}\right\}}{dy\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Cela posé, si on désigne par u et v les coordonnées rectangles de la courbe aplanie, l'angle compris entre deux tangentes consécutives, qui s'obtient en prenant la différentielle de l'arc dont la tangente est $\frac{dv}{du}$, aura pour expression (58)

$$\frac{d.\frac{dv}{du}}{1+\frac{dv^2}{du^2}}=\frac{dud^2v-dvd^2u}{du^2+dv^2};$$

et, d'après ce qu'on a vu au commencement de cet article, il doit être égal à la différentielle (V). Si on divise celle-ci par ds, et l'autre par $\sqrt{du^2+dv^2}$, fonctions qui sont de même valeur, on formera l'équation

$$\frac{d\frac{dy}{ds}+q\frac{dz}{ds}}{dx\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{dud^2v-dvd^2u}{(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dont un des membres pourra toujours être débarrassé des différentielles, lorsqu'on connaîtra les équations de la courbe tracée sur la surface donnée, ou celle de la courbe aplanie; et il faudra, pour effectuer l'élimination comme on l'a indiqué dans le n° 358, joindre à l'équation ci-dessus la suivante,

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{du^2+dv^2}.$$

363. Observons, en passant, que le second membre de la première de ces équations est l'inverse du rayon de courbure de la courbe aplanie (253); on s'assure aisément, par des considérations géométriques, que cela doit être, en faisant attention que l'angle de deux normales consécutives d'une courbe, est le même que celui des tangentes qui leur sont perpendiculaires.

Il est évident que si la courbe tracée sur la surface, devait en s'aplanissant devenir une ligne droite, il faudrait que l'angle des deux tangentes consécutives s'évanouît, et qu'on eût par conséquent

$$\mathrm{d}\frac{dy}{ds}+q\mathrm{d}\frac{dz}{ds}=0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}\frac{dx}{ds}+p\mathrm{d}\frac{dz}{ds}=0;$$

l'une quelconque de ces équations, combinée avec celle de la surface donnée, fera connaître la courbe que forme un fil plié librement sur cette surface : la même courbe jouit aussi de la propriété d'être la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener par deux de ses points, en suivant la surface proposée, et c'est sous ce point-de-vue que Jean Bernoulli a le premier considéré cette courbe. En prenant pour différentielle constante $\sqrt{dx^2+dy^2}$ que je représenterai par ds', il a trouvé l'équation

$$(ds'^2+dz^2)d^2y=(dydz-qds'^2)\,d^2z,$$

qui rentre dans celle que j'ai donnée ci-dessus, lorsqu'on y établit cette hypothèse; et je parviens aussi à cette dernière équation par une considération semblable, à la fin du second volume de cet Ouvrage (*).

Une circonstance digne d'attention, c'est que, quoiqu'il n'ait été question dans ce qui précède, que des surfaces développables, les équations trouvées ci-dessus conviennent aux surfaces quelconques, puisque c'est sans aucune restriction qu'on les obtient lorsqu'on cherche les lignes les plus courtes; et les équations générales du n° précédent, appartiennent à la transformation que subit une courbe plane quelconque pliée librement sur une surface courbe quelconque. Pour donner une idée sensible de ce que j'entends par une courbe pliée librement sur une surface, je ferai remarquer que si on découpe un papier suivant une courbe quelconque, en laisant un peu de largeur à ce papier, on verra qu'il y a une manière de l'appliquer sur une surface courbe, sans le tordre. En y réfléchissant, on conçoit que chacun des élémens de la courbe étant appliqué sur un des plans tangens de la surface proposée, cette courbe détermine une suite de plans tangens qui forment une surface développable circonscrite à la première surface, et qui la touche suivant la courbe dont il s'agit. Il est visible que si on développe la seconde surface, les élémens de la courbe ou ses tangentes reprendront la situation respective qu'ils avaient sur le plan primitif où elle était tracée. Par

(*) Cette courbe jouit, sur les surfaces où elle est tracée, de propriétés remarquables; on en peut juger par celles des grands cercles de la sphère, par rapport aux triangles et aux polygones qu'ils forment sur cette surface; c'est une courbe de ce genre qui est indiquée par les grands alignemens sur la surface terrestre, et que dans plusieurs ouvrages on nomme *ligne géodésique*.

$$\frac{ds\left\{d\frac{dy}{ds}+qd\frac{dz}{ds}\right\}}{dx\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{ds\left\{d\frac{dx}{ds}+pd\frac{dz}{ds}\right\}}{dy\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Cela posé, si on désigne par u et v les coordonnées rectangles de la courbe aplanie, l'angle compris entre deux tangentes consécutives, qui s'obtient en prenant la différentielle de l'arc dont la tangente est $\frac{dv}{du}$, aura pour expression (58)

$$\frac{d.\frac{dv}{du}}{1+\frac{dv^2}{du^2}}=\frac{dud^2v-dvd^2u}{du^2+dv^2};$$

et, d'après ce qu'on a vu au commencement de cet article, il doit être égal à la différentielle (V). Si on divise celle-ci par ds, et l'autre par $\sqrt{du^2+dv^2}$, fonctions qui sont de même valeur, on formera l'équation

$$\frac{d\frac{dy}{ds}+q\frac{dz}{ds}}{dx\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{dud^2v-dvd^2u}{(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dont un des membres pourra toujours être débarrassé des différentielles, lorsqu'on connaîtra les équations de la courbe tracée sur la surface donnée, ou celle de la courbe aplanie; et il faudra, pour effectuer l'élimination comme on l'a indiqué dans le n° 358, joindre à l'équation ci-dessus la suivante,

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{du^2+dv^2}.$$

363. Observons, en passant, que le second membre de la première de ces équations est l'inverse du rayon de courbure de la courbe aplanie (253); on s'assure aisément, par des considérations géométriques, que cela doit être, en faisant attention que l'angle de deux normales consécutives d'une courbe, est le même que celui des tangentes qui leur sont perpendiculaires.

Il est évident que si la courbe tracée sur la surface, devait en s'aplanissant devenir une ligne droite, il faudrait que l'angl[illegible] tangentes consécutives s'évanouît, et qu'on eût [illegible]

$$d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds} = 0, \quad \text{ou} \quad d\frac{dx}{ds} + p\,d\frac{dz}{ds} = 0;$$

l'une quelconque de ces équations, combinée avec celle de la surface donnée, fera connaître la courbe que forme un fil plié librement sur cette surface : la même courbe jouit aussi de la propriété d'être la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener par deux de ses points, en suivant la surface proposée, et c'est sous ce point-de-vue que Jean Bernoulli a le premier considéré cette courbe. En prenant pour différentielle constante $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ que je représenterai par ds', il a trouvé l'équation

$$(ds'^2 + dz^2)\,d^2y = (dy\,dz - q\,ds'^2)\,d^2z,$$

qui rentre dans celle que j'ai donnée ci-dessus, lorsqu'on y établit cette hypothèse ; et je parviens aussi à cette dernière équation par une considération semblable, à la fin du second volume de cet Ouvrage.

Une circonstance digne d'attention, c'est que, quoiqu'il ne soit question dans ce qui précède, que des surfaces développables, les équations trouvées ci-dessus conviennent aux surfaces quelconques ...
c'est sans aucune restriction qu'on les obtient lorsqu'on ...
lignes les plus courtes ; et les équations générales du ...
partiennent à la transformation que subit une courbe plane ... par
pliée librement sur une surface courbe quelconque. Pour ... en-
idée sensible de ce que j'entends par une courbe pliée librement ... s dans
surface, je ferai remarquer que si on découpe un ... er dans
courbe quelconque, en laissant un peu de largeur ... Mémoire
qu'il y a une manière de l'appliquer sur une surface ...
tordre. En y réfléchissant, on conçoit que cette
courbe étant appliquée sur un des plans tangens ...
cette courbe détermine une suite de plans ... es à une même
surface développable circonscrite à la premièr... partielle, ce qui
vant la courbe dont il s'agit. Il est visible ... et qu'on y joignît
surface, les élémens de la courbe ... moyen déterminer
tion respective qu'ils avaient sur le plan ... variables x, y et z;
... équations du n° 364,
... ntielle entre ces va-
... Ouvrage que, quoi-
... suppose implicitement
... oisième, et appartient à

(*) Cette courbe jouit, sur les surfaces ...
qualités, on en peut ...
triangles et ...
qui est ...

exemple, que l'on plie librement sur la surface d'une sphère, une ligne droite tirée sur un plan, elle deviendra un grand cercle, le plan se roulera en cylindre, et coïncidera avec la surface développable formée par les intersections consécutives des plans tangens à la sphère, menés par tous les points de la circonférence du grand cercle dont on vient de parler. Cette surface développable est un cylindre droit, puisque tous les plans qui la touchent, étant perpendiculaires à quelqu'un des rayons de sa base, sont aussi perpendiculaires à cette base.

Ainsi donc, *lorsqu'on se propose d'aplanir une courbe tracée sur une surface quelconque, on développe en même temps la surface formée par l'assemblage des plans qui touchent la première surface suivant cette courbe; et lorsqu'on veut appliquer une courbe plane sur cette première surface, on détermine en même temps une surface développable qui lui est circonscrite, et qui la touche suivant la courbe appliquée.* Si la surface donnée est développable, de quelque manière que l'on passe d'un point à son consécutif, on ne peut le faire sans que l'intersection des deux plans tangens ne soit couchée dans toute son étendue sur cette surface, et les deux surfaces n'en font plus qu'une seule. Dans ce cas, les équations des arêtes, rapportées dans le nº 361, deviennent indépendantes de celle de la courbe proposée; mais dans l'autre cas, ces mêmes équations ne pouvant être délivrées des différentielles, qu'en faisant usage des équations de la courbe, n'appartiennent alors qu'aux intersections consécutives des plans qui touchent, suivant cette courbe, la surface donnée.

364. Une courbe pouvant être tracée sur un nombre infini de surfaces développables, est par conséquent susceptible d'un pareil nombre de transformations par le développement de ces surfaces; et de là résulte cette question: *Étant données deux courbes, l'une sur un plan, l'autre dans l'espace, trouver sur quelle surface il faudrait plier la première pour produire la seconde.*

Les formules obtenues dans les articles précédens, fournissent le moyen d'exprimer analytiquement les conditions du problème; mais sa solution exige l'emploi du calcul intégral, et ne saurait par conséquent trouver place ici.

En considérant les surfaces que décrivent les lignes tracées sur des surfaces développables, lorsqu'on étend celles-ci sur un plan, on fait naître encore des problèmes curieux, qui peuvent se résoudre par l'application des méthodes exposées dans ce chapitre. Les lecteurs qui se plaisent à ce genre de recherches, pourront consulter les Mémoires déjà cités, de M. Monge et de M. Lancret. Ce dernier a donné l'équation de la *surface rectifiante* d'une courbe à double courbure quelconque; et par cette dénomination, il désigne une surface développable passant par la courbe proposée, et telle, que cette courbe devient une ligne droite lorsqu'on étend sur un plan la surface dont il s'agit. Il fait voir que cette surface est formée par les intersections successives des plans menés par les tangentes de la courbe proposée, perpendiculairement à ses plans osculateurs. Cette propriété se manifeste aussi par les formules du n° 362; car en égalant à zéro le numérateur de la fonction (V) avant d'en avoir chassé l'un des coefficiens différentiels p ou q, on a l'équation

$$dyd^2x - dxd^2y + q(dzd^2x - dxd^2z) + p(dyd^2z - dzd^2y) = 0;$$

qu'on reconnaît aisément pour l'expression analytique de la perpendicularité entre le plan osculateur d'une courbe à double courbure (347), et le plan indiqué par l'équation

$$z' - z = p(x' - x) + q(y - y');$$

plan qui touche la surface sur laquelle est tracée cette courbe, et qui par conséquent passe par sa tangente. Les surfaces rectifiantes jouissent encore de plusieurs autres propriétés remarquables; mais les bornes dans lesquelles j'ai dû me renfermer, ne me permettent pas d'entrer dans plus de détails à cet égard; je renverrai donc mes lecteurs au Mémoire de M. Lancret.

365. Si, considérant à-la-fois toutes les surfaces soumises à une même génération, on n'avait qu'une équation différentielle partielle, ce qui ne donnerait qu'une relation entre p, q, x, y et z, et qu'on y joignit l'équation $dz = pdx + qdy$, on ne pourrait par leur moyen déterminer p et q, sans qu'il n'y entrât les différentielles des variables x, y et z; et les valeurs obtenues étant substituées dans les équations du n° 364, ne conduiraient qu'à une seule équation différentielle entre ces variables. On verra dans le second volume de cet Ouvrage que, quoiqu'unique, l'équation dont je viens de parler suppose implicitement deux de ses variables dépendantes de la troisième, et appartient à

une famille de courbes qui ne sauraient se trouver toutes sur la même surface.

Cette circonstance a lieu également par rapport à l'équation

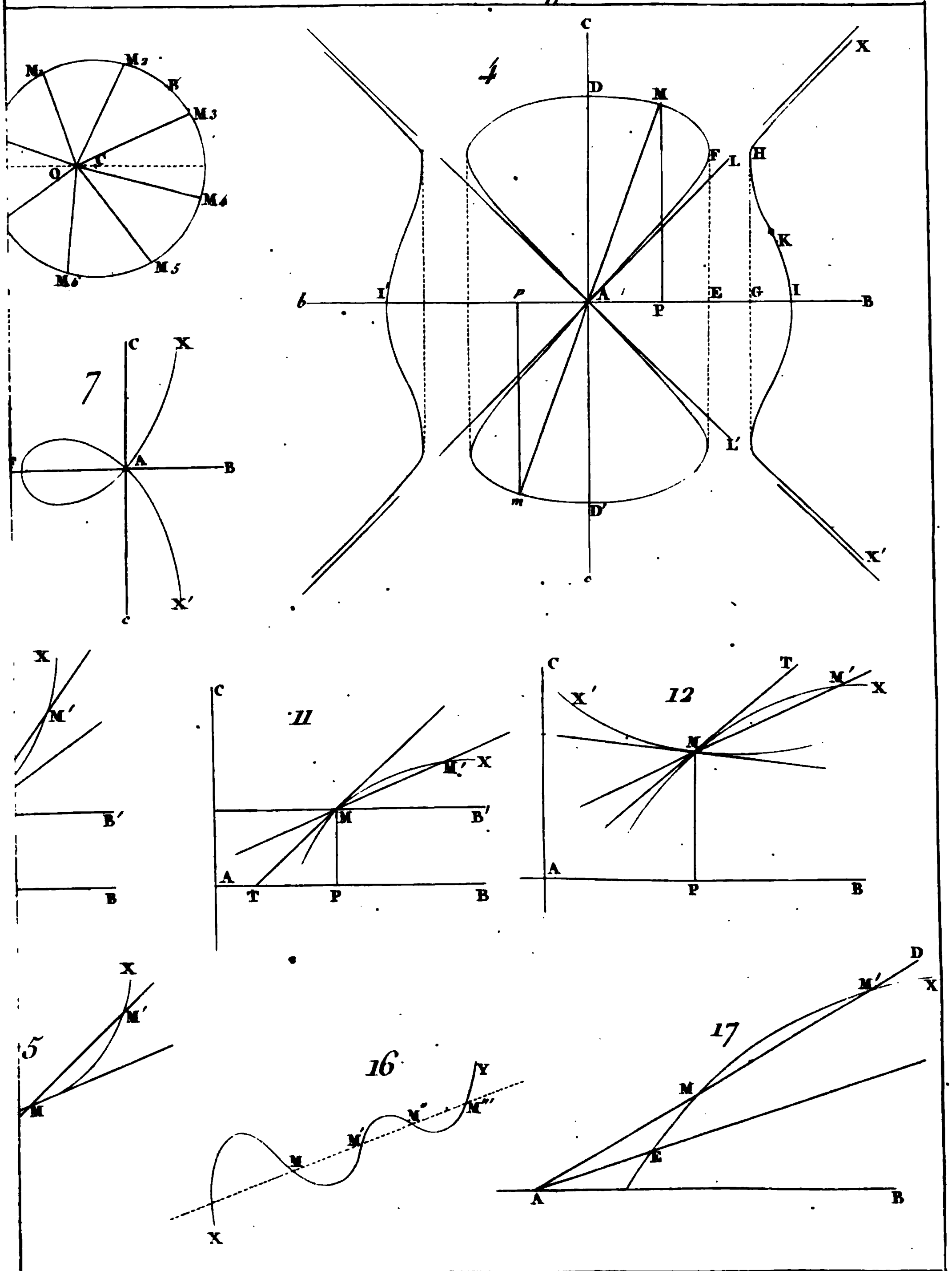
$$\frac{adx + bdy + dz}{\lambda\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = C \text{ (page 639)},$$

à celle qui termine la page 641, et à

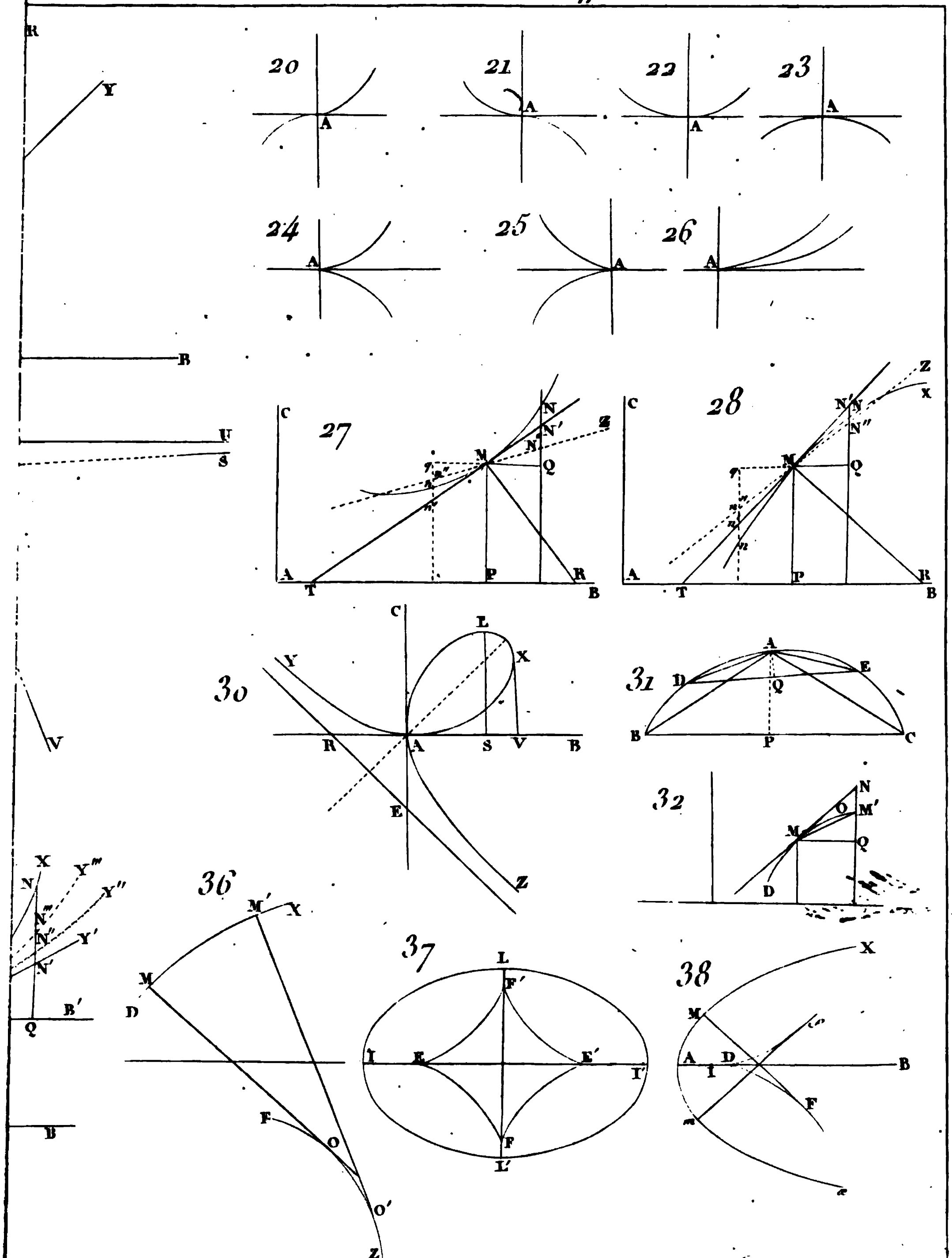
$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2) \text{ (page 599)}.$$

En rapprochant cette dernière de ce qu'on a vu dans le n° 347, on reconnaît qu'elle appartient à toutes les courbes dont les tangentes font avec le plan des xy, un angle dont le cosinus est égal à $\frac{z}{a}$.

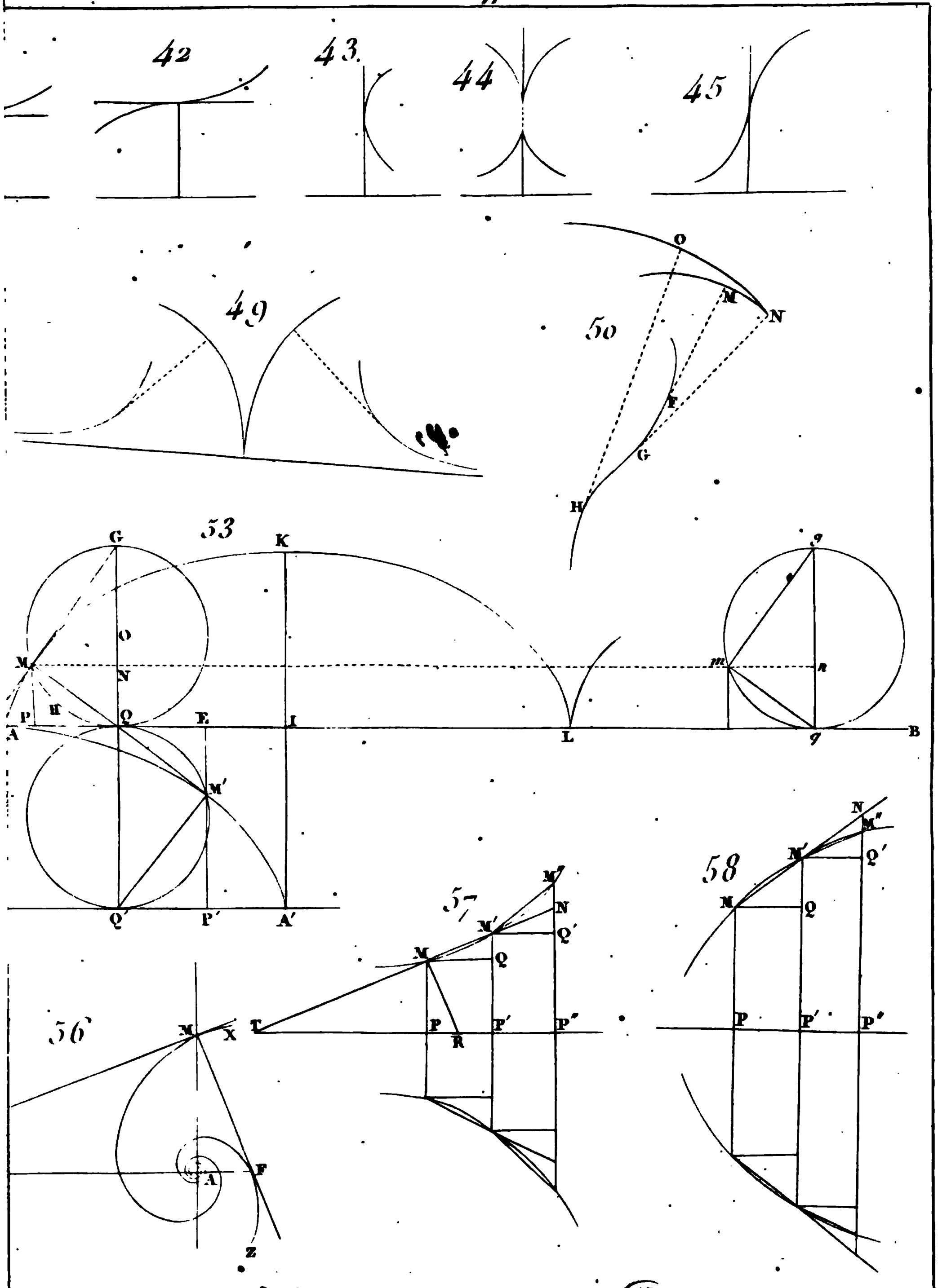
FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.



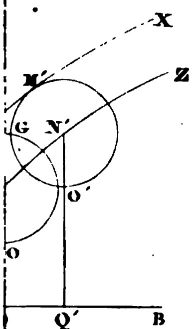
Pelicier sc.



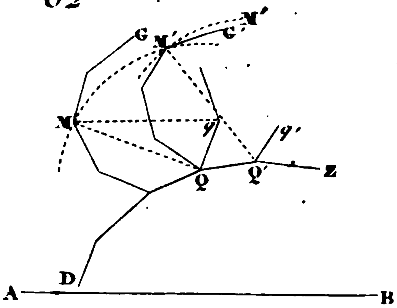
Pelicier sc.


42
43
44
45
49
50
O
M
N
F
G
H
53
G
K
O
M
N
P
H
Q
E
I
A
L
g
m
n
q
B
M′
Q′
P′
A′
56
M
X
A
F
Z
57
T
M
P
R
Q
M′
P′
Q′
N
M″
P″
58
M
Q
M′
Q′
N
M″
P
P′
P″

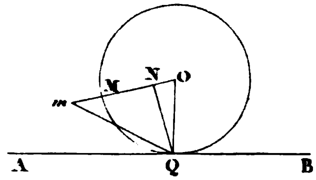
Pelicier sc

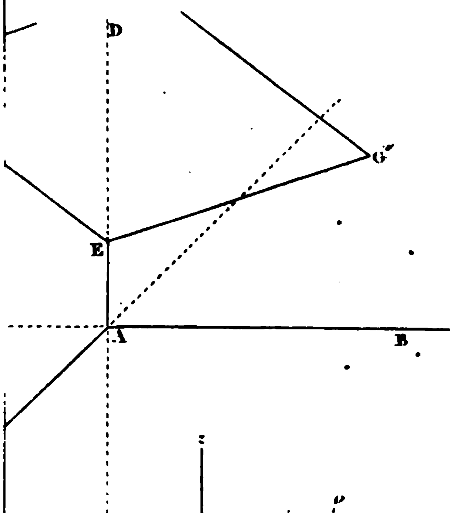


62

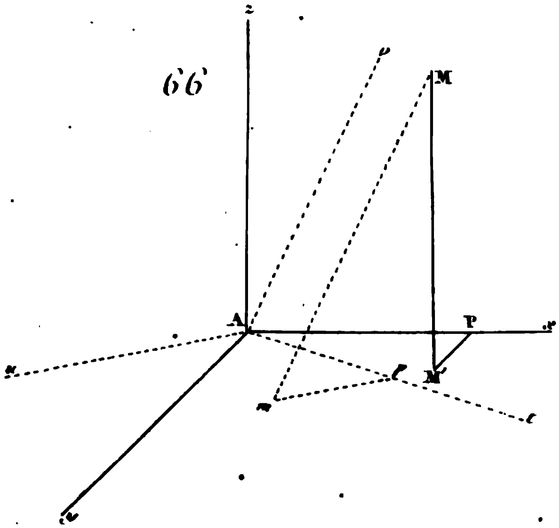


63

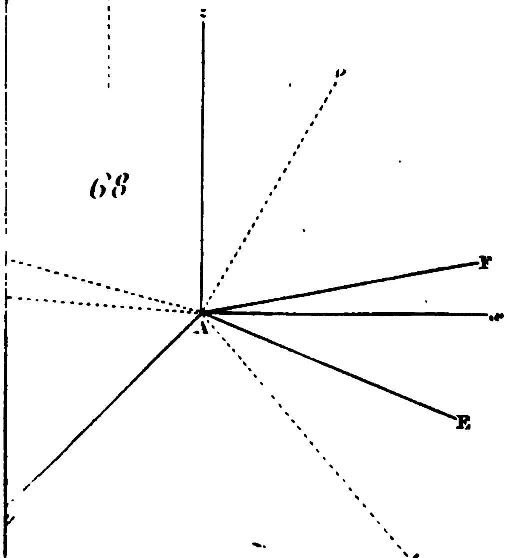




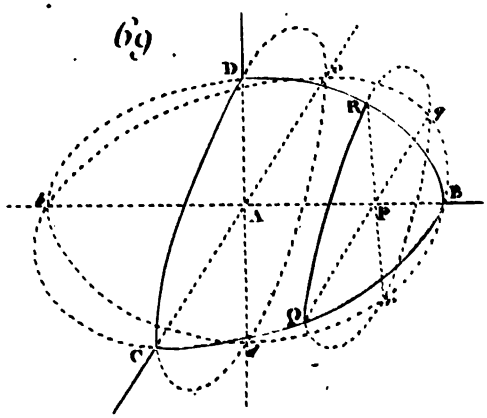
66



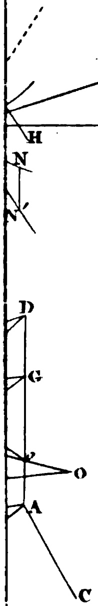
68

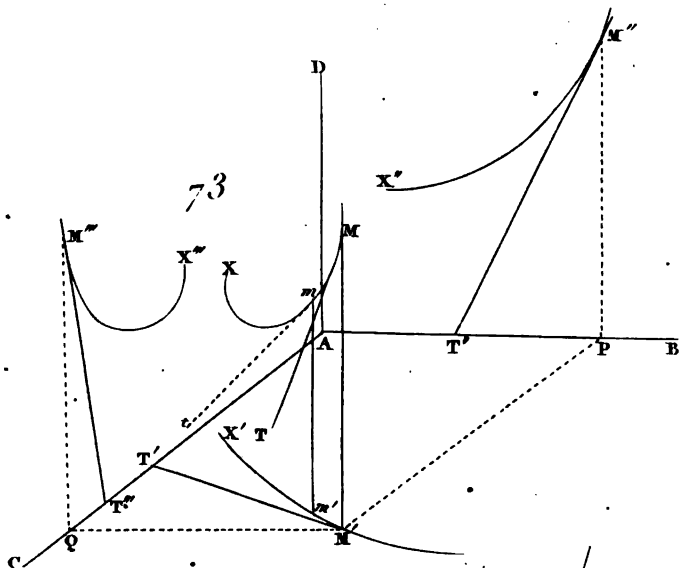


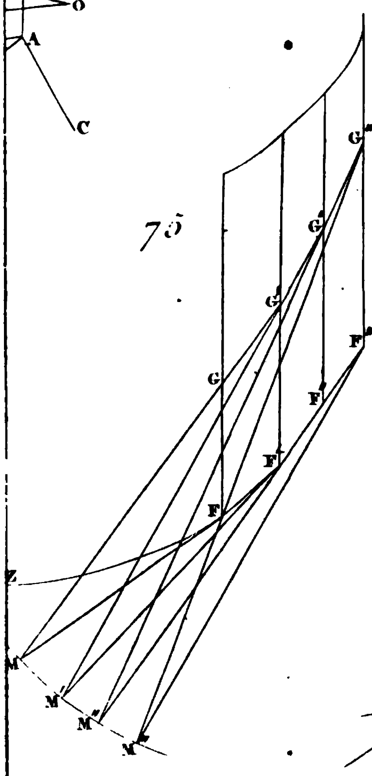
69

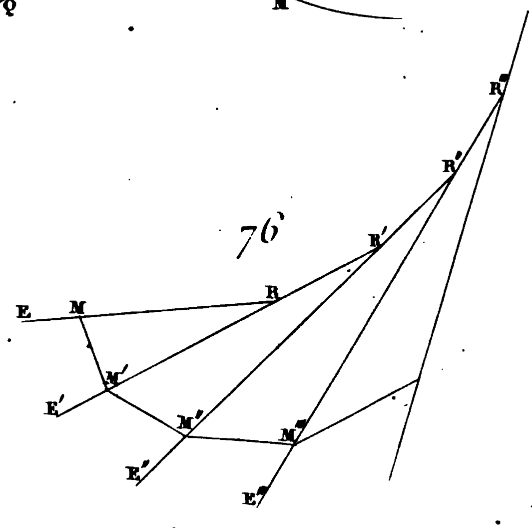


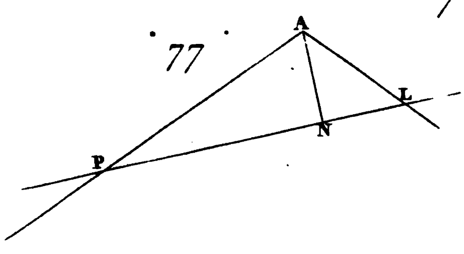
Blaise sc.

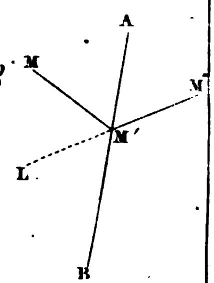

H
P
N
N'
D
G
O
A
C


73
D
M''
X''
M'''
X'''
X
M
m
A
T'
P
B
t
X'
T
T'
T''
m'
Q
M'
C


75
G'''
G''
G'
G
F'''
F''
F'
F
Z
M
M'
M''
M'''


76
R'''
R''
R'
R
E
M
M'
E'
M''
M'''
E''
E'''


77
A
L
N
P


78
A
M
M'
M''
L
B

ERRATA.

Préface, page ij, ligne dernière, l'eovie, *lisez* l'envie
viij, 11 *en remontant*, doivent, *lisez* devaient
xiij, 14, Sterling, *lisez* Stirling
xiv, 13, le problème, *lisez* ce problème
xxij, 4 *en remontant*, vingt-quatre, *lisez* quatorze
xxxv, 17, les différences, *lisez* les valeurs des différences
10, 21, la plus petite, *lis.* la plus grande; la plus grande, *lis.* la plus petite
19 12, le discours préliminaire, *lisez* la préface
32 dern., le discours préliminaire, *lisez* la préface
35 7 *en remont.*, nos 37 et 38, *lisez* nos 34, 37 et 38
59 5 *en remont.*, k', *lisez* k
169 6, *devant* $\frac{d^{m+n}u}{dx^{m+n}}$ *mettez* le signe $+$
ibid. Dans la note marginale, lisez fonctions explicites
185 *Dans la note marginale, lisez* fonctions explicites
243 3 *en remontant*, naturelles, *lisez* partielles
258 19, $\frac{dy^2}{dx^2}$, *lisez* $\frac{d^2y}{dx^2}$
315 18, le discours préliminaire, *lisez* la préface
373 3, $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{-}$, *lisez* $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{y}$
419 18, $Ax^\alpha+By^\beta+Cy^\gamma+$ etc., *lisez* $Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+$ etc.
420 2, $\frac{x^5}{a^3}$, *lisez* $\frac{x^5}{a}$
424 4 *en remontant*, $y+k$, *lisez* $y+k'$
431 9, $AR=-=a=AE$, *lisez* $AR=-a=AE$
435 9, *fig* 32, *lisez fig.* 34, *et de même à la note marginale.*
441 6, $\frac{dy}{dx'}$, *lisez* $\frac{dy'}{dx'}$
454 4, être apperçu, *lisez* être immédiatement apperçu
457 dern., $(y-\beta)\frac{d^3y}{dx'^3}$, *lisez* $(y-\beta)\frac{d^3y}{dx^3}$
470 *Ajoutez à la note marginale*, et des coordonnées polaires
ibid. 8 *en remontant*, AC, *lisez* Ac
487 7 *en remontant*, *fig.* 32, *lisez fig.* 34, *et de même à la marge.*
536 22, $tAEx$, *lisez* $tAEy$
539 8, $\cos\theta \sin\psi \cos\varphi$, *lisez* $\cos\theta \cos\psi \cos\varphi$
559, 10 et 28, A et B, *lisez* A' et B'
577 1, pour, *lisez* par
609 6 *en remontant*, dépendra, *lisez* dépendront
620 11, $T'M$, *lisez* TM,
645 1, $h(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, *lisez* $k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$
648 11, $d.\frac{dy}{ds}+q\frac{dz}{ds}$, *lisez* $d.\frac{dy}{ds}+qd.\frac{dz}{ds}$